த.பா.நி. (க.வெ.) வரிசை எண்—291

பல்கலைக்கழக நவ இயற்கணிதம்

(இரண்டாம் தொகுதி)

(பட்டப்படிப்பிற்குரியது)

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்படி வெளியிடப்படுகிறது)

ஆசிரியர்கள் :

திரு. ப. அல்போன்சு இராசேந்திரன், எம்.எஸ்ஸி.,
கணிதத்துறைத் தலைவர்,
ஆதித்தனார் கல்லூரி, திருச்செந்தூர்.

திரு. வெ. சுவாமிநாதன், எம்.எஸ்ஸி.,
திரு. சு. இராமச்சந்திரன், எம்.எஸ்ஸி.,
கணித விரிவுரையாளர்கள்,
ஆதித்தனார் கல்லூரி, திருச்செந்தூர்.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—February, 1972

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 291

University Modern Algebra (Vol. II)

P. ALPHONSE RAJENDRAN,
V. SWAMINATHAN AND
S. RAMACHANDRAN.

Net Price Rs. **6-50**
(No discount)

'Published by the Tamil Nadu Text Book Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of Books and literature in regional languages at the University Level, of Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare.'

Printed by:

DEEPA PRINTERS,
50, Suriyanarayana Chetty Street,
MADRAS—13.

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்

(தமிழகக் கல்வி—உள்ளாட்சித்துறை அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதினோராண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்று வந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.) 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப் படிப்பு வகுப்புகளிலும் அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன் வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ்வகையில் கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்து வரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், பௌதிகம், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ் நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டுவருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான 'பல்கலைக்கழக நவ இயற்கணிதம்—இரண்டாம் தொகுதி' என்ற இந்நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் **291**ஆவது வெளியீடாகும். இதுவரை **326** நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும். அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

பகுதி I

பகுதி II

பகுதி III

பல்கலைக்கழக நவ இயற்கணிதம்

(இரண்டாம் தொகுதி)

பகுதி I

1. வெக்டர் வெளிகள்

(Vector Spaces)

§ 1. எண்ணிகளும் வெக்டர்களும் (Scalars and Vectors)

இப்பகுதியில் எண்ணிகளைப் பற்றியும் (Scalars) வெக்டர்களைப் பற்றியும் (Vectors), நாம் ஏற்கெனவே அறிந்துள்ள கருத்துகளை விரிவுபடுத்தியும், பொதுப்படுத்தியும், மேலும் இவைகளால் அமையும் கணிதத் தொகுதியைப்பற்றித் தெளிவாகவும் காண்போம்.

§ 1·1. வரையறை

எண்மதிப்பு (Magnitude) மட்டும் கொண்ட திசை சாரா உறுப்புகள் எண்ணிகள் (Scalars) எனவும், எண்மதிப்பும் திசையும் (Magnitude and direction) பெற்ற உறுப்புகள் வெக்டர்கள் (Vectors) எனவும் அழைக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக தொலைவு, அடர்த்தி, வெப்ப எண் என்பன எண்ணிகளாகும். இடப்பெயர்ச்சி, திசைவேகம், முடுக்கம், விசை போன்றன வெக்டர்களாகும்.

§ 1·2. வெக்டர்களைக் குறியீடு செய்தல் (Representation of Vectors)

ஒரு வெளியில் (Space) உள்ளவொரு வெக்டரை திசையுள்ள ஒரு நேர்கோட்டுத் துண்டினால் (directed line segment) குறிக்கலாம். அந் நேர்கோடானது அவ்வெக்டரைத் தாங்கும் கோடு (line of support) எனப்படும். அந் நேர்கோட்டுத் துண்டின் நீளம் அவ் வெக்டரின் எண் மதிப்பையும், அதன் திசை அவ் வெக்டரின் திசையையும் குறிக்கும்.

A என்ற புள்ளியிலிருந்து ஆரம்பித்து, B என்ற புள்ளியில் முடியும் வெக்டரை $\overrightarrow{AB}$ என்று குறிப்போம். இங்கு அம்புக்குறி திசையையும், அத்துண்டின் நீளம் AB ஆனது எண் மதிப்பையும் குறிக்கும். A ஆனது தொடங்கும் புள்ளி எனவும் (initial point), B ஆனது முடியும் புள்ளி எனவும் (terminal point) அழைக்கப்படும்.

எனவே, ஒவ்வொரு வெக்டரையும் குறிப்பதற்கு மூன்று அம்சங்கள் தேவை என அறிகிறோம். அவை, தாங்கும் கோடு எண் மதிப்பு, திசை என்பனவாகும். மேலும் சிலர் வெக்டர் $\overrightarrow{AB}$ என்பதைத் தடித்த எழுத்துகளால் **AB** எனவும் $\overrightarrow{OA}$ ஐ ஓரெழுத்தால் A எனவும் குறிப்பது வழக்கம்.

குறிப்பு : ஒரு வெக்டரைக் குறிக்கும் நேர்கோட்டுத் துண்டின் நீளமே அவ்வெக்டரின் நீளம் எனப்படும். அது எப்பொழுதும் மிகையாகும். மேலும் ஒரு வெக்டரின் நீளமானது அதன் எண் அளவை (modulus) எனவும் அழைக்கப்படும்.

§ 1·3. ஓரிடப்படுத்திய வெக்டர் (Localised Vector)

ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியின் வழியே செல்லும் நேர்கோட்டால் குறிக்கப்படும் வெக்டரானது ஓரிடப்படுத்திய வெக்டர் எனப்படும். மற்றவை ஓரிடப்படுத்தாத (Non-localised) அல்லது தன்னிச்சை (Free) வெக்டர் எனப்படும்.

§ 1·4. வெக்டர்களின் சமத்தன்மை (Equality of Vectors)

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ என்ற இரு வெக்டர்கள்

(i) AB, CD என்ற இரு துண்டுகளும் ஒரே நேர்கோட்டில் அல்லது இணையான நேர்கோடுகளில் அமைந்து இருக்க வேண்டும்.

(ii) இரு வெக்டர்களும் சமநீளமுடையதாய் இருக்க வேண்டும்.

(iii) AB, CD என்ற இரு துண்டுகளும் ஒரே திசையில் உள்ளனவாய் இருக்க வேண்டும். (அ-து) இரு வெக்டர்களும் ஒரே திசையைக் கொண்டதாய் இருக்க வேண்டும்

என்ற நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டு இருக்குமானால் அவை சமம் எனப்படும்.

ஓரிடப்படுத்தாத வெக்டர்களுக்குச் சமமான, ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளிவழிச் செல்லும் வெக்டர்களை எடுத்துக்கொள்வதன் மூலம் அவற்றை ஓரிடப்படுத்தலாம். பொதுவாக ஆதி (origin) வழிச் செல்லும் வெக்டர்களை எடுத்துக் கொள்வது மரபு.

§ 1·5. அலகு வெக்டர்கள் (Unit Vectors)

ஓரலகு நீளம் கொண்ட வெக்டர்கள் **அலகு வெக்டர்கள்** எனப்படும்.

§ 1·6. பூச்சிய வெக்டர்கள் (Zero Vectors)

நீளம் பூச்சியமாக உள்ள வெக்டர்கள் **பூச்சிய வெக்டர்கள்** எனப்படும். இதனை $\vec{0}$ என்று குறிப்பது மரபு.

§ 1·7. இடம் குறிக்கும் வெக்டர்கள் (Position Vectors)

O எனும் புள்ளி ஆதியாகவும், P என்பது வெளியில் யாதானுமொரு புள்ளியாகவும் இருந்தால் வெக்டர் $\overrightarrow{OP}$ ஆனது P-ன் O **ஐச் சார்ந்த இடம் குறிக்கும் வெக்டர்** (Position Vector of P relative to O) எனப்படும்.

இவ்வாறு வெக்டர்களை வரையறுத்தபின் அவற்றிற்கிடையே ஒரு **ஓருறுப்புச் செயலியையும்** (Unary operation) ஒரு ஈருறுப்புச் செயலியையும் (Binary operation) இப்பொழுது வரையறை செய்வோம்.

§ 1·8. இரு வெக்டர்களின் கூட்டல் (Addition of two Vectors)

$\vec{A}$, $\vec{B}$ என்ற இரு வெக்டர்களை எடுத்துக் கொள்வோம். $\overrightarrow{OA}$ ஆனது A ஐக் குறிக்கட்டும். அதே அளவில் A எனும் புள்ளியிலிருந்து $\vec{B}$ வெக்டரைக் குறிக்க $\overrightarrow{AB}$ என்ற திசையுள்ள நேர்கோட்டுத் துண்டு வரைவோம். அப்படியானால் வெக்டர் $\overrightarrow{OB}$ ஆனது $\vec{A}$, $\vec{B}$-க்களின் கூடுதல் எனப்படும். இதை நாம் $\vec{A}+\vec{B}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$ என்று எழுதுவோம்.

OA, AB ஆகிய நேர்கோடுகளை அண்டைப் பக்கங்களாகக் கொண்டு ஓர் இணைகரம் வரைந்தால் OB என்பது அவ்விணைகரத்தின் மூலைவிட்டமாகுமாதலால், இரு வெக்டர்களின் எண் மதிப்பு, திசை ஆகியவற்றைக் குறிக்கும் நேர்கோட்டுத் துண்டுகள் OA, AB-க்களை அண்டைப் பக்கங்களாகக் கொண்டு ஓர்

இணைகரம் வரைந்தால் அவ்விணைகரத்தின் மூலைவிட்டம் $\overrightarrow{OB}$ ஆனது அவ்விரு வெக்டர்களின் கூடுதலாகும். இது வெக்டர்களின் கூட்டலுக்கான இணைகர (Parallelogram) விதியாகும்.

குறிப்பு 1: இரு வெக்டர்களின் கூட்டலானது மற்றொரு வெக்டராகும். மேலும் வழக்கமாக எண்களின் கூட்டலுக்குப் பயன்படுத்தப்படும் $+$ குறியையே இங்கும் பயன்படுத்துகிறோம்.

குறிப்பு 2: $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}$ என்பன ஒரே நேர்கோட்டில் அமையுமானால் $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}$ என்பனவற்றை அண்டைப் பக்கங்களாகக் கொண்ட இணைகரம் இங்கு ஒரே நேர்கோடாகச் சிதைந்து விடுகிறது (degenerated). இங்கும் $\overrightarrow{OB}$ என்பது $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}$-க்களின் கூட்டலையே குறிக்கும். $\overrightarrow{OB}$-ன் தாங்கும் நேர்கோடும், $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$-க்களின் தாங்கும் நேர்கோடும் ஒன்றுதான்.

§ **1·9.** வெக்டர்களின் கூட்டலானது பரிமாற்று விதி (Commutative law) சேர்ப்பு விதி (Associative law) இவற்றிற்குட்பட்டதாகும்.

(அ–து) $\vec{A}+\vec{B} = \vec{B}+\vec{A}$ (பரிமாற்று விதி)

$(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C} = \vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$ (சேர்ப்பு விதி)

இவற்றின் நிரூபணங்களை மாணவர்களுக்குப் பயிற்சியாக விட்டுவிடுகிறோம்.

§ 1·10. வெக்டர்களை எண்ணியால் பெருக்குதல் (Scalar multiplication of Vectors)

$\overrightarrow{OA}$ என்ற திசையுள்ள நேர்கோட்டுத் துண்டால் குறிக்கப்படும் ஒரு வெக்டர் A-யை எடுத்துக்கொள்வோம். m என்பது யாதானுமொரு மெய்யெண் எனின் $m\vec{A}$ ஆனது ஒரு வெக்டர் எனப்படும்.

(i) அதன் நீளம் $\vec{A}$-ன் நீளத்தை $|m|$ ஆல் பெருக்கக் கிடைக்கும்.

(ii) m மிகை எனின் $\vec{A}$-யும் $m\vec{A}$-யும் ஒரே திசையுடையனவாகவும், m குறை எனின் இவை எதிர்த் திசையுடையனவாகவும் இருக்கும்.

(iii) $\vec{A}$-ன் தாங்கும் கோடும் $m\vec{A}$-ன் தாங்கும் கோடும் ஒன்றே.

குறிப்பு 1: எண்ணியால் ஒரு வெக்டரைப் பெருக்குவதால் கிடைக்கும் பெருக்கற் பலனும் ஒரு வெக்டரே என அறிகிறோம். $-\vec{A}$ என்பது $\vec{A}$-க்கு எதிர்த்திசையில் உள்ள $\vec{A}$-ன் நீளத்தைக் கொண்ட ஒரு வெக்டராகும். இதை $\vec{A}$-ன் எதிர்மறை என்போம்.

குறிப்பு 2: மெய்யெண்களே இங்கு எண்ணிகளாகக் கருதப் படுகின்றன. மேலும் வெக்டர்களை எண்ணியால் பெருக்குவதானது சேர்ப்பு (Associative), பங்கீட்டு (Distributive) விதிகளுக்குட்பட்ட தாகும். (அ-து) m, n என்பன மெய்யெண்களாகவும், $\vec{A}, \vec{B}$-க்கள் வெக்டர்களாகவும் இருந்தால்,

$$(m+n)\vec{A} = m\vec{A} + n\vec{A}$$

$$m(\vec{A}+\vec{B}) = m\vec{A} + m\vec{B}$$

$$(mn)\vec{A} = m(n\vec{A}) = n(m\vec{A})$$

மேலே கூறியவற்றிலிருந்து திசையுள்ள நேர்கோட்டுத் துண்டுகளால் குறிக்கப்படும் எல்லா வெக்டர்களையும் கொண்ட கணமானது (Set) § 1.8-ல் வரையறுக்கப்பட்ட கூட்டலின் கீழும் § 1·10-ல் வரையறுக்கப்பட்ட மெய்யெண்களால் பெருக்குதல் என்ற செயலின்கீழும் அடைப்புள்ளது (closed) என்பது தெளிவாகும். மேலும்,

(i) வெக்டர்களின் கூடுதலானது சேர்ப்பு, பரிமாற்று விதிகளுக்குட்பட்டது.

(ii) பூச்சிய வெக்டர் $\vec{0}$ ஆனது கூட்டல் அலகாகும்.

(அ-து) $\vec{A} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{A} = \vec{A}$

(iii) ஒவ்வொரு வெக்டர் $\vec{A}$-க்கும் ஓர் எதிர்மறை வெக்டர் $-\vec{A}$ உண்டு. மேலும் $\vec{A} + (-\vec{A}) = (-\vec{A}) + A = \vec{O}$

§ **1·11.** எனவே, கூட்டலின் கீழ், வெக்டர்களைக் கொண்ட ஒரு கணமானது ஒரு பரிமாற்றுக் குழுவை (Abelian Group) அமைக்கும்.

குறிப்பு: $1.\vec{A} = \vec{A}$ (1 என்பது இயற்கை எண் ஒன்ருகும்.)

§ **1·12.** **கூற்றுத் தொகுதிகள் மூலம் வெக்டர்களைக் குறியீடு செய்தல்** (Representation of vectors by means of coordinate systems)

O-எனும் புள்ளி ஆதியைக் குறிக்கட்டும். வெளியில் (Space) உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளி P-யோடும் அதன் இடம் குறிக்கும் வெக்டரான $\overrightarrow{OP}$ஐத் தொடர்புபடுத்தலாம். இதே போன்று எந்த ஒரு வெக்டர் $\overrightarrow{AB}$-யோடும் அதற்குச் சமமான O வழிச் செல்லும் ஒரு வெக்டர் $\overrightarrow{OP}$ ஐ எடுத்துக்கொள்வதன் மூலம் கிடைக்கும் ஒரே புள்ளி P-யைத் தொடர்புபடுத்தலாம். இதனுல் வெளியில் உள்ள திசையுள்ள நேர்கோட்டுத் துண்டுகளால் குறிக்கப்படும் வெக்டர்களைக் கொண்ட கணத்திற்கும் வெளியில் உள்ள எல்லாப் புள்ளிகளைக் கொண்ட கணத்திற்குமிடையே ஒரு **ஒன்றுக்கொன்று ஒத்திசைவு** (One to one correspondence) உள்ளது.

மேலும், ஆதி O வழியே, வெளியில், செங்குத்து அல்லது சாய்ந்த அச்சுகளை (Rectangular or Oblique axes) எடுத்துக் கொள்வதன்மூலம் எந்த ஒரு புள்ளி P-க்கும் ஒருகூற்றுத் தொகுதிக் குறியீடு (Coordinate representation) கிடைக்கிறது. (x_1, x_2, x_3) என்பன P-ன் உறுப்புகள் (Coordinates) எனக் கொள்வோம். இங்கு x_1, x_2, x_3 என்பன மெய்யெண்களாகும். (x_1, x_2, x_3) என்பன Pஐக் குறிப்பதாலும், புள்ளிகளுக்கும், அவற்றின் இடம் குறிக்கும் ஆதி வழிச்செல்லும் வெக்டர்களுக்கும் **ஒன்றுக்கொன்று முழு அமைப்பு மாற்றம்** (One to one onto mapping) அப்படியாயின் (x_1, x_2, x_3) எனும் உறுப்புகளே P-யோடு தொடர்புகொண்ட OPஐக் குறிக்கின்றன எனக் கொள்ளலாம். இதனுல் வெளியில் உள்ள திசையுள்ள நேர் கோட்டுத் துண்டுகளால் குறிக்கப்படும் வெக்டர்கள் ஒவ்வொன் றிற்கும் உறுப்புக் குறியீடு ஒன்று உண்டு. மேலும் இவ்வுறுப்பு களாலேயே அவ் வெக்டரைக் குறிப்பது மரபு. எடுத்துக் காட்டாக $\overrightarrow{OP} = (x_1, x_2, x_3)$ என எழுதலாம்.

$\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$ என்ற யாதானும் இரு வெக்டர்கள் கொடுக்கப்பட்டால் § 1·8, § 1·10 இவற்றிலிருந்து $\vec{A} + \vec{B} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ எனவும் $m\vec{A} = (ma_1, ma_2, ma_3)$ எனவும் எளிதாக நிறுவலாம்.

குறிப்பு 1: பூச்சிய வெக்டரின் உறுப்புகள் $(0, 0, 0)$ ஆகும்.

குறிப்பு 2: $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ எனின் இதன் எதிர்மறை $-\vec{A} = (-a_1, -a_2, -a_3)$ ஆகும்.

குறிப்பு 3: வெக்டர்களை உறுப்புகள் வாயிலாக எழுதுவதன் மூலம், ஏற்கெனவே நாம் பார்த்துள்ள சில முடிவுகளை இங்கு நிறுவலாம். எடுத்துக்காட்டாக,

$$\begin{aligned}\vec{A}+\vec{B} &= (a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)\\ &= (b_1+a_1,\ b_2+a_2,\ b_3+a_3)\\ &= \vec{B}+\vec{A}\end{aligned}$$

இதுபோல் m, n என்பன மெய்யெண்களெனின்

$$(m+n)\ \vec{A} = m\vec{A} + n\vec{A}$$

$$m\ (\vec{A}+\vec{B}) = m\vec{A} + m\vec{B}$$

$(mn)\ \vec{A} = m\ (n\vec{A}) = n\ (m\vec{A})$ என்பனவற்றையும் நிறுவலாம்.

2. பொதுப்படுத்துதல்

(Generalisation)

கன பரிமாண வெளியில் (Three dimensional space) வெக்டர்களை, திசையுள்ள நேர்கோட்டுத் துண்டுகள் அல்லது மூன்று மெய்யெண்களைக் கொண்ட கூற்றுத் தொகுதிகளால் குறியீடு செய்யலாம் என்று கண்டோம். மேலும் வெக்டர்களை எண்ணியால் பெருக்கும் வரையறையில் எண்ணிகளை மெய்யெண்களாகவே கொண்டோம். இவற்றை இரு வழிகளில் பொதுப் படுத்தலாம்.

§ 2·1. பரிமாணத்தைப் பொதுப்படுத்துதல்

ஒரு வெக்டரை n-மெய்யெண் உறுப்புகளைக் கொண்ட (n-மிகை முழு எண்) கூற்றுத் தொகுதியால் குறியீடு செய்தல் ஒரு வழியாகும். n-பரிமாண வடிவ கணிதத்தில் (n-dimensional Geometry) ஒவ்வொரு புள்ளியையும் n உறுப்புகளைக் கொண்ட கூற்றுத் தொகுதியால் குறியீடு செய்வோம். எனவே அப்புள்ளியோடு தொடர்புகொண்ட வெக்டரையும் அவ்வுறுப்புகளாலேயே (அல்லது கூறுகள்) குறியீடு செய்யலாம். எடுத்துக்காட்டாக, கன பரிமாண வெளியில் உள்ள புள்ளிகளுக்கு, நேரம் என்ற நான்காவது கூற்றையும் சேர்க்க நான்கு பரிமாண வெளி கிடைக்கின்றது. எனவே, இதில் உள்ள புள்ளிகளோடு தொடர்பு கொண்ட வெக்டர்களுக்கு நான்கு உறுப்புகளைக் கொண்ட கூற்றுத் தொகுதிகள் உண்டு. இதுபோல் ஒரு திடப் பொருளின் (Rigid body) மீது செயல்படும் எந்த ஒரு விசையையும் 6 உறுப்புகளைக் கொண்ட கூற்றுத் தொகுதியால் குறியீடு செய்யலாம்.

குறிப்பு : முடிவில்லா (infinite) உறுப்புகள் உள்ள கூற்றுத் தொகுதியைக் கொண்ட வெக்டர்களும் உண்டு. இவற்றைப் பற்றிப் பின்னர்க் காணலாம்.

§ 2·2. உறுப்புகளையும் எண்ணிகளையும் யாதானுமொரு களத்திலிருந்து (Field) எடுத்துக்கொள்ளுதல்

ஒரு வெக்டரைக் குறியீடு செய்யும் கூற்றுத் தொகுதியில் உள்ள உறுப்புகளையும், எண்ணிகளையும் மெய்யெண் களத்திலிருந்து எடுக்காமல் யாதானுமொரு களத்திலிருந்து எடுப்பதன் மூலம் பொதுப்படுத்துதல் பிறிதொரு வழியாகும்.

மேற்கூறிய இருவழிகளிலும் பொதுப்படுத்துவதன் மூலம் யாதானுமொரு களத்திலிருந்து எடுக்கப்பட்ட n உறுப்புகளைக் கொண்ட கூற்றுத் தொகுதியால் குறிக்கப்பட்ட, பொதுப்படுத்தப்பட்ட வெக்டர்கள் கிடைக்கின்றன. இவற்றை எடுத்துக் கொண்டு பல முடிவுகள் நிறுவலாம். இம் முடிவுகள் கனபரிமாண வெளியில் அல்லது தளத்தில் உள்ள திசையுள்ள நேர்கோட்டுத் துண்டுகளால் குறியீடு செய்யப்படும் வெக்டர்களுக்கும் பொருந்தும்.

இவ்வாறு கொள்கைகளைப் (notions) பொதுப்படுத்துவது கணிதத்தில் முக்கியமான ஒரு செயலாகும்.

§ 2·3. பொதுப்படுத்தப்பட்ட வெக்டர்கள் (Generalised Vectors)

யாதானுமொரு களம் F-லிருந்து n உறுப்புகளை எடுத்துக் கொண்டு அவை வரிசைப்படுத்தி அமைக்கப்பட்டு n கூறுகள் (Ordered n tuples of elements from F) **F-ன் மீது அமைந்த n தர வெக்டர்** (Vector of order n over F) என அழைக்கப்படும். $x_1, x_2, \dots, x_n$ என்பன F-ல் இருந்தால் $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ என்பது F-ன் மீது அமைந்த ஒரு n தர வெக்டராகும். இங்கு $x_1, x_2, \dots, x_n$ என்பன X-ன் **கூறுகள்** (components) எனப்படும்.

குறிப்பு 1 : $x_1, x_2, \dots, x_n$ என்ற வரிசையை மாற்றி அமைத்தால் வேறு வெக்டர் கிடைக்கும். எனவே, இங்குக் கூறுகளின் வரிசைக்கு முக்கியத்துவம் அளிக்கப்படல் வேண்டும். எடுத்துக் காட்டாக $X=(1,2,3)$, $Y=(2,1,3)$ என்பன வெவ்வேறு வெக்டர்களாகும். மேலும் $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ என்ற வெக்டரில் $x_1, x_2, \dots, x_n$ என்பன முறையே முதலாவது, இரண்டாவது, ..., n ஆவது கூறு எனப்படும்.

குறிப்பு 2 : F-ன் மீது அமைந்த n தர வெக்டர் ஒரு பொதுப்படுத்தப்பட்ட வெக்டராகும். இதனை வசதிக்காக வெக்டர் என்றே அழைப்போம். F-ல் உள்ள உறுப்புகள் எண்ணிகள் எனப்படும்.

குறிப்பு 3: வெக்டர்கள் எந்தக் களத்தின் மீது அமைகின்றனவோ அக்களமானது **சுட்டுக்களம்** (Reference Field) எனப்படும். சுட்டுக்களத்தைக் குறிப்பது மிகவும் முக்கியமானதாகும். ஏனெனில், சுட்டுக்களம் வேறுபட்டால் வெக்டர்களும் வேறுபடும். அவற்றிற்கிடையே, நாம் பின்னால் பார்க்கப்போகும் கூட்டலோ, எண்ணியால் பெருக்கலோ வரையறை செய்யமுடியாது.

குறிப்பு 4: மெய்யெண் களத்தின்மீது அமையும் வெக்டர்கள் **மெய் வெக்டர்கள்** (Real Vectors) எனவும், சிக்கலெண்மீது அமையும் வெக்டர்கள் **சிக்கல் வெக்டர்கள்** (Complex Vectors) எனவும் அழைக்கப்படும்.

குறிப்பு 5: வெக்டர்களைப் பெரிய எழுத்துகளாலும், அவற்றின் கூறுகளைச் சிறிய எழுத்துகளாலும் குறிப்பது மரபு.

§ 2·4. வெக்டர்களின் சமத்தன்மை (Equality of Vectors)

F-என்ற களத்தின் மீது அமைந்த ஒரே **தரமுள்ள** இரு வெக்டர்களின் ஒத்தகூறுகள் (corresponding components) சமமாக இருந்தால் மட்டுமே அவை சமம் எனப்படும்.

(அ-து) $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ என்ற, F மீது அமைந்த இரு வெக்டர்கள், $x_j = y_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ என்று இருந்தால் மட்டுமே சமமாகும். இதனை $X = Y$ என்று குறிப்போம்.

$$(\text{அ-து})\ X = Y \iff x_1 = y_1 ;\ x_2 = y_2 ;\ \ldots ;\ x_n = y_n$$

குறிப்பு: இரு வெக்டர்களின் சமத்தன்மையைப் பற்றிக் கூற வேண்டுமானால் முதலில் அவை ஒரே களத்தின் மீது அமைந்தனவாக இருக்கவேண்டும். மேலும், அவை ஒரே தரமுள்ளதாகவும் இருக்கவேண்டும்.

§ 2·5. n-தர பூச்சிய வெக்டர் (Zero Vector of order n)

F-என்ற களத்தின் **கூட்டல் அலகை** (Additive identity) 0 என்று குறிப்போம். n கூறுகளையும் 0 ஆகக் கொண்ட வெக்டர் $(0, 0, \ldots, 0)$ ஆனது F-ன் மீது அமைந்த n-தர **பூச்சிய வெக்டர்** எனப்படும். இதனை 0 என்று குறிப்பது மரபாகும்.

குறிப்பு: வெவ்வேறு களங்களின் கூட்டல் அலகும் வேறுபடுமாதலால் அவைகளின் மீது அமைந்த பூச்சிய வெக்டர்களும் வெவ்வேறாகும்.

§ 2·6. வெக்டர்களின் கூட்டல்

F-என்ற களத்தின் மீது அமைந்த $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ என்ற இரு n-தர வெக்டர்களை எடுத்துக்கொள்வோம். $Z=(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$ என்ற Fமீது அமைந்த n-தர வெக்டரானது X, Y இவற்றின் கூட்டற்பலன் அல்லது கூடுதல் எனப்படும். இதனை $Z=X+Y$ என்று எழுதுவது மரபாகும்.

$\therefore Z=X+Y = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$

குறிப்பு 1: $x_1, x_2, \ldots, x_n ; y_1, y_2, \ldots, y_n$ என்பன F-ல் இருப்பதால் $(x_1+y_1), \ldots, (x_n+y_n)$ என்பன வரையறுக்கப்பட்டவை. மேலும் இவையும் F-ல் உள்ளன. எனவே, வெக்டர்களின் கூட்டல் நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட ஓர் **ஈருறுப்புச் செயலாகும்** (Well defined Binary operation).

குறிப்பு 2: ஒரே களத்தின்மீது அமைந்த ஒரேதர வெக்டர்களுக்கு மட்டுமே கூட்டல் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. மேலும் ஒரேதர வெக்டர்களின் கூட்டற்பலனும் அதேதர வெக்டராயிருப்பதால் ஒரேதர வெக்டர்களைக் கொண்ட ஒருகணம் கூட்டலின்கீழ் அடைப்புள்ளதாகும்.

§ 2·7. வெக்டரை எண்ணியால் பெருக்குதல்

$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ என்பது களம் F-ன் மீது அமைந்த யாதானுமொரு வெக்டராகவும் α என்பது F-ல் உள்ள ஓர் எண்ணியாகவும் இருந்தால் $X'=(\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$ என்ற F-ன் மீது அமைந்த n-தர வெக்டரானது, Xஐ αஆல் பெருக்கக் கிடைக்கும் பெருக்கற்பலன் எனப்படும். இதை αX என்று குறிப்போம். எனவே,

$$X'=\alpha X=\alpha\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)=(\alpha\, x_1, \alpha\, x_2, \ldots, \alpha\, x_n) \text{ ஆகும்.}$$

குறிப்பு: ஒரு வெக்டரை எண்ணியால் பெருக்குவதால் கிடைக்கும் பெருக்கற்பலனும் அதேதர வெக்டராயிருப்பதால், ஒரேதர வெக்டர்களைக் கொண்ட ஒரு கணம் எண்ணியால் வெக்

டரைப் பெருக்குதல் என்ற ஓருறுப்புச் செயலின்கீழ் அடைப்புள்ளது (closed under unary operation).

§ 2·8. வெக்டர் கூட்டலின் பண்புகள்

X, Y, Z என்பன F என்ற களத்தின்மீது அமைந்த யாதானும் மூன்று ஒரேதர வெக்டர்கள் எனக் கொள்வோம். அப்படியானால்,

(i) $X+Y = Y+X$ (பரிமாற்று விதி)

(ii) $X+(Y+Z) = (X+Y)+Z$ (சேர்ப்பு விதி)

(iii) $X+0 = 0+X = X$

(iv) ஒவ்வொரு வெக்டர் X-க்கும் ஓர் எதிர்மறை உண்டு. அதனை $-X$ என்று குறித்தால் $X+(-X) = (-X)+X = 0$

நிறுவுதல் :

(i) $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ என்று கொள்வோம். அப்படியானால்,

$$\begin{aligned} X+Y &= (x_1+y_1,\ x_2+y_2, \ldots,\ x_n+y_n) \\ &= (y_1+x_1,\ y_2+x_2, \ldots,\ y_n+x_n) \quad (\because x_i, y_i \in F) \\ &= Y+X \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} X+(Y+Z) &= (x_1, x_2, \ldots x_n)+(y_1+z_1, y_2+z_2, \ldots, y_n+z_n) \\ &= (x_1+\overline{y_1+z_1},\ x_2+\overline{y_2+z_2},\ \ldots,\ x_n+\overline{y_n+z_n}) \\ &= (\overline{x_1+y_1}+z_1,\ \overline{x_2+y_2}+z_2,\ \ldots,\ \overline{x_n+y_n}+z_n) \\ & \qquad (\because x_i, y_i, z_i \in F) \\ &= (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)+(z_1, z_2, \ldots, z_n) \\ &= (X+Y)+Z \end{aligned}$$

இதனால் மூன்று ஒரேதர வெக்டர்களைக் கூட்டும்பொழுது அடைப்புக்குறி தேவையில்லை என அறிகிறோம். வெறுமனே $X+Y+Z$ என்று எழுதுவது எந்தத் தவற்றுக்கோ, குழப்பத்திற்கோ இடமளிக்காது.

(iii)
$$\begin{aligned} X+0 &= (x_1+0, x_2+0, \ldots, x_n+0) \\ &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) = X \end{aligned}$$

$\therefore\ X+0 = 0+X$ (பரிமாற்று விதி)
$\qquad = X$

இதிலிருந்து எல்லா ஒரேதர வெக்டர்களையும் கொண்ட கணத்தில் அதேதரமுடைய பூச்சிய வெக்டரானது கூட்டல் அலகு ஆகின்றது.

(iv) $X' = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ என்ற n-தர வெக்டரை எடுத்துக்கொள்வோம். அப்படியானால்,

$$X+X' = [x_1+(-x_1),\ x_2+(-x_2), \ldots, x_n+(-x_n)]$$
$$= (0, 0, \ldots 0) = 0$$ ஆகும்.

எனவே X' ஆனது X-ன் எதிர்மறை ஆகும். இதனை $(-X)$ என்று குறித்தால் $X+(-X) = (-X)+X = 0$

குறிப்பு: எல்லா ஒரேதர வெக்டர்களைக் கொண்ட ஒரு கணத்தில் ஒவ்வொரு வெக்டருக்கும் ஓர் எதிர்மறை அக்கணத்திலேயே உள்ளது. எனவே, எல்லா ஒரேதர வெக்டர்களையும் கொண்ட ஒரு கணமானது பரிமாற்றுக்குழு என அறிகிறோம்.

§ 2·9. வெக்டரை எண்ணியால் பெருக்குதலின் பண்புகள்

X, Y என்பன களம் F-ன் மீது அமைந்த யாதானும் இரு ஒரேதர வெக்டர்களாக இருக்கட்டும். α, β என்பன F-ல் உள்ள இரு எண்ணிகள்; F-ல் உள்ள பெருக்கல் அலகை 1 என்று குறிப்போம். அப்படியானால்,

(i) $(\alpha\beta)X = \alpha(\beta X) = \beta(\alpha X)$ (சேர்ப்பு விதி)

(ii) $\alpha(X+Y) = \alpha X + \alpha Y$; $(\alpha+\beta)X = \alpha X + \beta X$ (பங்கீட்டு விதி)

(iii) $1 \cdot X = X$

நிரூபணம்:

$X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ என்போம்.

அப்படியானால், (i) $(\alpha\beta)X = \alpha\beta\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$= (\overline{\alpha\beta}\,x_1, \overline{\alpha\beta}\,x_2, \ldots, \overline{\alpha\beta}\,x_n)$$
$$= [\alpha(\beta x_1), \alpha(\beta x_2), \ldots, \alpha(\beta x_n)]$$
$$= \alpha(\beta x_1, \beta x_2, \ldots, \beta x_n)$$
$$= \alpha(\beta X)$$

$$\beta(\alpha X) = \beta(\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$
$$= [\beta(\alpha x_1), \beta(\alpha x_2), \ldots, \beta(\alpha x_n)]$$
$$= (\overline{\alpha\beta}\,x_1, \overline{\alpha\beta}\,x_2, \ldots, \overline{\alpha\beta}\,x_n)$$

$$= (\alpha\beta)X \qquad (\because \alpha, \beta, x_i \in F)$$

$$\therefore (\alpha\beta)X = \alpha(\beta X) = \beta(\alpha X)$$

(ii) $$\alpha(X+Y) = \alpha(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$$
$$= (\alpha\,\overline{x_1+y_1}, \alpha\,\overline{x_2+y_2}, \ldots, \alpha\,\overline{x_n+y_n})$$
$$= (\alpha x_1+\alpha y_1, \alpha x_2+\alpha y_2, \ldots, \alpha x_n+\alpha y_n)$$
$$= (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) + (\alpha y_1, \alpha y_2, \ldots, \alpha y_n)$$
$$= \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \alpha(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$
$$= \alpha X + \alpha Y$$

மேலும், $$(\alpha+\beta)X = (\alpha+\beta)(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$= (\overline{\alpha+\beta}\,x_1, \overline{\alpha+\beta}\,x_2, \ldots, \overline{\alpha+\beta}\,x_n)$$
$$= (\alpha x_1+\beta x_1, \alpha x_2+\beta x_2, \ldots, \alpha x_n+\beta x_n)$$
$$= (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) + (\beta x_1, \beta x_2, \ldots, \beta x_n)$$
$$= \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \beta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$= \alpha X + \beta X$$

(iii) $$1\cdot X = 1\cdot(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$= (1\cdot x_1, 1\cdot x_2, \ldots, 1.x_n) \quad (\because F\text{-ல் } 1\cdot x_i = x_i)$$
$$= (x_1, x_2, \ldots, x_n) = X$$

இதனுல் எல்லா ஒரேதர வெக்டர்களையும் கொண்ட கணம், F-ல் உள்ள உறுப்புகளைச் செயலிகளாகக் (Operators) கொண்டது என்று அறிகிறோம்.

§ 2·10. வெக்டர் வெளி (Vector Space)

F என்ற யாதானுமொரு களத்தின் மீது அமைந்த n-தர வெக்டர்களைக் கொண்ட ஒரு கணம், வெக்டர் கூட்டலுக்கும், எண்ணியால் வெக்டரைப் பெருக்குதலுக்கும் அடைப்புள்ளதாயிருந்தால், அக்கணம், F-ன் மீது அமைந்த n-தர வெக்டர் வெளி (Vector Space of order n over F) எனப்படும். (அ-து) n தர வெக்டர்களைக் கொண்ட V என்ற ஒரு கணத்தில் உள்ள யாதானும் இரு வெக்டர்கள் X, Y-யையும், களம் F-ல் யாதானுமொரு எண்ணி α-வையும் எடுத்துக்கொண்டால், $X+Y$-யும் αX-ம் V-யிலேயே இருந்தால் கணம் V-ஆனது ஒரு n-தர வெக்டர் வெளி எனப்படுகிறது.

குறிப்பு: ஒரேதர வெக்டர்களைக் கொண்ட ஒரு கணம், வெக்டர் கூட்டலுக்கும், எண்ணியால் வெக்டரைப் பெருக்கு தலுக்கும் அடைப்புள்ளதாய் இருந்தால் § 2.8, § 2.9-ல் கூறப்பட்ட பண்புகள் இக்கணத்திலும் பொருந்தும் என நிறுவலாம். எடுத்துக் காட்டாக இக் கணத்தில் யாதானும் ஒரு வெக்டர் X ஐ எடுத்துக் கொண்டு அதனை F-ல் உள்ள கூட்டல் அலகு 0 ஆல் பெருக்க $0 \cdot X$ என்ற உறுப்பும் இக் கணத்திலேயே இருக்கும். ஆனால், $0 \cdot X = 0$ ஆதலால் பூச்சிய உறுப்பும் இக்கணத்தில் உள்ளது. F-ல் பெருக்கல் அலகு 1-ன் எதிர்மறையான -1 ஆல் X ஐப் பெருக்க, X-ன் எதிர்மறை வெக்டர் $-X$ கிடைக்கும். இதுவும் அக் கணத்திலேயே உள்ளது. ஆதலால், ஒரேதர வெக்டர்களால் அமைக்கப்பட்ட வெக்டர் வெளி வெக்டர் கூட்டலின் கீழ் ஒரு பரிமாற்றுக் குழு ஆகும். மேலும், அவ்வெளி X-ல் உள்ள உறுப்புகளைச் செயலிகளாகக் கொண்டது.

(i) n ஆவது கூறு மட்டும் F என்ற களத்தில் யாதானுமோர் உறுப்பாகவும் பிற கூறுகள் F-ன் கூட்டல் அலகான 0 ஆகவும் கொண்ட எல்லா n-தர வெக்டர்களையும் கொண்ட ஒரு கணம் வெக்டர் கூட்டலுக்கும், எண்ணியால் பெருக்கலுக்கும் அடைப்புள்ளது என எளிதாக நிறுவலாம். ஆதலால் அக்கணம் F-ன் மீது அமைந்த ஒரு n-தர வெக்டர் வெளியாகும். இதனை $V = \{ (0, 0, \ldots, x) \,, x \in F \}$ என்று குறிக்கின்றோம்.

(ii) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ என்பன களம் F-ல் உள்ள r மாறி எண்ணிகளாகவும் (Variable scalars), $x_1, x_2, \ldots, x_r$ என்பன F-ன் மீது அமைந்த யாதானும் r n-தர வெக்டர்களாகவும் இருந்தால் இவ் வெக்டர்களை நிலையாகக் கொண்டு அமைக்கப்பட்ட $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots, + \lambda_r x_r$ என்ற எல்லா வெக்டர்களையும் கொண்ட ஒரு கணமானது F-ன் மீது அமைந்த ஒரு n-தர வெக்டர் வெளியாகும்.

இதனை $V = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \ldots, + \lambda_r x_r, x_1, x_2 \ldots, x_r$ நிலையானவை $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ என்பன F-ல் மாறும் எண்ணிகள்$\}$ என்று குறிப்போம்.

(iii) F-ன் மீது அமைந்த n தர பூச்சிய வெக்டரை மட்டும் கொண்ட ஒரு கணம் ஒரு n தர வெக்டர் வெளியாகும். இது வெளிப்படை வெக்டர் வெளி (Trivial vector space) எனப்படும்.

(iv) F என்ற களத்தின் மீது அமைந்த ஒரேதர வெக்டர்கள் அனைத்தையும் கொண்ட ஒரு கணம் வெக்டர் கூட்டலுக்

கும், எண்ணியால் பெருக்கலுக்கும் அடைப்புள்ளது என முன்பே பார்த்துள்ளோம். (§ 2.6, § 2.7) ஆதலால், இக்கணம் ஒரு வெக்டர் வெளியாகும்.

§ 2·11. முழு வெக்டர் வெளி (Total Vector Space)

F என்ற களத்தின் மீது அமைந்த n தர வெக்டர்கள் அனைத்தையும் கொண்ட ஒரு கணம் வெக்டர் கூட்டலின் கீழும் எண்ணியால் வெக்டரைப் பெருக்குதலுக்கும் அடைப்புள்ளதால், அக்கணம் F-ன் மீது அமைந்த ஒரு n தர வெக்டர் வெளியாகும். இதனை F-ன் மீது அமைந்த n தர முழு வெக்டர் வெளி (Total vector space of order n over F) என்று கூறுவோம். இவ்வெளியை V_n (F) என்று குறிப்பது வழக்கமாகும்.

குறிப்பு 1: ஒரு வெக்டர் வெளி ஒரேதர வெக்டர்களைக் கொண்டது. ஆனால், அத்தரத்தைக் கொண்ட எல்லா வெக்டர்களையும் கொண்டிருக்க வேண்டும் என்ற தேவையில்லை.

குறிப்பு 2: எந்த ஒரு வெக்டர் வெளியிலும் பூச்சிய வெக்டர் இருக்குமெனப் பார்த்தோம் (§ 2.10 குறிப்பு). ஆதலால், பூச்சிய வெக்டரை மட்டும் கொண்ட வெக்டர் வெளியை **ஓருறுப்பு வெக்டர்வெளி** (Vector space with one element) என்போம். மற்றவற்றில் குறைந்தது இரு வெக்டர்களாவது இருக்கும். மேலும், ஒரு களத்தை வரையறுக்கும் பொழுது அதில் குறைந்தது இரு உறுப்புகளாவது இருக்கவேண்டும் என அறிவோம். ஆனால், வெக்டர் வெளிக்கு இந் நிபந்தனை தேவையில்லை.

குறிப்பு 3: R மெய்யெண் களம் எனின் $V_2(R)$ என்பது வடிவ கணிதத்தில் தளத்தையும் V_3 (R) என்பது கனபரிமாண வெளியையும் குறிக்கும்.

குறிப்பு 4: F என்ற களத்தின் மீது அமைந்த வெக்டர்களை வரையறுத்தது போல் R என்ற யாதானுமொரு வளையத்தின் (Ring) மீதும் வெக்டர்களை வரையறுக்கலாம். ஒரு வளையம் R-ன் மீது அமைந்த ஒரேதர வெக்டர்களைக் கொண்ட ஒரு கணம் வெக்டர் கூட்டலுக்கும், எண்ணியால் (R-ல் உள்ள உறுப்புகள்) பெருக்குதலுக்கும் அடைப்புள்ளதாயிருந்தால் அக்கணம் R மாட்யூல் (R-module) எனப்படும்.

§ 2·12. வெக்டர்களின் ஒருபடிச் சேர்வு (Linear Combination of Vectors)

$x_1, x_2, \ldots, x_r$ என்பன F என்ற களத்தின் மீது அமைந்த ஒரேதர வெக்டர்களாகவும் $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ என்பன F-ல் உள்ள

எண்ணிகளாகவும் இருந்தால் $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots, + \lambda_r x_r$ என்ற வெக்டரானது $x_1, x_2, \ldots, x_r$ களின் ஒருபடிச்சேர்வு எனப்படுகிறது. $X = \lambda_1 x_1, + \lambda_2 x_2 + \ldots, + \lambda_r x_r$ எனின் X என்பது $x_1, x_2, \ldots, x_r$ என்ற வெக்டர்களின் மீது ஒருபடிச்சார்ந்த நிலையில் (linearly dependent on) உள்ளது என்று கூறுவோம். எடுத்துக்காட்டாக மெய்யெண் களம் R-ன் மீது அமைந்த 4 தர வெக்டர் $(2, 1, 0, 1)$ என்பது $(4, 2, 0, 1)$, $(2, 1, 0, \frac{3}{2})$ என்ற இரு வெக்டர்களின் மீது ஒருபடிச்சார்ந்த நிலையில் உள்ளது. ஏனெனில், $(2, 1, 0, 1) = \frac{1}{4}(4, 2, 0, 1) + \frac{1}{2}(2, 1, 0, \frac{3}{2})$ ஆகும்.

§ 2·13. உருவாக்கிகள் (Generators)

F என்ற களத்தின் மீது அமைந்த ஒரு வெக்டர் வெளி V யில் உள்ள எந்த ஒரு வெக்டரையும் V-யில் உள்ள $x_1, x_2, \ldots, x_r$ என்ற r வெக்டர்களின் ஒருபடிச்சேர்வாக எழுதமுடியுமானால் $x_1, x_2, \ldots, x_r$ என்ற வெக்டர்கள் V-யின் உருவாக்கிகள் (Generators) எனப்படும். V-ஆனது $x_1, x_2, \ldots, x_r$ என்ற r வெக்டர்களால் **உருவாக்கப்படுகிறது** (spanned or generated) என்று கூறுவோம். எடுத்துக்காட்டாக மெய்யெண்களம் R-ன் மீது அமைந்த n தர முழு வெக்டர் வெளி $V_n(R)$ ஐ எடுத்துக்கொள்வோம். இதற்கு $E_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $E_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$ $\ldots, E_n = (0, 0, \ldots, 1)$ என்ற n வெக்டர்களும் உருவாக்கிகள் ஆகும். ஏனென்னில், $V_n(R)$ல் யாதானுமொரு வெக்டர் $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ஐ எடுத்துக்கொண்டால் $X = x_1 E_1, + x_2 E_2, + \ldots, + x_n E_n$ என எழுதலாம். ஆதலால் $V_n(R)$-ல் உள்ள எந்தவொரு வெக்டரும் $E_1, E_2, \ldots, E_n$ என்ற n வெக்டர்களின் ஒருபடிச்சேர்வாகும். இவை அலகு வெக்டர்கள் (unit vectors) எனப்படும்.

பயிற்சி 1

1. $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ என்பது F என்ற களத்தின் மீது அமைந்த யாதானுமொரு வெக்டராகவும் -1 என்பது F-ன் பெருக்கல் அலகின் எதிர்மறையாகவும் இருந்தால்

$(-1) X = -X = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n) = 1\ (-X)$ என நிறுவுக.

2. கணக்கு 1-ல் F-ன் கூட்டல் அலகு 0 ஆகவும் F-ன் மீது அமைந்த n தர பூச்சிய வெக்டர் 0 ஆகவும் α என்பது F-ல் ஒரு எண்ணியாகவும் இருந்தால் $0 \cdot X = 0$; $\alpha \cdot 0 = 0$ என நிறுவுக.

3. (*a*) X, Y என்பன களம் F-ன் மீது அமைந்த இரு வெக்டர்கள் என்க. $Y + K = X$ என்ற சமன்பாட்டில் Kக்கு ஒரே ஒரு தீர்வு மட்டும் (unique solution) உண்டு என நிறுவுக.

இத்தீர்வை $X-Y$ என்று குறிப்போமானல் $X-Y=X+(-Y)$ எனக் காண்பி.

(b) $(-X)$ என்பது எந்த சமன்பாட்டின் ஒற்றைத்தீர்வாகும்? அல்லது $(-X)$ ஐ வரையறுக்க. இதிலிருந்து $-(-X)=X$ எனக் காண்பி.

4. வழக்கமான பொருளின் அடிப்படையில் பின்வருபனவற்றை நிறுவுக.

(i) $X-Y=-(Y-X)$

(ii) $X-(Y-Z)=(X-Y)+Z$

(iii) $\alpha(X-Y)=\alpha X-\alpha Y$

(iv) $(\alpha-\beta)X=\alpha X-\beta X$

(v) $X-Y=Z \implies X=Y+Z$

(vi) $X+Y=Y+Z \implies X=Z$ (இது வெக்டர் கூட்டலின் நீக்கல் விதியாகும். cancellation law for vector addition).

5. $V=\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 \text{ என்பது முழு எண்} \\ x_2, x_3, \ldots, x_n \in Q \end{array}\right\}$

என்றமைந்தகணம் விகிதமுறு எண்களம் Q-ன் மீது ஒரு n தர வெக்டர் வெளியை அமைக்குமா என ஆராய்க.

6. $V_3(Z_3)$ல் எவ்வளவு வெக்டர்கள் $(1,1,2)$, $(2,1,1)$ என்ற இரு வெக்டர்களால் உருவாக்கப்படுகின்றன?

7. $V_2(Z_2)$ல் உள்ள எல்லா வெக்டர்களையும் ஒரு கூட்டல் அட்டவணையில் அமைத்து எழுதுக.

8. $V_3(Q)$ல் $(1,0,0), (1,1,0)$ என்ற இரு வெக்டர்களால் உருவாக்கப்பட்ட வெக்டர் வெளியை வடிவகணித முறையில் விளக்குக.

9. $V_n(Z_p)$ல் [p என்பது பகா எண்] எவ்வளவு வெக்டர்கள் உள்ளன? $\alpha \in V_n(Z_3)$ எனின் $\alpha+\alpha+\alpha$ என்ற வெக்டரைப் பற்றி என்ன கூறலாம்?

பகுதி II

1. அருபவெக்டர் வெளிகள்

அல்லது

ஒருபடிப் பல்லடுக்குகள்

(Abstract Vector Spaces or Linear Manifolds)

1·1. அருபப்படுத்துதல் (Abstraction)

வெளியில் உள்ள திசையையும், மெய்யெண் மதிப்பையும் கொண்ட வெக்டர்களை வரிசையாக மூன்று மெய்யெண்களால் குறிக்கலாமெனவும், அதையே பொதுப்படுத்தினல் யாதானு மொரு களம் F-லிருந்து எடுக்கப்பட்டு வரிசைப்படுத்தப்பட்ட n கூறுகளைக் கொண்ட n தர வெக்டர்கள் கிடைக்குமெனவும் கண்டோம். இத்தகைய பொதுப்படுத்தப்பட்ட வெக்டர் களிடையே, கூட்டலையும், எண்ணியால் பெருக்கலையும் வரை யறுத்தால் இவ்விரு செயல்களும் பல பண்புகளைக் கொண்டுள்ளன எனவும் முற்பகுதியில் பார்த்தோம்.

ஆனல் வெக்டர்கள் என்பவை ஒரு குறிப்பிட்ட தன்மை யுள்ள உறுப்புகளாகும். இத்தன்மைக்கு அதிக முக்கியத்துவம் அளிக்காமல், வெக்டர்களுக்கிடையே வரையறுக்கப்படும் இரு செயல்களுக்கும் அவற்றின் பண்புகளுக்கும் அதிக முக்கியத்துவம் கொடுக்கின்றோம். (அ-து) S என்ற ஒரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் தன்மைபற்றி ஒன்றும் தெரியாது. ஆனல் அக் கணத்திலுள்ள உறுப்புகளிடையே ஈருறுப்புச் செயலும் ஓருறுப்புச் செயலும் வரையறுக்கப்பட்டு அச்செயல்கள் அத் 1. § 2·8, 2·9-ல் கூறப்பட்ட பண்புகளை உடையன எனக்கொள் வோம். இப்பொழுது வெக்டர்களை உறுப்புகளாகக் கொண்ட வெக்டர் வெளி, S என்ற கணத்தின் குறிப்பிட்ட எடுத்துக்காட் டாக மாறிவிடுகின்றது. மேலும் S-ல் நிறுவப்படும் எல்லா முடிவு களும் வெக்டர்களை உறுப்புகளாகக் கொண்ட வெக்டர் வெளிக் கும் பொருந்தும்.

இப்பொழுது வெளிப்படையான ஒரு கணிதத்தொகுதியில் (concrete mathematical system) உள்ள உறுப்புகளின் தன்மைக்கு முதலிடம் அளிக்காமல், அவற்றிற்கிடையே அமைந்த செயல்களுக்கும் அச்செயல்கள் நிறைவு செய்யும் இயல்முறை கணித பண்புகளுக்கும் முதலிடம் அளித்து, உறுப்புகளின் தன்மைபற்றி எவ்விதத்தற்கோணும் (assumption) இல்லாத வேறு ஒரு கணத்தில், அச்செயல்களையும் பண்புகளையும் வரையறுத்து அக்கணத்தை அமைக்கும் முறையானது அருபப்படுத்தும் முறை (process of abstraction) எனப்படும். வெக்டர் வெளி எனும் வெளிப்படைக் கணிதத் தொகுதியிலிருந்து இம்முறையைப் பயன்படுத்திக் கிடைத்ததே அருபவெக்டர் வெளி (abstract vector space) ஆகும்.

§ 1·2. அருபவெக்டர் வெளி (Abstract Vector Space)

F என்பது ஒரு களம். V ஆனது ஒரு வெறுமையற்ற கணமாக இருக்கட்டும். V-யில் ஒரு ஈருறுப்புச் செயல் வரையறுக்கப்பட்டு (இச் செயலைக் கூட்டலென்று அழைப்பது வழக்கம்) அச் செயலின் கீழ் V அடைப்புள்ளதாகவும் இச்செயல் பின்வரும் பண்புகளை நிறைவு செய்யத்தக்கதாகவும். (அ-து) X, Y, Z என்பன Vல் யாதானும் மூன்று உறுப்புகளெனின்

(i) $X+Y = Y+X$ (பரிமாற்று விதி)

(ii) $X+(Y+Z) = (X+Y)+Z$ (சேர்ப்பு விதி)

(iii) $Y+K = X$ என்ற சமன்பாட்டில் Kக்கு Vல் ஒரு தீர்வு உண்டு.

மேலும், α என்பது F-ல் ஓர் எண்ணியாகவும் $\alpha \cdot X$ என்பது வரையறுக்கப்பட்டு அது V-ல் உள்ளது. (அ-து) V-ல் உள்ள உறுப்புகளை எண்ணியால் பெருக்குதல் எனும் செயலின் கீழ் V அடைப்புள்ளதாகவும் 1 என்பது F-ல் பெருக்கல் அலகாகவும், α, β என்பன F-ல் உள்ள எண்ணிகளாகவும் இருந்தால், இச்செயல் பின்வருபனவற்றை நிறைவு செய்யத்தக்கதாகவும்,

(அ-து) (iv) $(\alpha\beta) X = \alpha (\beta X)$ (சேர்ப்பு விதி)

(v) $(\alpha+\beta)X = \alpha X + \beta X$ (கூட்டலுக்கான பங்கீட்டுவிதி)

(vi) $\alpha (X+Y) = \alpha X + \alpha Y$ (,, ,,)

(vii) $1 \cdot X = X$

இருந்தால், இவ்வாறு அமைந்த கணம் Vயை F-ன் மீது அமைந்த அருபவெக்டர் வெளி (abstract vector space) அல்லது

ஒருபடி வெளி (linear space) அல்லது ஒருபடிப் பல்லடுக்கு (linear manifold) எனலாம்.

குறிப்பு 1: மேலே வரையறுக்கப்பட்ட V-என்ற கணத்தையே வெக்டர் வெளி என்றும் கூறுவர். மேலும் V-ல் உள்ள உறுப்புகளை வெக்டர்கள் என்றே அழைப்பது வழக்கம்.

குறிப்பு 2: முதல் மூன்று நிபந்தனைகளைச் சுருக்கி, V-என்ற கணம் கூட்டல் என்னும் ஈருறுப்புச் செயலின்கீழ் ஒரு பரிமாற்றுக் குழுவாகும் எனவும், அடுத்த மூன்று நிபந்தனைகளையும் சுருக்கி, V-என்ற கணம் F-ல் உள்ள உறுப்புகளைச் செயலிகளாகக் (Operators) கொண்டது என்றும் கூறலாம். மேலும், ஏழாவது நிபந்தனையானது V ஒன்றூடானது (Unitary) என்கின்றது.

குறிப்பு 3: F-ன் மீது அமைந்த அருபவெக்டர் வெளியை, F-ன் மீது அமைந்த ஒன்றூடான மாட்யூல் (unitary module over F) என்றும் கூறுவர். F-என்ற களத்திற்குப் பதிலாக பெருக்கல் அலகு உள்ள வளையத்தை எடுத்துக்கொண்டால் அதன்மீது அமைந்த அருபவெக்டர் வெளியை ஒன்றூடான R-மாட்யூல் (unitary R-module) என அழைக்கின்றோம்.

சில எடுத்துக்காட்டுகள்:

1. F-என்ற களத்தின்மீது அமைந்த எல்லா வெக்டர் வெளிகளும் அருபவெக்டர் வெளிக்கு எடுத்துக்காட்டுகளாகும். குறிப்பாக V_n (F) ஒரு அருபவெக்டர் வெளியாகும்.

2. ஒவ்வொரு களம் F-ம் அக்களத்தில் வரையறுக்கப்பட்ட கூட்டல், பெருக்கல் செயல்களின்கீழ் அக்களத்தின்மீது அமைந்த அருபவெக்டர் வெளியாகும்.

3. S-என்ற வெறுமையற்றக் கணத்திலிருந்து F-என்ற களத்திற்குச் செல்லும் எல்லா சார்புகளையும் (fns. from a non empty set S to a field F) கொண்ட கணம் V-ல் சார்புகளிடையே கூட்டலும், எண்ணியால் சார்புகளைப் பெருக்குதலும் பின்வரும் முறையில் வரையறுக்கப்படுகிறது :-

f, g என்பன V-ல் யாதானுமிரு சார்புகளாகவும், λ என்பது F-ல் யாதானுமொரு உறுப்பாகவும் (எண்ணி) இருந்தால் S-ல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பு x-க்கும் $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$; $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$ ஆகும். V-என்பது F-ன் மீது அமைந்த அருபவெக்டர் வெளி என நிறுவலாம்.

4. எ-கா. 3-லிருந்து குறிப்பாகச் சில எடுத்துக்காட்டு களைப் பெறலாம். $(0, 1)$ என்ற அடைத்த இடைவெளியில் (closed interval) உள்ள மெய்யெண்களால் அமைந்த கணத்தை S-ஆகவும், மெய்யெண்களத்தை F-ஆகவும் கொண்டால் $[0, 1]$ என்ற இடைவெளியில் வரையறுக்கப்பட்ட எல்லா தொடர் மெய் யெண் சார்புகளும் (real continuous functions) மெய்யெண்களத் தின் மீது ஒரு அரூபவெக்டர் வெளியை அமைக்கும். இதே போன்று $[0, 1]$ என்ற இடைவெளியில் வரையறுக்கப்பட்ட எல்லா வகைக்கெழுக் காணத்தக்கச் சார்புகளும் (differentiable functions) மெய்யெண்களத்தின்மீது ஒரு அரூபவெக்டர் வெளியை அமைக்கும்.

5. சிக்கலெண் குணகங்களைக் கொண்ட x எனும் மாறியில் எல்லா பல்லுருப்புக் கோவைகளையும் கொண்டு அமைந்த கணம் $C(x)$-ல் கோவைகளிடையே கூட்டலையும், கோவைகளைச் சிக்க லெண்களால் பெருக்கலையும் வழக்கமான முறையில் வரையறுத் தால், $C(x)$ என்பது இச்செயல்களின்கீழ் சிக்கலெண்களத்தின் மீது அமைந்த அரூபவெக்டர் வெளியாகும். C-யில் உள்ள பூச்சியத்திற்கு சர்வசமமான பல்லுறுப்புக் கோவையே $C(x)$-ல் கூட்டல் அலகு ஆகும் (polynomial identically zero). இதுபோல் R-என்பது மெய்யெண்களமெனின் $R(x)$-ம் அரூபவெக்டர் வெளி யாகும்.

6. n என்பது ஒரு மிகை முழு எண் $(n \geqslant 1)$ என்றால் சிக்க லெண் குணகங்களைக் கொண்ட x எனும் மாறியில் $(n-1)$க்குச் சமமான, அல்லது குறைவான படியைக் (degree) கொண்ட எல்லா பல்லுறுப்புக் கோவைகளையும், பூச்சிய எண்ணிற்கு முற்றிலும் சமமானக் கோவையையும் கொண்டு அமைந்த $P_n(C)$ என்ற கணம், கோவைகளின் கூட்டல், சிக்கலெண்களால் கோவைகளைப் பெருக்குதல் என்ற செயல்களின்கீழ் சிக்கலெண் களத்தின்மீது அமைந்த ஒரு அரூபவெக்டர் வெளியாகும். (இங்கு சிக்கலெண்களத்திற்குப் பதிலாக மெய்யெண்களத் தையும் எடுத்துக்கொள்ளலாம்)

7. எல்லா சிக்கலெண்களையும் கொண்ட கணம் C-யில் சிக்கலெண்களிடையே கூட்டல், வழக்கமான முறையில் வரை யறுக்கப்பட்டு மெய்யெண்ணால் சிக்கலெண்ணைப் பெருக்குதலும் வழக்கமான முறையில் வரையறுக்கப்பட்டால் C-என்பது மெய் யெண்களத்தின்மீது அமைந்த அரூபவெக்டர் வெளியாகும். இதனை $V_1(C)$ என எழுதலாம். இதேபோல் எல்லா மெய்

யெண்களையும் கொண்ட கணம் R ஐ விகிதமுறு எண்கணத்தின் மீது அமைந்த அரூபவெக்டர் வெளியாகக் கருதலாம்.

8. யாதானுமொருகளம் F-லிருந்து உறுப்புகளைக் கொண்டு அமைந்த m நிரைகளும் n நிரல்களும் கொண்ட எல்லா $m \times n$ அணிகளையும் கொண்டுள்ள கணம் அணிகளின் கூட்டல், எண்ணிகளால் பெருக்கல் என்ற செயல்களின்கீழ் F-ன் மீது ஒரு அரூபவெக்டர் வெளியை அமைக்கின்றது.

§ 1·3. தேற்றம் :

அரூபவெக்டர் வெளி ஒவ்வொன்றிலும் ஒற்றைத்தன்மையுடைய கூட்டல் அலகு ஒன்று உண்டு.

நிரூபணம் :

F என்ற களத்தின்மீது அமைந்த அரூபவெக்டர் வெளி Vஐ எடுத்துக்கொள்வோம். § 1·2. நிபந்தனை (iii) ன்படி V-ல் ஏதாவது ஒரு உறுப்பு A-யை எடுத்துக்கொண்டால்,

$\therefore$ $A+K=A$ என்ற சமன்பாட்டில் K-ன் தீர்வு V-ல் உள்ளது. அதனை 0 என்று குறிப்போம்.

$\therefore \quad A+0=A \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

V-ல் யாதானுமொரு உறுப்பு Xஐ எடுத்துக்கொள்வோம்.

$A+K=X$ என்ற சமன்பாட்டில் K-க்கு V-ல் ஒரு தீர்வு உண்டு. அதனை Y எனக் கொள்வோமானால்

$A+Y=X \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

இப்பொழுது $X+0=(A+Y)+0$ [(2) லிருந்து]
$=(Y+A)+0$ (பரிமாற்று விதி)
$=Y+(A+0)$ (சேர்ப்பு விதி)
$=Y+A$ [(1) லிருந்து]
$=A+Y=X$

$\therefore$ V-ல் எந்த ஓர் உறுப்பு X-க்கும் $X+0=X$ ஆகும். V-ல் உள்ள இந்த உறுப்பு 0ஐ பூச்சிய உறுப்பு என்போம். இது V-ல் வரையறுக்கப்பட்ட கூட்டல் செயலுக்கு அலகாகும்.

மேலும் V-ல் வேறு எந்த உறுப்பு $0'$-ம் $X+0'=X$ என்றவாறு இருந்தால், $0+0'=0$ ($0'$ பூச்சிய உறுப்பு)

$$0'+0=0' \quad (0 \quad ,, \quad ,, \quad)$$

ஆனால் $0+0'=0' + 0$ எனவே $0=0'$ ஆகும்.

(அ-து) இக்கூட்டல் அலகு 0 ஆனது ஒற்றைத்தன்மை (Unique) உடையதாகும்.

குறிப்பு **1**: பூச்சிய உறுப்பு மட்டும் கொண்ட ஒருகணம் எந்த ஒரு களத்தின்மீதும் அருபவெக்டர் வெளியாகும். இதனை வெளிப்படை அருபவெக்டர் வெளி (trivial abstract vector space) என்போம்.

குறிப்பு **2**: பூச்சிய எண் 0, களம் F-ல் உள்ள கூட்டல் அலகு 0, F-ன் மீது அமைந்த அருபவெக்டர் வெளியில் உள்ள பூச்சிய உறுப்பு 0, இவற்றிற்கிடையே உள்ள வேறுபாட்டை நன்கு உணரவேண்டும்.

§ 1·4. தேற்றம்:

கூட்டலின் நீக்கல் விதி (Cancellation law of addition)

F என்ற களத்தின் மீது அமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-ல் $A, X, B, Y,$ என்பன,

(i) $A+X=B+X$ என்றமையுமானால் $A=B$ ஆகும்.

(ii) $Y+A=Y+B$,, ,, ,,

நிரூபணம் :

§ 1·2 நிபந்தனை (iii)-ன்படி, $X+K=0$ என்ற சமன்பாட்டில் K-ன் தீர்வு V-ல் உள்ளது. அதனை Y என்போம். அப்படியானால்,

$$X+Y=0 \;\ldots, (1)$$

தரவின் படி $\quad A+X=B+X$

இரு பக்கமும் வலப்புறத்தில் Y யைக்கூட்ட

$$(A+X)+Y=(B+X)+Y$$
$$ie\;\; A+(X+Y)=B+(X+Y)$$
$$ie\;\; A+0=B+0$$

$\therefore\;\; A=B.\;$ (அ-து) $\;A+X=B+X \Longrightarrow A=B$

(ii) $Y+A = Y+B$ எனின் கூட்டல் பரிமாற்றுவிதியின்படி
$A+Y = B+Y$

$\therefore$ (1) லிருந்து $A=B$ ஆகும்.

§ **1·5.** தேற்றம் :

F என்ற களத்தின் மீது அமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-ல் X, Y என்பன யாதானுமிரு உறுப்புகளாயின் $Y+K=X$ என்ற சமன்பாட்டில் K-க்கு V-ல் ஒற்றைத்தீர்வு மட்டுமே உண்டு.

நிருபணம் :

§ 1·2 நிபந்தனை (iii)-ன்படி

$Y+K=X$ என்ற சமன்பாட்டில் K-க்கு V-ல் ஒரு தீர்வு உண்டு. அதனை Z என்று குறிப்போம். அப்படியானல், $Z \in V$. மேலும்,

$Y+Z = X$ ... (1)

$Y+K=X$-ல் K-க்கு V-ல் உள்ள மற்றொரு தீர்வு Z' என்போம். அப்படியானல், $Z' \in V$. மேலும்,

$Y+Z' = X$ ... (2)

(1), (2) இவற்றிலிருந்து, $Y+Z = Y+Z'$

$\therefore Z=Z'$

எனவே K-க்கு V-ல் ஒரே ஒரு தீர்வு மட்டுமே உண்டு.

குறிப்பு: $K+Y=Y+K$ ஆதலால் மேற்கூறிய தேற்றம் $K+Y=X$ என்ற சமன்பாட்டிற்கும் பொருந்தும்.

§ **1·6.** $Y+K=X$ என்ற சமன்பாட்டில் K-க்கு V-ல் உள்ள ஒரே ஒரு தீர்வை $X-Y$ என்று கூறுவோம். (அ-து) $X-Y \in V$

$Y+(X-Y) = X$

§ **1·7.** எதிர்மறை உறுப்பு (Inverse element)

F என்ற களத்தின் மீது அமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-ல் X என்பது யாதானுமொரு உறுப்பாகவும் 0 என்பது பூச்சிய உறுப்பாகவும் இருக்கட்டும். $X+K=0$ என்ற சமன்பாட்டில் K-க்கு V-ல் உள்ள ஒற்றைத்தீர்வு $0-X$ அல்லது சுருக்கமாக $-X$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. $\therefore -X \in V$, $X+(-X) = 0$. $-X$ என்பது X-ன் கூட்டல் எதிர்மறை (additive inverse)

எனப்படும். இக்கூட்டல் எதிர்மறை வரையறையின்படி ஒற்றைத் தன்மை உடையதாகும்.

குறிப்பு : V-ல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பிற்கும் ஒரு கூட்டல் எதிர்மறை உறுப்பு உண்டு. அது V-யிலேயே உள்ளது. மேலும், ஓர் உறுப்பை அதன் எதிர்மறையோடு கூட்ட பூச்சிய உறுப்பு 0 கிடைக்கின்றது.

§ **1·8**. வரையறை § 1·2 நிபந்தனை (iii) ஐ உபயோகித்து ஒரு அருபவெக்டர் வெளியில் ஒரே ஒரு கூட்டல் அலகும், ஒவ்வொரு உறுப்பிற்கும் ஒரே ஒரு எதிர்மறை உறுப்பும் உண்டு என நிறுவி யுள்ளோம். நிபந்தனை (iii), (i) ஆகியவற்றை நீக்கி விட்டு கூட்டல் உறுப்பு, எதிர்மறை உறுப்பு ஆகியவற்றை வரையறை யாகக் கொண்டு இவற்றிலிருந்து (i), (iii), § 1.4 ஆகியவற்றை நிறுவலாம்.

குறிப்பு: § 1·2ம் § 1·8ம் சரிநிகர் என்பது தெளிவு. இனி வரும் பகுதிகளில் வரையறை § 1·2-யே எடுத்துக்கொள்கிறோம்.

§ 1·9. தேற்றம் :

F என்ற களத்தின்மீது அமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-ல் X என்பது யாதானுமொரு உறுப்பாகவும் 0 என்பது V-ல் பூச்சிய உறுப்பாகவும் 0 என்பது F-ன் கூட்டல் அலகாகவும், $\alpha \in F$ ஆகவும் இருந்தால், (i) $0 \cdot X = 0$ எனவும் (ii) $\alpha \cdot 0 = 0$ எனவும் நிறுவுக.

நிரூபணம் :

$X \in V$, $\alpha \in F$ ஆதலால், § 1· 2., (v) ன் படி

$$\alpha \cdot X + 0 \cdot X = (\alpha + 0) X$$
$$= \alpha X + 0 \qquad (\because \alpha + 0 = \alpha)$$
$$= \alpha X$$

$\therefore$ கூட்டலின் நீக்கல் விதிப்படி $0 \cdot X = 0$

மேலும், $\alpha \cdot X + \alpha . 0 = \alpha (X + 0)$
$$= \alpha X + 0$$
$$= \alpha X$$
$$\therefore \alpha . 0 = 0$$

§ 1·10. தேற்றம் :

F என்ற களத்தில் α, β இரு உறுப்புகளாகவும், F-ன் மீது அமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-ல் X, Y என்பன உறுப்பு களாகவும் இருந்தால்,

(i) $X-Y = X+(-Y)$

(ii) $(-1)X = -X$ (-1 என்பது Fன் பெருக்கல் அலகின் கூட்டல் எதிர்மறை)

(iii) $-(-X) = X$

(iv) $(-\alpha)X = -\alpha X$

(v) $\alpha(X-Y) = \alpha X - \alpha Y$

(vi) $(\alpha-\beta)X = \alpha X - \beta X$

(vii) $\alpha X = 0$ எனின் $\alpha=0$ அல்லது $X=0$ அல்லது இவ்விரண்டும் உண்மை, என நிறுவுக.

நிரூபணம்:

(i) $Y+(-Y) = 0$ என அறிவோம்

$\therefore\ X+[Y+(-Y)] = X+0 = X$

ie $X+[(-Y)+Y] = X$

ie $[X+(-Y)]+Y = X$

ie $Y+[X+(-Y)] = X$

$\therefore\ Y+K=X$ என்ற சமன்பாட்டில் $X+(-Y)$ என்பது Kக்கு Vல் உள்ள ஒரு தீர்வாகும். ஆனுல் $Y+K=X$ என்ற சமன்பாட்டில் Kக்கு Vல் ஒற்றைத்தீர்வுதான் உண்டு அதனை $X-Y$ எனக் குறிப்போம்.

$$\therefore\ X+(-Y) = X-Y$$

(ii)
$$\begin{aligned} X+(-1)X &= 1\cdot X+(-1)X \\ &= [1+(-1)]\,X \\ &= 0\cdot X = 0 \end{aligned}$$

$\therefore\ X+K=0$ என்ற சமன்பாட்டில் $(-1)X$ என்பது Kக்கு Vல் உள்ள ஒற்றைத்தீர்வாகும். இதனை $(-X)$ என வரையறுத்துள்ளோம்.

$$\therefore\ (-1)X = -X$$

(iii)
$$\begin{aligned} -(-X) &= -1(-X) \\ &= -1[(-1)X] \\ &= (-1)(-1)X \\ &= 1\cdot X \quad (\because F\text{ல் } (-1)(-1)=1) \\ &= X \end{aligned}$$

(iv) $(-\alpha)X = -\alpha X$ என நிறுவுதல் மாணவர்களுக்குப் பயிற்சியாக விடப்படுகிறது.

(v) $\alpha\,(X-Y) = \alpha\,[\,X+(-Y)\,]$
$= \alpha\,X+\alpha\,(-Y)$
$= \alpha\,X+[\,\alpha\,(-1)\,]\,Y$
$= \alpha\,X+(-\alpha)\,Y$
$= \alpha\,X-\alpha Y$

(vi) $(\alpha-\beta)\,X=[\alpha+(-\beta)]\,X$
$=\alpha\,X+(-\beta)\,X$
$=\alpha\,X-\beta\,X$

(vii) $\alpha\,X=0$ என்பது கொள்கை.

$\alpha\neq 0$ என்க. அப்படியானால் $\frac{1}{\alpha}$ம் Fல் இருக்கும். மேலும் $\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1$ ஆகும்.

$$\therefore X=1\cdot X=(\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha)\,X=\frac{1}{\alpha}\,(\alpha\,X)=\frac{1}{\alpha}\cdot 0=0$$

$\therefore X=0$ ஆகும்.

$\alpha=0$ என்றால் நிரூபிக்கவேண்டியது ஒன்றுமில்லை. $X=0$ ஆகவும் இருந்தால் $\alpha=0$, $X=0$ ஒன்றாகும்.

குறிப்பு: $\alpha\neq 0$, $X\neq 0$ என்றால் $\alpha\,X\neq 0$ என நிறுவலாம்.

பயிற்சி 2

1. F என்ற களத்தின்மீது அமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-ஆகும்; $X, Y, Z\in V$. 0 ஆனது V-யில் கூட்டல் அலகாகவும், $\alpha, \beta\in F$ என்றும் இருந்தால்,

(i) $X-Y=-(Y-X)$
(ii) $X-(Y-Z)=(X-Y)+Z$
(iii) $X-Y=Z\Longrightarrow X=Y+Z$
(iv) $-0=0$
(v) $Y+(X-Y)=X$
(vi) $\alpha\,X=\beta X,\ X\neq 0\Longrightarrow\alpha=\beta$
(vii) $\alpha\,X=\alpha Y,\ \alpha\neq 0\Longrightarrow X=Y$
(viii) $\alpha\,X=0,\quad X\neq 0\Longrightarrow\alpha=0$

2. ஒரு களத்தின்மீது அமைந்த ஒரே ஒரு உறுப்பை மட்டுங்கொண்ட வெக்டர் வெளி ஒன்றே ஒன்றுதான் உண்டு என நிறுவுக.

3. § 1.2 எடுத்துக்காட்டுகள் 3, 4, 5, 6 ஆகியவைகளில் வரையறுக்கப்பட்ட கணங்கள் அருபவெக்டர் வெளிக்கான நிபந்தனைகள் அனைத்தையும் நிறைவு செய்கின்றன என நிறுவுக.

4. F என்ற களத்தின்மீது வரையறுக்கப்பட்ட சார்புகளைக் கொண்ட பின்வரும் கணங்கள் F-ன் மீது அருபவெக்டர் வெளியை அமைக்குமா எனச் சோதிக்கவும்.

(i) $V_1 = \{f(\alpha) = 0$ என்ற முறையில் F-ன் மீது அமைந்த சார்புகள் ; α ஆனது F-ல் நிலையான உறுப்பு$\}$

(ii) $V_2 = \{f\ (0) = f\,(1)$ என்ற முறையில் F-ன் மீது அமைந்த சார்புகள், $0, 1$ என்பன முறையே F-ன் கூட்டல், பெருக்கல் அலகுகள்$\}$

5. X என்பது ஒரு கணமாகவும், $P\,(X)$ என்பது F-ன் படிக்கணமாகவும் (power set of X) இருக்கட்டும். தகுந்த முறையில் $P\,(X)$-ல் ஒரு ஈருறுப்புச் செயலியையும், Z_2-ல் உள்ள உறுப்புகளால் $P\,(X)$-ன் உறுப்புகளைப் பெருக்குதலையும் வரையறுத்து $P\,(X)$ என்பது Z_2-ன் மீது ஒரு அருபவெக்டர் வெளியை அமைக்குமென நிறுவுக.

6. பின்வருவன அருபவெக்டர் வெளியை அமைக்குமா எனச் சோதித்தறிக.

(i) விகிதமுறு எண்களம் Q-ன் மீது முழு எண் அரங்கம் Z.

(ii) Z_p என்ற (p பகா எண்) களத்தின்மீது முழு எண் அரங்கம் Z.

7. அருபவெக்டர் வெளிக்கான நிபந்தனை 7ஐ மற்ற நிபந்தனைகளிலிருந்து நிறுவ முடியாது என அறிக.

8. V என்பது கூட்டல் பரிமாற்றுக் குழு ஆகும். மேலும், V-ஆனது Z_5 மீது ஒரு அருபவெக்டர் வெளியை அமைக்குமானால் V ஆனது Z_3 மீது ஒரு அருபவெக்டர் வெளியை அமைக்காது என நிறுவுக.

2. ஒருபடிச்சேர்வுகளும், உருவாக்கிகளும்

(Linear Combinations and Generators)

§ 2·1. ஒருபடிச்சேர்வு

F என்ற களத்தின்மீது அமைந்த அருபவெக்டர் வெளி Vஐ எடுத்துக்கொள்வோம். $x_1, x_2, \ldots, x_r$ என்பன V-ல் உள்ள உறுப்புகளாகவும் $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ என்பன F-ல் உள்ள யாதானும் r எண்ணிகளாகவும் இருந்தால், $X = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_r x_r$ என்றவாறு அமைந்த V-ல் உள்ள உறுப்பு X ஆனது $x_1, x_2, \ldots x_r$ களின் ஒருபடிச்சேர்வு எனப்படும்.

குறிப்பு 1: குறிக்கணம் I (index set) ஒன்று கொடுக்கப்பட்டதாகக் கொள்வோம். I-ல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் V-ல் ஓர் உறுப்பு X_i இருந்தால் $\{X_i\}$ என்ற கணம் கிடைக்கின்றது. I என்பது முடிவுள்ள கணமாக இருந்தால் $\Sigma_i \lambda_i x_i$, $(\lambda_i \in F)$ என்பது X_i-க்களின் ஒருபடிச்சேர்வு ஆகும்.

I என்பது வெறுமைக் கணமானல் (empty set) என்ன நிகழும்? அப்பொழுது $\{X_i\}$-ம் வெறுமைக் கணமாகின்றது. இந் நிலையில் ΣX_i என்பது வெறுமைக் கூட்டலெனவும் (empty sum), அதன் மதிப்பு பூச்சிய உறுப்பு 0 எனவும் வரையறுக்கப்படும்.

(அ–து) $\Sigma X_i = 0$

ஆதலால், V-ன் பூச்சிய உறுப்பு 0, V-ன் உள்ளடங்கு கணமான (subset) வெறுமைக்கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் ஒருபடிச்சேர்வு ஆகும். மேலும் V-ல் பூச்சிய உறுப்பு மட்டுந் தான் இத்தகைய பண்பைக் கொண்டுள்ளது.

குறிப்பு 2: V-ல் எந்த r உறுப்புகள் கொடுத்தாலும் அவற்றின் ஒருபடிச்சேர்வாக 0ஐ எழுதலாம்.

குறிப்பு 3: $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i$-ல் உள்ள $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r$ க்களில் குறைந்தபட்சம் ஒரு எண்ணியாவது பூச்சியமில்லாதிருந்தால், இச்சேர்வை வெளிப்படை அல்லாது ஒருபடிச் சேர்வெனவும் (non trivial linear combination) எல்லா λ_i களும் $(i=1, 2, \ldots r)$ பூச்சிய மானல் அதை வெளிப்படை (Trivial) ஒருபடிச்சேர்வெனவும் அழைப்போம்.

§ 2.2. அருபவெக்டர் வெளியின் உருவாக்கிகள் (Generators of an abstract vector space)

F என்ற களத்தின்மீது அமைந்த ஒரு அருபவெக்டர் வெளி V-ல் உள்ள எந்த ஓர் உறுப்பையும் V-ல் உள்ள $x_1, x_2, \ldots x_r$ என்ற r உறுப்புகளின் ஒருபடிச்சேர்வாகக் கூறமுடியுமானல் $x_1, x_2, \ldots x_r$ என்பனவற்றை V-ன் உருவாக்கிகள் எனவும் V ஆனது $x_1, x_2, \ldots x_r$ களால் உருவாக்கப்படுகிறது (spanned or generated) எனவும் கூறுவோம்.

சில எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. எல்லா சிக்கலெண்களையும் கொண்ட கணம் C ஆனது மெய்யெண் களத்தின்மீது ஒரு அருபவெக்டர் வெளியை அமைக்கின்றது. இவ்வெளியில் உள்ள $1, i$ என்ற இரு உறுப்புகள் இவ்வெளியின் உருவாக்கிகள் ஆகும். (அத் II, § 1.2, 7)

2. சிக்கலெண் களத்தின்மீது அருபவெக்டர் வெளியை அமைக்கும் P_n என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் கொண்ட அருபவெக்டர் வெளியில் $\{1, x, \ldots. x^{n-1}\}$ என்ற கணம் உருவாக்கிக் கணமாகும். (அத் II, § 1.2, 6)

3. F என்ற களத்தின்மீது அமைந்த எல்லா $m \times n$ அணிகளாலும் அமைக்கப்பட்ட வெக்டர் வெளியில் $\left\{ E_{ij}, \begin{matrix} i=1, 2, \ldots m \\ j=1, 2, \ldots n \end{matrix} \right\}$ என்ற mn உறுப்புகளைக்கொண்ட கணம் உருவாக்கிக் கணமாகும். இங்கு E_{ij} என்ற அணி ij^{th} இடத்தில் 1-ம், பிற இடங்களில் 0-ம் கொண்டது.

4. $\dfrac{d^2 x}{dt^2} + \mu x = 0$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை எடுத்துக்கொள்ளவும் (μ மிகை மெய்யெண்). இதற்கு

முடிவிலி (infinite) தீர்வுகள் உள்ளன. அத்தீர்வுகளைக் கொண்ட கணம், மெய்யெண்களத்தின்மீது ஒரு அருபவெக்டர் வெளியை அமைக்கின்றது எனவும், அதற்கு $\{\text{Cos}\sqrt{\mu}\,x, \text{Sin}\sqrt{\mu}\,x\}$ என்பது உருவாக்கிக் கணமெனவும் நிறுவலாம்.

§ 2·3. தேற்றம் :

F என்ற களத்தின்மீது அமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-க்கு $X_1, X_2, \ldots X_r$ என்பன உருவாக்கிகள். $Y_1, Y_2, \ldots, Y_l$ என்பன V-ல் உள்ள உறுப்புகளெனின், $\{X_1, X_2, \ldots X_r, Y_1, Y_2 \ldots Y_l\}$ என்ற கணமும் V-யை உருவாக்கும் என நிறுவுக.

நிரூபணம் :

$\because X_1, X_2, \ldots, X_r$ என்பன V-யை உருவாக்குவதாலும் $Y_j \in V$, $(j=1, 2, \ldots l)$ ஆதலாலும் § 2.2-ன்படி,

$$Y_j = \sum_{i=1}^{r} \lambda_{ji}\, X_i \begin{pmatrix} \lambda_{ji} \in F, \ j=1, 2, \ldots l \\ i=1, 2, \ldots r \end{pmatrix} \text{ ஆகும்.}$$

X என்பது V-ல் யாதானுமொரு உறுப்பாக இருக்கட்டும்.

$$X = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i \ (\lambda_i \in F) \text{ என எழுதலாம்.}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \left[\lambda_i - \sum_{i=1}^{l} \lambda_{ji} \right] X_i + Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_l$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \mu_i X_i + \sum_{i=1}^{l} V_i Y_j \left[\mu_i = \lambda_i - \sum_{j=1}^{l} \lambda_{ji} ; V_j = 1 \right]$$

$\therefore$ V-ல் உள்ள எந்த ஓர் உறுப்பு X-ஐயும் $X_1, X_2, \ldots, X_r, Y_1, Y_2, \ldots, Y_l$ களின் ஒருபடிச்சேர்வாக எழுதமுடியும்.

எனவே $X_1, X_2, \ldots, X_r, Y_1, \ldots, Y_l$ என்பன V-யை உருவாக்குகின்றன.

குறிப்பு 1: ஒரு அருபவெக்டர் வெளியை, அதிலுள்ள, அதன் உருவாக்கிக் கணத்தின் உள்ளடங்குக் கணங்களும் (supersets of the generating set) உருவாக்கும். எனவே ஒரு அருபவெக்டர் வெளியில் ஒன்றிற்கும் மேற்பட்ட பல உருவாக்கிக் கணங்கள் உண்டு என அறிகிறோம். எடுத்துக்காட்டாக $V_3\,(R)$-ஐ $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ என்ற மூன்று வெக்டர்க்களைக்

கொண்ட கணமும் உருவாக்கும். மேலும், $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ என்ற கணமும் $V_3(R)$ஐ உருவாக்கும்.

§ 2.4. தேற்றம் :

F என்ற களத்தின்மீது அமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-யை $x_1, x_2, \ldots, x_r,\ y_1, y_2, \ldots, y_l$ என்பன உருவாக்குகின்றன. $y_1, y_2, \ldots, y_l$ என்பவை ஒவ்வொன்றும் $x_1, x_2, \ldots, x_r$ களின் ஒரு படிச்சேர்வானல் $x_1, x_2, \ldots, x_r$ கள் மட்டுமே V-யை உருவாக்கும் என நிறுவுக.

நிரூபணம் :

X என்பது V-ல் யாதானுமொரு உறுப்பாக இருந்தால்,

$$X = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j Y_j \ (\lambda_i, \mu_j \in F) \ldots\ldots(1)$$

தரவின்படி ஒவ்வொரு $y_1, y_2, \ldots, y_l$-ம் $x_1, x_2, \ldots, x_r$ களின் ஒருபடிசேர்வாதலால்,

$$Y_j = \sum_{i=1}^{r} \lambda_{ji} X_i \ (j = 1, 2, \ldots l,\ \lambda_{ji} \in F) \text{ என எழுதலாம்.} \ldots(2)$$

(1), (2) இவற்றிலிருந்து,

$$X = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j Y_j = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_{ji} X_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j (\lambda_{j1} X_1 + \lambda_{j2} X_2 + \ldots + \lambda_{jr} X_r)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \left(\lambda_i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j \lambda_{ji} \right) X_i$$

$$= \sum_{i=1}^{r} p_i X_i \left(p_i = \lambda_i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j \lambda_{ji},\ i = 1 \text{ முதல் } r \text{ வரை} \right)$$

$\therefore$ V-ல் உள்ள எந்த ஓர் உறுப்பு X-யையும் $x_1, x_2, \ldots x_r$ களின் ஒரு படிச்சேர்வாக எழுதலாமென அறிகிறோம்.

$\therefore$ $x_1, x_2, \ldots, x_r$ என்பன V-ன் உருவாக்கிகளாகும்.

§ 2·5. ஆதாரச் செயல்கள் (Elementary operations)

ஒரு களத்திலுள்ள உறுப்புகளில் செய்யப்படும் பின்வரும் செயல்கள் ஆதாரச்செயல்களெனப்படும். அவையாவன,

(i) இரு உறுப்புகளை இட மாற்றுதல்.

(அ-து) $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ என்பது தரப்பட்டுள்ள கணமெனின் X_i-யை மற்றெந்த உறுப்பு X_j-யோடும் $(i \neq j)$ இட மாற்றுதல் (interchange);

(ii) X_i என்ற எந்த ஓர் உறுப்பிற்கும் பதிலாக λX_i ஐ $(\lambda \neq 0 \in F)$ எடுத்துக் கொள்ளுதல் ;

(iii) X_i என்ற எந்த ஓர் உறுப்பிற்கும் பதிலாக $X_i + \mu X_j$ யை எடுத்துக் கொள்ளுதல் $(\mu \in F,\ i \neq j)$ ஆகும்.

§ 2·6. தேற்றம்:

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அரூபவெக்டர் வெளி V-யை $x_1, x_2, \ldots, x_r$ என்ற உறுப்புகள் உருவாக்குகின்றன. $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ என்ற கணத்தில் (உருவாக்கும் கணம்) உள்ள உறுப்புகளில் முடிவுள்ள எண்ணிக்கையளவில் (finite number) ஆதாரச் செயல்களை செய்வதன் மூலம் கிடைக்கும் கணமும் V-யை உருவாக்கும்.

நிரூபணம் :

தேற்றத்தை நிரூபிப்பதற்கு ஆதாரச் செயல்களில் ஒவ்வொரு வகையிலும் ஒரு செயலை எடுத்துக் கொண்டு, உருவாக்கிக் கணத்தில் இதன் விளைவு என்ன என்று கவனித்தால் போதுமானது.

வரையறையிலிருந்து, முதல் இரு செயல்களின் விளைவாகவும் கிடைக்கும் கணமும் உருவாக்கிக் கணமேயாகும் என்பது தெற்றென விளங்கும். எனவே இப்பொழுது மூன்ருவது செயலை எடுத்துக்கொள்வோம். பொதுத்தன்மைக்குப் பங்க மேற்படாதவாறு (without loss of generality), $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ என்ற கணத்தின் முதல் உறுப்பிற்குப் பதிலாக $x_1 + \mu x_j$ என்ற உறுப்பை எடுத்துக் கொள்ளலாம். இதனுல் $\{x_1 + \mu x_j, x_2, \ldots, x_r\}$ என்ற கணம் கிடைக்கும். X என்பது V-ல் எந்த ஓர் உறுப்பாக இருந்தாலும்,

$$X = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i \quad (\lambda_i \in F)$$ $\{\because x_1, x_2, \ldots, x_r$ எனபன V-ன் உருவாக்கிகள்$\}$

$$= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_r x_r$$
$$= \lambda_1 [x_1 + \mu x_j - \mu x_j] + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_j x_j + \dots + \lambda_r x_r$$
$$= \lambda_j (x_1 + \mu x_j) + \lambda_2 x_2 + \dots + (\lambda_j - \mu \lambda_1) x_j + \dots + \lambda_r x_r$$
$$= p_1 (x_1 + \mu x_j) + p_2 x_2 + \dots + p_j x_j + \dots + p_r x_r$$
(இங்கு $p_1 = \lambda_1, p_2 = \lambda_2, \dots, p_j = \lambda_j - \mu\lambda_1 \in F, \dots, p_r = \lambda_r$)

$\therefore$ X என்பது $x_1 + \mu x_j, x_2, \dots, x_j, \dots, x_r$ களின் ஒருபடிச் சேர்வாகும். எனவே இவை V-யை உருவாக்குகின்றன. இவ்வாறு உருவாக்கிக் கணத்திலுள்ள உறுப்புகளில் பல ஆதாரச் செயல்களை அடுத்தடுத்து நிகழ்த்தும் போது, ஒவ்வொரு நிலையிலும் கிடைக்கும் கணம் V-யை உருவாக்குவதால், இறுதியாகக் கிடைக்கும் கணமும் V-யை உருவாக்கும்.

பயிற்சி 3

1. V_3 (R)-ல் (R என்பது மெய்யெண்களம்) உள்ள $(1, 1, 0,)$ $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ என்ற மூன்று வெக்டர்களும் V_3 (R)-ன் உருவாக்கிகள் என நிறுவுக.

2. மெய்யெண்களம் R-ன் மீது வெக்டர் வெளியை அமைக்கும் எல்லா சிக்கலெண்களையும் கொண்ட வெக்டர் வெளி C-க்கு $(1+i)$, $(1-i)$ என்பன உருவாக்கிகள் என நிறுவுக.

3. P_3-ல் [அத் II, § 1·2, 6] $x^2+x, x^2-x, x+1$ என்ற மூன்று கோவைகளும் உருவாக்கிக் கணத்தை அமைக்குமென நிறுவுக.

4. ஓருறுப்புக் கொண்ட கணத்தை, உருவாக்கிக் கணமாகக் கொண்டுள்ள வெளிப்படையல்லாத அருபவெக்டர் வெளிக்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டு தருக.

5. மெய்யெண்களம் R-ன் மீது வெக்டர் வெளியை அமைக்கும் எல்லா 2×2 அணிகளும் $\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}$ என்பனவற்றால் உருவாக்கப்படுகின்றன எனக்காண்பி. இவ்வெக்டர் வெளிக்கு $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$ என்ற அணிகளும் உருவாக்கிகள் என நிறுவுக.

3. ஒரு அருபவெக்டர் வெளியின் உள்ளடங்கு வெளிகள்

(Subspaces of an abstract vector space)

§ **3·1.** வரையறை :

F என்ற களத்தின்மீது அமைந்த V என்ற அருபவெக்டர் வெளியில் உள்ள ஒரு வெறுமையற்ற உள்ளடங்கு கணம் (non empty subset) V-யில் வரையறுக்கப்பட்ட கூட்டல், Fல் உள்ள எண்ணிகளால் பெருக்குதல் என்ற செயல்களின்கீழ் V-ன் மீது ஒரு அருபவெக்டர் வெளியை அமைக்குமானல் அவ்வெளி, V-ன் உள்ளடங்கு வெளி (subspace of V) அல்லது உள்ளடங்கும் பல்லடுக்கு (submanifold) எனப்படும்.

குறிப்பு: அத் I, § 2.10 வரையறுக்கப்பட்ட வெக்டர் வெளி அருபவெக்டர் வெளியாதலால் அதன் உள்ளடங்கு வெளியும் மேற்கூறிய முறையிலேயே வரையறுக்கப்படுகிறது.

§ **3·2.** சில எடுத்துக்காட்டுகள்:

1. ஒவ்வொரு அருபவெக்டர் வெளி V-யிலும் அதன் பூச்சிய உறுப்பை மட்டுங்கொண்ட உள்ளடங்கு கணம் V-யின் ஒரு உள்ளடங்கு வெளியாகும். மேலும், அருபவெக்டர் வெளி V-யே அதன் உள்ளடங்கு வெளியாகும். இவையிரண்டையும் நாம் ஒரு அருபவெக்டர் வெளியின் வெளிப்படை (Trivial) உள்ளடங்கு வெளிகளென்போம்.

2. C என்று குறிக்கப்படும் சிக்கலெண்களத்தின் மீதமைந்த வெக்டர் வெளி $V_n(C)$-ல் S என்ற உள்ளடங்கு கணம்,

$S = \{ (x_1, x_2, ..., x_m) \mid x_1 = x_2 = ... = x_m = 0,$ m மிகை முழு எண் $\leqslant n\}$ என்றவாறு அமையுமானல் S ஆனது $V_n(C)$-ன் உள்ளடங்கு வெளியாகும்.

3. F என்ற களத்தின் மீது அமைந்த வெக்டர் வெளி $V_4(F)$-ல் $T=\{(0,\alpha,\beta,0) \mid \alpha,\beta\in F, 0$ என்பது F-ன் கூட்டலலகு$\}$ என்ற உள்ளடங்கு கணமும் $V_4(F)$-ன் உள்ளடங்கு வெளியாகும்.

4. சிக்கலெண் களத்தின் மீதமைந்த வெக்டர் வெளி $P_n(C)$-யை எடுத்துக்கொள்வோம் $(n\geqslant 1)$ $x_1, x_2, \ldots, x_m$ என்பவை யாதானும் m மெய்யெண்களாக இருக்கட்டும் $(m\leqslant n-1)$. $P_n(C)$-ல் ஒரு உள்ளடங்கு கணம் M ஆனது.

$M=\{$பல்லுறுப்புக்கோவைகள் $f(x) \mid f(x)$ என்பன $f(x_1) = f(x_2) = \ldots, = f(x_m) = 0$ என்றமைந்துள்ளன$\}$ என்றவாறு வரையறுக்கப்படுமானல், அது $P_n(C)$-ல் ஒரு உள்ளடங்கு வெளியாகும் என நிறுவலாம்.

5. மேலும் $P_n(C)$-ல் எல்லா மாருப் பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் கொண்ட (constant polynomials) உள்ளடங்கு கணமும் ஒரு உள்ளடங்கு வெளியை அமைக்கின்றது.

6. $P_n(C)$-ல் m அல்லது அதற்குக் குறைவான $(m\leqslant n-1)$ படியைக் கொண்ட எல்லா கோவைகளையும் பூச்சிய எண்ணிற்கு முற்றிலும் சமமான கோவையையும் கொண்டமைந்த $P_n(C)$-ன் மற்ருெரு உள்ளடங்கு கணம் ஒரு உள்ளடங்கு வெளியை அமைக்கின்றது.

7. அத் II, § 1.2, எ-கா. 5-ல் உள்ள $C(x)$ என்ற அரூப வெக்டர் வெளியில் எல்லா இரட்டைப்படைக் கோவைகளையும் கொண்ட கணமும், எல்லா ஒற்றைப்படைக் கோவைகளையும் கொண்ட கணமும், தனித்தனியே $C(x)$-ன் உள்ளடங்கு வெளிகளாகும். [இங்கு $f(x) = f(-x), \forall x \in C$ எனின் $f(x)$ இரட்டைப்படை எனவும், $f(x) = -f(-x), \forall x \in C$ எனின் $f(x)$ ஒற்றைப்படை எனவும் வரையறுக்கப்படுகிறது].

8. அத் II, § 1.2, எ-கா. 4-ல் உள்ள $[0, 1]$ என்ற இடைவெளியில் வரையறுக்கப்பட்ட எல்லா மெய்யெண் தொடர் சார்புகளாலும் (real continuous functions) மெய்யெண் களத்தின் மீது அமைக்கப்பட்ட அரூப வெக்டர் வெளியில், அதே இடைவெளியில் வரையறுக்கப்பட்ட மெய்யெண் வகைக்கெழுச் சார்புகளால் (real differentiable functions) மெய்யெண்களத்தின் மீது அமைக்கப்பட்ட அரூபவெக்டர் வெளி ஒரு உள்ளடங்கு வெளியாகும்.

§ 3.3. தேற்றம்:

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அரூபவெக்டர் வெளி V-ல் $x_1, x_2, \ldots, x_r$ என்ற உறுப்புகளின் எல்லா ஒருபடிச் சேர்வுகளையும் கொண்ட கணம் V-ன் உள்ளடங்கு வெளியாகும். மேலும் இவ்வெளியே $x_1, x_2, \ldots, x_r$ என்ற உறுப்புகளைக் கொண்ட V-ன் மிகச்சிறிய உள்ளடங்கு வெளியாகும்.

நிரூபணம்:

$x_1, x_2, \ldots, x_r$ களின் எல்லா ஒருபடிச் சேர்வுகளையும் கொண்ட கணம் M என்க.

(அ-து) $M = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots, + \lambda_r x_r \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ என்பன F-ல் மாறும் எண்ணிகள்$\}$ M ஆனது கூட்டலுக்கும், எண்ணியால் பெருக்குதலுக்கும் அடைப்புள்ளது என்பது வெளிப்படை.

$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r = 0$ (0 என்பது F-ன் கூட்டல் அலகு) என எடுத்துக்கொண்டால், V-ன் பூச்சிய உறுப்பு 0 ஆனது M-ல் உள்ளது எனக் கிடைக்கும். $X = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_r x_r$ என்பது M-ல் இருந்தால் $X' = (-\lambda_1) x_1 + (-\lambda_2) x_2 + \ldots + (-\lambda_r) x_r$ என்பதும் M-ல் இருக்கும். மேலும் X' என்பது X-ன் எதிர்மறை உறுப்பாகும்.

$\therefore$ M-ல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பிற்கும், எதிர்மறை M-லேயே உள்ளது.

M-ல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் V-யிலும் உள்ளதால் அவை அத் II, § 1.8-ல் உள்ள கட்டுப்பாடுகள் i, iv, v, vi, vii ஆகியவற்றை நிறைவு செய்யும். எனவே வரையறை அத் II § 1.8-ன் படி M ஒரு அரூபவெக்டர் வெளியை அமைக்கின்றது. $M \subset C$ ஆதலால் M ஆனது C-ன் உள்ளடங்கு வெளியாகும்.

M' என்ற C-ன் உள்ளடங்கு வெளி $x_1, x_2, \ldots x_r$ என்ற உறுப்புகளைக் கொண்டிருந்தால் இவற்றின் ஒவ்வொரு ஒருபடிச் சேர்வும் M'-ல் இருக்கும்.

(அ—து) M-ல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் M'-ல் இருக்கும்.

$\therefore \quad M \subset M'$

எனவே M என்பது $x_1, x_2, \ldots, x_r$ களைக் கொண்ட V-யின் மிகச் சிறிய உள்ளடங்கு வெளியாகும்.

குறிப்பு **1:** M என்பது $x_1, x_2, \ldots x_r$ களால் உருவாக்கப்படு கின்றது என்பது தெளிவு. இதனை $\{x_1, x_2, \ldots x_r\}$ என்ற கணத் தால் உருவாக்கப்படும் உள்ளடங்கு வெளி என்பர்.

குறிப்பு **2**: $X \in V, X \neq O$ எனின் X-ஆல் உருவாக்கப்பட்ட கணம் V-யின் உள்ளடங்கு வெளியாகும். இவ்வெளி X-ன் எல்லா எண்ணியால் பெருக்கல்கள் λX-யையும் கொண்டி ருக்கும்.

§ 3·4. தேற்றம் :

V என்பது F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அரூபவெக்டர் வெளியாகவும், S என்பது V-ன் வெறுமையற்ற உள்ளடங்கு கணமாகவும் இருக்கட்டும். S என்பது V-ல் வரையறுக்கப்பட்ட கூட்டலுக்கும், எண்ணியால் பெருக்கலுக்கும் அடைப்புள்ளதா யிருந்தால், S என்பது V-ன் உள்ளடங்கு வெளியாகும்.

நிரூபணம் :

S என்ற கணத்தில் பூச்சிய உறுப்பு மட்டும் இருந்தால் அது V-ன் உள்ளடங்கு வெளி என்பது வெளிப்படை.

Sல் பூச்சிய மில்லாத உறுப்பு X இருப்பதாகக் கொள்வோம். எண்ணியால் பெருக்கலுக்கு S அடைப்புள்ளதால் $0 \cdot X \in S$ (0 ஆனது F-ன் கூட்டல் அலகு) (அ-து) $0 \in S$. (-1) என்பது F-ல் உள்ள பெருக்கல் அலகின் எதிர்மறை. ஆனால் $(-1) \cdot X = -X \in S$. (அ-து) S-ல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பு X-ற்கும் கூட்டல் எதிர் மறை உறுப்பு $-X$ ஆனது S-ல் உண்டு.

$S \subset V$ ஆதலால், S-ல் உள்ள உறுப்புகள், அத் *II*, § 1·8-ல் உள்ள நிபந்தனைகள் *i, iv, v, vi, vii* ஆகியவற்றை நிறைவு செய் கின்றது.

$\therefore$ S ஆனது ஒரு அரூபவெக்டர் வெளியை அமைக்கின்றது. மேலும் $S \subset V$ ஆதலால், S ஆனது V-ன் உள்ளடங்கு வெளியாகும்.

§ 3·5. உள்ளடங்கு வெளிகளின் வடிவகணிதமுறை விளக்கம் (Geometrical interpretation of subspaces).

R என்பது மெய்யெண்களமானால் $V_3 (R)$ என்பது கனபரி மாண வெளியைக் குறிக்கும். கனபரிமாண வெளியில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியையும் $V_3 (R)$-ல் உள்ள ஒரே ஒரு வெக்டரால் குறிக்கலாம்.

ஒரு அருபவெக்டர் வெளியின் ஒவ்வொரு உள்ளடங்கு வெளியிலும் பூச்சிய உறுப்பு இருக்குமென்பதை அறிவோம். ஆதலால், $V_3(R)$-ன் ஒவ்வொரு உள்ளடங்கு வெளியும் வடிவகணிதத்தில் ஆதிவழிச் செல்லும் நேர்கோடுகள் அல்லது தளங்கள் ஆகும். மேலும், $V_3(R)$-ல் X என்ற வெக்டரை எடுத்துக்கொள்வோம். $X=0$ (பூச்சிய வெக்டர்) எனின் X-ஆல் உருவாக்கப்பட்ட உள்ளடங்கு வெளி பூச்சிய உறுப்பை மட்டும் கொண்டிருக்கும். வடிவகணிதத்தில் இவ் வெக்டர் ஆய ஆதியால் குறிக்கப்படுகிறது. $X \neq O$ எனின் X-ஆல் உருவாக்கப்பட்ட உள்ளடங்கு வெளி எல்லா எண்ணியால் பெருக்கல் $\lambda X (\lambda \in R)$ ஐயும் கொண்டிருப்பதால், வடிவகணிதத்தில் இவ்வெளி, ஆய ஆதியையும் X என்ற வெக்டரால் குறிக்கப்படும் புள்ளியையும் சேர்க்கும் நேர்கோடு ஆகும்.

X, Y என்பன பூச்சியமல்லாத வெக்டர்களாகவும் $X \neq \lambda Y$ என்றுமிருந்தால் இவற்றால் உருவாக்கப்படும் வெளி $\lambda X + \mu Y$ $(\lambda, \mu \in R)$ என்ற வெக்டர்களைக் கொண்டுள்ளது. வடிவகணிதத்தில் இவ் வெளி ஆதி வழியாகவும் X, Y-ஆல் குறிக்கப்படும் புள்ளிகள் வழியாகவும் செல்லும் தளமாகும்.

$V_n(R)$-ல் உள்ள ஒவ்வொரு வெக்டரும் n பரிமாண வடிவகணிதத்தில் ஒரு புள்ளியைக் குறிப்பதாகக் கொள்வோம். $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n), Y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $V_n(R)$-ல் யாதானுமிரு வேறுபட்ட வெக்டர்களாயிருந்தால் $X + tY$ (t என்பது R-ல் மாறும் எண்ணி) என்ற வெக்டர்கள், X, Y என்ற வெக்டர்களைக் குறிக்கும் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டை அமைக்கின்றது. இக் கோட்டை பொதுப்படுத்தப்பட்ட நேர்கோடு (generalised line) என வரையறுப்போம். X, Y, Z என்பவை $V_n(R)$-ல் யாதானும் மூன்று வேறுபட்ட சுயேட்சை (independent) வெக்டர்களைக் குறித்தால் $X + t_1 Y + t_2 Z$ (t_1, t_2 என்பன R-ல் மாறும் எண்ணிகள்) என்ற வெக்டர்கள் X, Y, Z என்ற வெக்டர்களைக் குறிக்கும் புள்ளிகளால் அமையும் தளத்தைக் குறிக்கின்றது. இத்தளத்தைப் பொதுப்படுத்தப்பட்ட தளம் (generalised plane) என்போம். $V_n(R)$-ல் உள்ள வெக்டர்களால் அமைக்கப்படும் எல்லா வெளிப்படுத்தப்பட்ட நேர்கோடுகளும் தளங்களும் உள்ளடங்கு வெளியை அமைக்காது. ஆதிவழிச் செல்லும் பொதுப்படுத்தப்பட்ட நேர்கோடுகளும், தளங்களும் மட்டுமே $V_n(R)$-ல் உள்ளடங்கு வெளிகளாகும்.

உள்ளடங்கு வெளிகளைப் பற்றி இன்னும் விரிவாகப் பின்னர் காண்போம்.

பயிற்சி 4

1. F என்ற களத்தின் மீது அமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V ல் M என்பது வெறுமையற்ற உள்ளடங்கு கணமாகும்.

(a) M ஆனது V-ன் உள்ளடங்கு வெளியாவதற்கு தேவையான (necessary) கட்டுப்பாடு "X, Y என்பன M-ல் யாதானுமிரு உறுப்புகளாக இருந்தால், இவற்றின் எல்லா ஒருபடிச்சேர்வுகளும் M-ல் இருக்கும்" என்பதென நிறுவுக.

(b) M ஆனது V-ல் உள்ளடங்குவதற்கு மற்றொரு தேவையான கட்டுப்பாடு "$X, Y \in M \Longrightarrow X-Y \in M, \lambda X \in M$ $(\lambda \in F)$ ஆகும்" எனக்காண்பி.

2. § 3·2 எ.கா 2 முதல் 8 வரை குறிப்பிடப்பட்டுள்ள உள்ளடங்கு கணங்கள், உள்ளடங்கு வெளிகளாகும் என நிறுவுக.

3. பயிற்சி 2ல் 6ஆவது கணக்கில் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள $P(x)$ என்ற அருபவெக்டர் வெளியில் X-ன் எல்லா முடிவுள்ள உள்ளடங்கு கணங்களையும் கொண்ட S என்ற கணம் ஒரு உள்ளடங்கு வெளியாகும் என நிறுவுக.

4. K என்ற களத்திலமைந்த $K(x)$ என்னும் அருபவெக்டர் வெளியில் { $K(x)$ என்பது K-ல் குணகங்களைக் கொண்ட எல்லா பல்லுறுப்புக் கோவைகளையும் கொண்ட கணம்}, K-ல் α என்ற மூலத்தை (Root)-க் கொண்ட எல்லாப் பல்லுறுப்புக் கோவைகளாலுமான கணம் ஒரு உள்ளடங்கு வெளியை அமைக்குமென நிறுவுக.

5. F என்ற களத்தின் மீதமைந்த எல்லா $m \times n$ அணிகளையும் கொண்ட அருபவெக்டர் வெளியில் எல்லா $m \times n$ மூலைவரை அணிகளைக் கொண்ட கணம் உள்ளடங்கு வெளியாகும் என நிறுவுக.

6. $V_n(C)$-ல் பின்வருபனவற்றில் எவை உள்ளடங்கு வெளிகள் என ஆராய்க.

(a) $S = \{ V_n(C)$-ல் உள்ள எல்லா வெக்டர்கள் $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $\mid X_i = 0, X_i \in C \}$

$T = \{ V_n(C)$-ல் உள்ள எல்லா வெக்டர்கள் $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $\mid x_1$ என்பது மெய்யெண்$\}$

$U=\{V_n(C)$-ல் உள்ள எல்லா வெக்டர்கள் $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
$\mid x_1=0$ அல்லது $x_2=0\}$

$V=\{V_n(C)$-ல் உள்ள எல்லா வெக்டர்கள் $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
$\mid x_1+x_2=0\}$

$W=\{$,, ,, $(x_1, x_2, \ldots x_n) \mid x_1+x_2=1\}$

$A=\{$,, ,, $(x_1, x_2, \ldots x_n) \mid 3x_1+4x_2=0\}$

$B=\{$,, ,, $(x_1, x_2, \ldots x_n) \mid ax_1-bx_2=1$
$a, b \in C\}$

7. சிக்கலெண் களம் Cன் மீதமைந்த $C(x)$ எனும் வெக்டர் வெளியில் [அத் II, § 1·2 எ.கா 5] பின்வருபனவற்றில் எவை உள்ளடங்கு வெளிகள் என ஆராய்க.

(a) படி நான்கு கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகள்

(b) $2f(0)=f(1)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைகள்

(c) $0 \leqslant x \leqslant 1$ எனின் $f(x) \geqslant 0$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைகள்

(d) $f(x)= f(1-x)$ என்றமைந்த பல்லுறுப்புக் கோவைகள்

(e) $f(1)= f(0)+1$ என்றமைந்த பல்லுறுப்புக் கோவைகள்

8. F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-ல் X, Y, Z என்ற உறுப்புகள் $X+Y+Z=O$ என்றவாறு அமைந்துள்ளன. X, Y என்ற இரு உறுப்புகளால் உருவாக்கப் பட்ட V-ன் உள்ளடங்கு வெளியும் Y, Z என்ற உறுப்புகளால் உருவாக்கப்பட்ட V-ன் உள்ளடங்கு வெளியும் ஒன்றுதான் என நிறுவுக.

9. $V_3(Z_2), V_2(Z_2)$ ஆகியவற்றின் உள்ளடங்கு வெளிகளைத் தனித்தனியே அட்டவணையிட்டுக் காட்டுக.

10. $V_3(R)$ல் பின்வரும் உள்ளடங்கு கணங்கள் உள்ளடங்கு வெளிகளாகுமென நிறுவுக. அவற்றிற்கு வடிவகணித முறையில் விளக்கம் தருக.

(a) $A=\{V_3(R)$-ல் உள்ள எல்லா வெக்டர்கள் (x_1, x_2, x_3)
$\mid x_1+2x_2+3x_3=0\}$

(b) $B=\{$,, ,, $(x_1, x_2, x_3) \mid x_1=x_2=x_3\}$

(c) $C=\{$,, ,, $(x_1, x_2, x_3) \mid x_1=2x_2\}$

(d) $D=\{$,, ,, $(x_1, x_2, x_3) \mid x_1=1\}$

11. F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அரூபவெக்டர் வெளி Vல் S என்பது ஒரு உள்ளடங்கு வெளியாகும். Vல் உள்ள உறுப்பு β ஆனது S-ல் இல்லை. ஆனால் $S \cup \alpha$ என்ற $(\alpha \in V)$ கணத்தால் உருவாக்கப்படும் உள்ளடங்கு வெளியில் β உள்ள தெனின் $S \cup \beta$ என்ற கணத்தால் உருவாக்கப்படும் உள்ளடங்கு வெளியில் α இருக்குமென நிறுவுக.

12. F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அரூபவெக்டர் வெளி V-ல் S என்பது ஒரு உள்ளடங்கு வெளியாகும். X என்பது $V-S$-ல் உள்ள உறுப்பாகும். T என்பது X-ஆல் உருவாக்கப்பட்ட உள்ளடங்கு வெளியைக் குறிக்குமானால் $S \cap T = 0$ என நிறுவுக.

13. ஒரு அரூபவெக்டர் வெளி V-ல் S, T என்பன முறையே α, β என்ற V-ல் உள்ள யாதானுமிரு உறுப்புகளால் தனித் தனியே உருவாக்கப்பட்ட உள்ளடங்கு வெளிகளெனின் $S \cap T \neq 0 \Longrightarrow S = T$ என நிறுவுக.

14. F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அரூபவெக்டர் வெளி V-ல் X, Y, Z என்பன $\alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0$, $\alpha \gamma \neq 0$ $(\alpha, \beta, \gamma \in F)$ என்று அமைந்துள்ளன எனின் X, Y என்ற இரு உறுப்புகள் உருவாக்கும் உள்ளடங்கு வெளியையே Y, Z என்ற இரு உறுப்புகளும் உருவாக்குமென நிறுவுக.

15. F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அரூபவெக்டர் வெளி V-ல் இரு உள்ளடங்கு வெளிகள் S, T என்பன V-ல் முடிவுள்ள ஒரே கணத்தால் உருவாக்கப்படுகின்றன என்றால் $S = T$ என நிறுவுக.

4. ஒருபடிச்சார்ந்த, சாரா நிலைகள்

(Linear Dependence and Independence)

§ 4·1. ஒருபடிச்சார்ந்த நிலை (Linear Dependence)

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-ல் உள்ள உறுப்புகள் $x_1, x_2, \ldots, x_r$ என்பனவற்றிற்கு $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_r x_r = 0$ என்றமையுமாறு $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ என்ற, எல்லாம் பூச்சியமல்லாத, F-ல் உள்ள எண்ணிகளாக இருந்தால் மட்டுமே, $x_1, x_2, \ldots, x_r$ என்பன **ஒருபடிச்சார்ந்த நிலையில் உள்ள உறுப்புகள்** (linearly dependent vectors) எனப் படும். V-ல் உள்ள உறுப்புகளையும் வெக்டர்கள் என்று அழைப் பது வழக்கமாதலால் இதையே **ஒருபடிச்சார்ந்த வெக்டர்கள்** என அழைப்பது மரபு.

§ 4·2. ஒருபடிச்சாரா நிலை (Linear Independence)

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-ல் உள்ள $x_1, x_2, \ldots, x_r$ என்ற உறுப்புகளின் எந்த வெளிப்படை யல்லாத ஒருபடிச்சேர்வும் 0-க்குச் சமமாக இல்லாதிருந்தால் மட்டுமே, இவற்றை உறுப்புகளாகக் கொண்ட முடிவுள்ள கணம் **ஒருபடிச்சாராக் கணம்** (linearly independent set) எனப்படும். இந்நிலையில் $x_1, x_2, \ldots, x_r$ என்பன ஒருபடிச் சாரா நிலையிலுள்ள உறுப்புகள் அல்லது ஒருபடிச்சாரா வெக்டர் கள் (linearly independent vectors) எனப்படும்.

$x_1, x_2, \ldots, x_r$ என்பன ஒருபடிச்சாரா வெக்டர்களாக இருக்கும்போது $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_r x_r = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 0$ ஆகும்.

குறிப்பு 1: $x_1, x_2, \ldots, x_r$ களின் வெளிப்படையான ஒரு படிச்சேர்வு மட்டுமே 0-க்குச் சமமாகும். வேறெந்த ஒருபடிச் சேர்வும் 0-க்குச் சமமானல் அதிலுள்ள எண்ணிகள் ஒவ்வொன் றும் 0 ஆகும்.

குறிப்பு 2: ஒருபடிச்சார்ந்த அல்லது சாரா நிலையென்பது வரிசையிடப்படாத உறுப்புகளின் (unordered set of elements) பண்பு ஆகும். (அ—து) $x_1, x_2, \ldots, x_r$ என்பன ஒருபடிச்சார்ந்த (சாரா) நிலையில் உள்ளன எனின் இவற்றின் எந்த ஒரு வரிசை மாற்றமும் (Permutation) ஒருபடிச்சார்ந்த (சாரா) நிலையில் இருக்கும்.

குறிப்பு 3: § 2.1 குறிப்பு (1) லிருந்து குறிக்கணம் I என்பது வெறுமைக் கணமானல் $\{x_i\}$ என்ற கணமும் வெறுமைக்கணமென்பது தெளிவு. ஒரு அருபவெக்டர் வெளியில் வெறுமைக் கணம், ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ள கணமென நிறுவலாம்.

நாம் ஒருபடிச்சார்ந்த, சாரா நிலைகளை முடிவுள்ள கணங்களுக்கே வரையறுத்துள்ளோம். இதையே முடிவிலிக் கணங்களுக்கும் விரித்துச் சொல்லலாம். F என்ற களத்தின் மீது அமைந்த V என்ற அருபவெளி முடிவிலி உறுப்புகளைக் கொண்ட கணமாக இருக்கட்டும். அதில் S என்ற முடிவிலாக் கணத்தின் ஒவ்வொரு உள்ளடங்கு கணமும் ஒருபடிச்சாரா நிலையிலிருந்தால் மட்டுமே S என்பது ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ளது என வரையறுக்கலாம். அவ்வாறில்லாவிடில் S என்பது ஒருபடிச்சார்ந்த கணமெனப்படும்.

குறிப்பு 4: ஒருபடிச்சார்ந்த நிலையும், சாரா நிலையும் ஒன்றுக்கொன்று வெவ்வேருகும் (mutually exclusive).

குறிப்பு 5: $1, i$ என்ற இரு எண்களை எடுத்துக்கொள்வோம். சிக்கலெண் களத்தை அதன் மீதே அமைந்த வெக்டர் வெளியாகக் கருதினல் அவ்வெளியில் $1, i$ என்பன ஒருபடிச்சார்ந்த நிலையில் உள்ளனவாகும். ($\because 1 + i \cdot i = 0$) ஆனல் சிக்கலெண் களத்தை மெய்யெண் களத்தின் மீதமைந்த வெக்டர் வெளியாகக் கருதினல் $1, i$ என்பன ஒருபடிச்சாரா நிலையில் உள்ளனவாகும். ஆதலால் உறுப்புகளின் ஒருபடிச்சார்ந்த, (சாரா) நிலையை அவ்வுறுப்புகள் எந்த களத்தின் மீதமைந்த வெக்டர் வெளியில் உள்ளது என்று அறிந்த பின்னரே கூறமுடியும்.

§ 4·3. சில எடுத்துக்காட்டுகள்:

1. F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளியில் பூச்சிய உறுப்பு மட்டும் கொண்ட கணம் ஒருபடிச்சார்ந்த நிலையிலுள்ள கணமாகும். பூச்சியமல்லா ஒரே ஒரு உறுப்பு மட்டுங் கொண்ட கணம் ஒருபடிச்சாரா கணமாகும்.

2. சிக்கலெண் களத்தின் மீது அருபவெக்டர் வெளியை அமைக்கும் எல்லா சிக்கலெண்களையும் கொண்ட கணம் $V_1(C)$-ல் எந்த இரு எண்கள் X, Y-யையும் கொண்ட கணமும் ஒருபடிச் சார்ந்த நிலையில் உளதாகும்.

ஏனெனில், $x=0=y$ எனின் $\{x, y\}$ ஒருபடிச்சார்ந்த நிலையிலுள்ளது என்பது வெளிப்படை. x, y களில் ஒன்றுவது பூச்சியமில்லாவிடில் $y\,x+(-x)\,y=0$ என்ற தொடர்பில் $y, (-x)$ என்ற எண்ணிகளில் ஒன்றுவது பூச்சியமில்லை. எனவே, $\{x, y\}$ ஆனது ஒருபடிச்சார்ந்த நிலையிலுள்ளது.

3. $V_n(F)$-ல் $E_1=(1, 0, \ldots, 0)$, $E_2=(0, 1, 0, \ldots, 0)$ $E_n=(0, 0, \ldots, 1)$ என்ற n வெக்டர்களும் ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ளன.

4. $V_3(R)$-ல் $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)$ என்பன ஒருபடிச்சார்ந்த வெக்டர்களாகும். மேலும், $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 2,)\}$ என்பது ஒருபடிச்சார்ந்த கணமாகும்.

5. சிக்கலெண் களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளி P_3-ல் (அத் II, § 1.2, 6) $f_1(x)=1+x$, $f_2(x)=x(x-1)$, $f_3(x)=-1-x^2$ என்ற மூன்று பல்லுறுப்புக் கோவைகளும் ஒருபடிச் சார்ந்த நிலையிலுள்ளன. ஆனால் $\Phi_1(x)=1$, $\Phi_2(x)=x$, $\Phi_3(x)=x^2$ என்பன ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ளன.

6. சிக்கலெண் களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளி $C(x)$-ல் (அத் II, § 1.2,5) $f_1(x)=x$, $f_2(x)=-1-x+x^2$, $f_3(x)=x^2-1$ என்பன ஒருபடிச்சார்ந்த நிலையிலுள்ளன ($\because f_1+f_2-f_3=0$) ஆனால், $\Phi_0(x)=1$, $\Phi_1(x)=x$, $\Phi_2(x)=x^2; \ldots, \Phi_n(x)=x^n, \ldots$ என்று வரையறுக்கப்பட்ட $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_n, \ldots$ என்ற முடிவிலி உறுப்புகளைக் கொண்ட கணம் ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ளது.

§ 4.4. வடிவகணித முறையில் விளக்கம் :

$V_3(R)$-ல் உள்ள ஒவ்வொரு வெக்டரும், கனபரிமாண வெளியில் ஒரு புள்ளியைக் குறிப்பதாகக்கொள்ளலாம். $V_3(R)$-ல் இரு வெக்டர்கள் ஒருபடிச்சார்ந்த நிலையில் உள்ளதெனின் வடிவ கணிதத்தில் அவ்விரு வெக்டர்கள் குறிக்கும் புள்ளிகளும், ஆதியும் ஒரே நேர்கோட்டில் இருக்கும். இதே போன்று ஆதியும், இருபுள்ளிகளும் வெளியில் ஒரே நேர்கோட்டிலிருந்தால் அவ்விரு புள்ளிகளைக் குறிக்கும் $V_3(R)$-ல் உள்ள வெக்டர்கள் ஒருபடிச்சார்ந்த நிலையில் உள்ளனவாக இருக்கும். $V_3(R)$-ல் மூன்று

வெக்டர்கள் ஒருபடிச்சார்ந்த நிலையில் இருப்பதற்குத் தேவை யான நிபந்தனை, அம்மூன்று வெக்டர்கள் குறிக்கும் புள்ளி களும் ஆதியும் ஒரே தளத்தில் அமைய வேண்டுமென்பதாகும்.

$V_3(R)$-ல் இரு வெக்டர்கள் ஒருபடிச்சாரா நிலையில் உள்ளன என்றால், அவ்வெக்டர்கள் குறிக்கும் புள்ளிகளில் எந்த ஒன்றை யும் ஆதியோடு சேர்த்துக் கிடைக்கும் நேர்கோட்டில் மற்ற புள்ளி இருக்காது.

(அ—து) ஆதியும், அவ்விரு புள்ளிகளும் ஒரு தளத்தை அமைக்கும். மறுதலையாக, ஆதியும் இரு புள்ளிகளும் ஒரே நேர் கோட்டில் அமையாவிடில் இவ்விரு புள்ளிகளையும் குறிக்கும் $V_3(R)$-ல் உள்ள வெக்டர்கள் ஒருபடிச்சாரா நிலையில் இருக்கும். $V_3(R)$-ல் மூன்று வெக்டர்கள் ஒருபடிச்சாரா நிலையில் இருப் பதற்குத் தேவையான நிபந்தனை, அவ்வெக்டர்களைக் குறிக்கும் புள்ளிகளில் எந்த இரு புள்ளிகளோடும் ஆதி அமைக்கும் தளத் தில் மூன்றாவது புள்ளி இருக்காதென்பதாகும். இதையே $V_n(R)$-ல் உள்ள வெக்டர்களுக்கும் பொதுப்படுத்தலாம்.

§ **4·5.** குறிப்பு: *F* என்ற களத்தின் மீதமைந்த அரூபவெக் டர் வெளி *V*-ல் ஒருபடிச்சாரா நிலையில் உள்ள எந்தக் கணமும் பூச்சிய உறுப்பைக் கொண்டிருக்காது. ஏனெனில் பூச்சிய உறுப் பைக் கொண்ட $\{x_1, x_2, \ldots, x_r, 0\}$ என்ற கணம் ஒருபடிச்சாரா நிலை யிலிருந்தால், $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_r x_r + \lambda_{r+1} 0 = 0$ என்ற எந்தச் சமன்பாடும் $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0; \ldots, \lambda_{r+1} = 0$ என்ற முடிவைக் கொடுக் கும். ஆனால் $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_r + 1 \cdot 0 = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் எல்லா எண்ணிகளும் பூச்சியமல்ல. இது ஒரு முரண்பாடாகும். **எனவே பூச்சிய உறுப்பைக் கொண்டிருக்கும் எந்தக்கணமும் ஒரு படிச் சார்ந்த நிலையிலிருக்கும்.**

§ **4·6.** தேற்றம் :

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அரூபவெக்டர் வெளி *V*-ல் ஒருபடிச்சாரா, முடிவுள்ள கணத்தின் ஒவ்வொரு உள்ளடங்கு கணமும் ஒருபடிச்சாரா நிலையிலிருக்கும்.

நிரூபணம் :

$S = \{x, x_2, \ldots, x_r\}$ என்பது *V*-ல் ஒருபடிச்சாரா நிலையில் உள்ள முடிவுள்ள கணமாகவும் *T* என்பது, *S*-ன் யாதாவதொரு உள்ளடங்கு கணமாகவும் இருக்கட்டும். *T* வெறுமைக் கணமா

யின் அது ஒருபடிச்சாரா நிலையில் உள்ளது என அறிவோம். எனவே பொதுத்தன்மைக்குப் பங்கமேற்படாதவாறு,

$T = \{x_1, x_2, ..., x_t\}$ $(t \leqslant r)$ எனக்கொள்வோம்.

$\mu_1, \mu_2, ..., \mu_t$ என்பன F-ல் யாதானும் t எண்ணிகளாக இருந்தால், $\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + ... + \mu_t x_t = 0$ என்ற சமன்பாட்டைக் கருதவும்...........(1)

அப்படியானல், $\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + ... + \mu_t x_t + 0. x_{t+1} + ... + 0. x_r = 0$......(2) ஆகும்.

$x_1, x_2, ..., x_r$ என்பன ஒருபடிச்சாரா நிலையில் உள்ளதால் (2) $\Longrightarrow \mu_1 = 0, \mu_2 = 0, ..., \mu_t = 0$ ஆகும்.

எனவே $\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + ... + \mu_t x_t = 0$ என்றமைந்த எந்தச் சமன்பாட்டிலும் $\mu_1 = 0 = \mu_2 = .. = \mu_t$ என அறிகிறோம்.

$\therefore$ T ஆனது ஒருபடிச்சாரா கணமாகும்.

குறிப்பு: ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ள ஒரு முடிவிலாக் கணத்தின் ஒவ்வொரு உள்ளடங்கு கணமும் ஒருபடிச்சாரா நிலையிலிருக்கும்.

§ 4·7. தேற்றம் :

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-ல் ஒருபடிச்சார்ந்த நிலையிலுள்ள முடிவுள்ள கணத்தின் ஒவ்வொரு முடிவுள்ள **உள்ளடங்கு** கணமும் ஒருபடிச்சார்ந்த நிலையிலிருக்கும்.

நிருபணம் :

$S = \{x_1, x_2, ... x_r\}$ என்பது ஒருபடிச்சார்ந்த நிலையிலுள்ள முடிவுள்ள கணமென்போம். அப்படியானல்,

$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_r x_r = 0$ என்ற ஒரு சமன்பாடாவது இருக்கும். இங்கு $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ என்பன, எல்லாம் பூச்சியமல்லாத எண்ணிகள். எனவே,

$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_r x_r + 0 \cdot x_{r+1} + 0 \cdot x_{r+2} + ... + 0 \cdot x_n = 0$ ஆகும். இங்கு எண்ணிகள் எல்லாம் பூச்சியமில்லையாதலால்,

$\{x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n\}$ என்ற கணம் ஒருபடிச்சார்ந்த கணமாகும்.

(அ—து) S-ன் உள்ளடங்கு கணமும் ஒருபடிச்சார்ந்தது.

S-ஐ உள்ளடங்கு கணமாகக் கொண்ட முடிவிலிக் கணமும் ஒருபடிச்சார்ந்த நிலையிலிருக்கும்.

§ 4·8. தேற்றம் :

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-ல் உள்ள $x_1, x_2, \ldots, x_r$ என்ற முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புகளில் ஏதாவது ஒரு உறுப்பு X_k ஆனது பிற உறுப்புகளின் ஒருபடிச்சேர்வாக இருந்தால் மட்டுமே, $x_1, x_2, \ldots, x_r$ என்பன ஒருபடிச்சார்ந்த நிலையிலிருக்கும்.

நிரூபணம் :

முதல் கட்டமாக, இந்நிபந்தனை தேவையானது என நிறுவுவோம். X_k என்பது $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_r$ களின் ஒருபடிச்சேர்வு என்பது தரவு ஆகும்.

$\therefore\ X_k = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_{k-1} x_{k-1} + \lambda_{k+1} x_{k+1} + \ldots + \lambda_r x_r$ ஆகும். எனவே $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_{k-1} x_{k-1} + (-1)\, x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1} + \ldots + \lambda_r x_r = 0 \ldots\ldots (1)$ X_k-ன் குணகம் பூச்சியமல்லவாதலால் (1) ஆனது $x_1, x_2, \ldots, x_r$ களின் வெளிப்படை அல்லாத ஒருபடிச் சேர்வைக் குறிக்கின்றது.

எனவே, $x_1, x_2, \ldots, x_r$ என்பன ஒருபடிச்சார்ந்த நிலையிலுள்ளன. அடுத்து நிபந்தனை போதுமானது என நிறுவலாம்.

இப்பொழுது $x_1, x_2, \ldots, x_r$ என்பன ஒருபடிச்சார்ந்த நிலையிலுள்ளன எனக்கொள்வோம். அப்படியானால், $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ என்ற எல்லாம் பூச்சியமல்லாத எண்ணிகளுக்கு,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k + \ldots + \alpha_r x_r = 0 \text{ ஆகும்} \ldots\ldots (1)$$

எண்ணிகளெல்லாம் பூச்சியமல்லவாதலால் $\alpha_k \neq 0$ எனக் கொள்ளலாம். எனவே (1)-லிருந்து,

$$\alpha_k x_k = (-\alpha_1)\, x_1 + (-\alpha_2)\, x_2 + \ldots + (-\alpha_r)\, x_r$$

$$\therefore\ X_k = \alpha_k^{-1}\Big[(-\alpha_1)x_1 + (-\alpha_2)x_2 + \dots + (-\alpha_{k-1})x_{k-1} + (-\alpha_{k+1})x_{k+1} + \dots + (-\alpha_r)x_r\Big]$$

$$\left(\alpha_k \neq 0 \quad \therefore\ \alpha_k^{-1} \in F\right)$$

$$= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{k-1} x_{k-1} + \lambda_{k+1} x_{k+1} + \dots + \lambda_r x_r$$

$$\left\{ \lambda_i = \alpha_k^{-1}(-\alpha_i),\ \begin{matrix} 1 \leqslant i \leqslant k-1 \\ k+1 \leqslant i \leqslant r \end{matrix} \right\}$$

எனவே X_k ஆனது பிற உறுப்புகளின் ஒருபடிச்சேர்வாகும்.

§ 4·9. இணைத்தேற்றம்:

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-ல் X என்ற உறுப்பு $x_1, x_2, \dots, x_r$ என்ற உறுப்புகளின் ஒருபடிச்சேர்வானால் $\{x, x_1, x_2, \dots, x_r\}$ ஆனது ஒருபடிச்சார்ந்த கணமாகும்.

4·10. தேற்றம் :

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-ல் $x_1, x_2, \dots, x_r$ என்பன பூச்சியமில்லாத உறுப்புகளாகும். உறுப்புகளின் இதே வரிசையில் ஏதாவது ஓர் உறுப்பு X_k $(2 \leqslant k \leqslant r)$ ஆனது அதற்கு முன்னுலுள்ள உறுப்புகளின் ஒருபடிச் சேர்வாக இருந்தால் மட்டுமே $\{x_1, x_2 \dots, x_r\}$ என்ற கணம் ஒருபடிச்சார்ந்த நிலையிலிருக்கும்.

நிரூபணம் :

X_k என்பது அதற்கு முன்னுலுள்ள $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ என்பவற்றின் ஒருபடிச்சேர்வாக இருக்கட்டும். அப்படியானுல்,

$$X_k = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{k-1} x_{k-1} \ (\lambda\text{-க்கள்} \in F)$$

$$\therefore\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{k-1} x_{k-1} + (-1)\,x_k = 0 \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{k-1} x_{k-1} + (-1)\,x_k + 0.x_{k+1} + \dots + 0.x_r = 0 \dots (1)$ X_k-ன் குணகம் (-1) ஆதலால், (1)-லிருந்து $x_1, x_2, \dots, x_r$ என்பன ஒருபடிச்சார்ந்த நிலையிலுள்ளன என அறிகிறேும். எனவே, நிபந்தனை தேவையானது.

அடுத்து நிபந்தனை போதுமானதென் நிறுவ $x_1, x_2, \ldots, x_k$ என்பன பூச்சியமல்லாத ஒருபடிச்சார்ந்த நிலையிலுள்ளன என எடுத்துக்கொள்வோம். அப்படியானால்,

$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_r x_r = 0 \ldots (1)$ (λக்கள் $\in F$, எல்லாம் பூச்சியமல்ல) எண்ணிகளெல்லாம் பூச்சியமல்லவாதலால், இதே வரிசையில், பூச்சியமல்லாத இறுதி எண்ணி (last non zero scalar in this order) λ_s ஆக இருக்கட்டும் $(s \leqslant r)$ (அ-து) $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_s$ என்பவை பூச்சியமல்ல; $\lambda_{s+1}, \ldots, \lambda_r$ என்பவை ஒவ்வொன்றும் பூச்சியமாகும். இப்பொழுது, $s > 1$ ஆகும். ஏனெனில் $s = 1$ எனின் வரையறையின்படி,

$\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 = 0 \ldots = \lambda_r$ ஆகும்.

எனவே, $(1) \Longrightarrow \lambda_1 x_1 = 0$. ஆனால் $\lambda_1 \neq 0$ ஆதலால், $x_1 = 0$ என்று வரும். இது $x_1, x_2, \ldots, x_r$ என்பன பூச்சியமில்லா உறுப்புகள் என்ற கொள்கைக்கு முரண்பாடாகும். எனவே, $s > 1$

(1)-லிருந்து $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_s x_s + \lambda_{s+1} x_{s+1} + \lambda_r x_r = 0$

$\lambda_{s+1} = 0 = \ldots = \lambda_r$ ஆதலால்,

$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_s x_s = 0$

$$\therefore \lambda_s x_s = (-\lambda_1) x_1 + (-\lambda_2) x_2 + \ldots + (-\lambda_{s-1}) x_{s-1}$$

$$\therefore x_s = \lambda_s^{-1} \left[(-\lambda_1) x_1 + \ldots + (-\lambda_{s-1}) x_{s-1} \right]$$

$$\left(\lambda_s \neq s \text{ ஆதலால், } \lambda_s^{-1} \in F \right)$$

எனவே x_s ஆனது அதற்கு முன்னுள்ள $x_1, x_2, \ldots, x_{s-1}$ என்ற உறுப்புகளின் ஒருபடிச்சேர்வாகும்.

குறிப்பு: மேலே உள்ள தேற்றத்தை மற்றொரு விதமாக ''F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-ல் $x_1, x_2, \ldots, x_r$ என்ற பூச்சியமில்லாத உறுப்புகளில் இதே வரிசையில் ஏதாவது ஓர் உறுப்பு $x_k\ (2 \leqslant k \leqslant r)$ அதற்கு முன்னுள்ள உறுப்புகளால் உருவாக்கப்பட்ட V-ன் உள்ளடங்கு வெளியில் இருந்தால் மட்டுமே $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ ஆனது ஒருபடிச்சார்ந்த கணமாகும்.''

4.11. தேற்றம் :

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அருப்வெக்டர் வெளி V-ல் $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ என்ற முடிவுள்ள கணம் ஒருபடிச்சாரா நிலையில் உள்ளது. V-ல் உள்ள X எனும் உறுப்பு $x_1, x_2, \ldots, x_r$ களின் ஒரு படிச்சேர்வு ஆவதற்குத் தேவையான, போதுமான நிபந்தனை $\{x, x_1, x_2, \ldots x_r\}$ ஆனது ஒருபடிச்சார்ந்த கணமாக இருக்க வேண்டும் என்பதாகும்.

நிரூபணம் :

X என்ற உறுப்பு $x_1, x_2, \ldots, x_r$ என்ற உறுப்புகளின் ஒருபடிச் சேர்வு ஆனால், $\{x, x_1, \ldots, x_r\}$ ஆனது ஒருபடிச்சார்ந்த கணமாகும் (கி. தேற். § 4.9) எனவே இந்நிபந்தனை தேவை யென அறிகிறோம்.

அடுத்து போதுமானதென நிறுவ, $\{x, x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ என்பது ஒருபடிச்சார்ந்த கணமென்போம். தரவின்படி $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ளது. எனவே,

$\lambda x + \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_r x_r = 0 \ldots (1)$ ஆகும். இங்கு எண்ணிகள் $\lambda, \lambda_1 \ldots \lambda_r$ எல்லாம் பூச்சியமல்ல.

இதில் $\lambda \neq 0$ ஆகும். ஏனெனில், அப்படியில்லாமல் $\lambda = 0$ என்றால், $\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_r$ எல்லாம் பூச்சியமல்லவாதலால், இதில் ஒரு எண்ணியாவது பூச்சியமாக இருக்கவேண்டும். $\lambda = 0$ எனக் கொள்வதால் ஒரு எண்ணி λ_i ஆவது $(1 \leqslant i \leqslant r)$ பூச்சியமல்ல.

எனவே, (1)-லிருந்து $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_r x_r = 0$ $(\because \lambda = 0)$ ......(2) எனப்பெறுகிறோம். ஆனால் தரவின்படி $x_1, x_2, \ldots, x_r$ என்பன ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ளதால் $(2) \Longrightarrow \lambda_1 = 0 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r$ இது நமது கொள்கை $\lambda \neq 0$-க்கு முரண்பாடாகும். எனவே, $\lambda \neq 0$ என அறிகிறோம்.

$\therefore$ (1)-லிருந்து,

$$\lambda X = (-\lambda_1) x_1 + (-\lambda_2) x_2 + \ldots + (-\lambda_r) x_r$$

எனவே,

$$X = \lambda^{-1} [(-\lambda_1) x_1 + (-\lambda_2) x_2 + \ldots + (-\lambda_r) x_r]$$

$$\left(\because \lambda \neq 0, \ \lambda^{-1} \in F\right)$$

குறிப்பு : ஒரு அருபவெக்டர் வெளி V-ல் ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ள கணம் S-லிருந்து, ஒருபடிச்சார்ந்த கணம் பெற,

V-ன் பூச்சிய உறுப்பை அல்லது S-ல் உள்ள உறுப்புகளில் யாதானுமொரு, ஒருபடிச்சேர்வாக உள்ள உறுப்பை S உடன் சேர்க்கவேண்டும்.

§ 4. 12. தேற்றம்:

F என்ற களத்தின்மீது அமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-ல் $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ என்ற முடிவுள்ள கணம் ஒருபடிச்சார்ந்திருப்பதற்குத் தேவையான, போதுமான நிபந்தனை, $x_1, x_2, \ldots, x_r$ களால் உருவாக்கப்படும் உள்ளடங்கு வெளியையே, உருவாக்கும் உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு முற்றிலும் உள்ளடங்கு கணத்தை அக்கணம் கொண்டிருத்தல் வேண்டும் என்பதாகும்.

நிரூபணம்:

$S=\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ என்பது ஒருபடிச்சார்ந்த முடிவுள்ள கணமென்போம். அப்படியானால், இதிலுள்ள ஏதாவது ஓர் உறுப்பு X_k ஆனது பிற உறுப்புகளின் ஒருபடிச்சேர்வாக இருக்கும்.

$\therefore \quad X_k=\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ldots+\lambda_{k-1} x_{k-1}+\lambda_{k+1} x_{k+1}+\ldots+\lambda_r x_r$ ......(1) (இங்கு λ-க்கள் $\in F$)

S-ஆல் உருவாக்கப்பட்ட உள்ளடங்கு வெளி V_1 எனவும்,

$T=\{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_r\}$ ஆல் உருவாக்கப்பட்ட உள்ளடங்கு வெளி V_2 எனவும் கொள்வோம். அப்படியானால்,

$$V_1=\left\{\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i\right\}$$

$$V_2=\left\{\sum_{i=1}^{k-1} \beta_i x_i+\sum_{j=1}^{k+1} \beta_j x_j\right\}$$ இங்கு α, β-க்கள் F-ல் மாறும் எண்ணிகளாகும்.

X என்பது V_1-ல் யாதானுமொரு உறுப்பாக இருக்கட்டும். அப்படியானால்,

$$X=\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i=\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i x_i+\alpha_k x_k+\sum_{j=k+1}^{r} \alpha_j x_j$$

$$=\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i x_i+\alpha_k\left(\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i x_i+\sum_{j=k+1}^{r} \lambda_j x_j\right)+$$

$$\sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j x_j$$ (1) லிருந்து,

$$= \sum_{i=1}^{k-1} (\alpha_i + \alpha_k \lambda_i)\, x_i + \sum_{j=k+1}^{r} (\alpha_k \lambda_j + \alpha_j)\, x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} p_i\, x_i + \sum_{j=k+1}^{r} p_j\, x_j \left(\begin{array}{l} p_i = \alpha_i + \alpha_k \lambda_i, \\ p_j = \alpha_k \lambda_j + \alpha_j \\ \text{என்று பிரதியிட,} \end{array} \right)$$

$$= p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_{k-1} x_{k-1} + p_{k+1} x_{k+1} + \ldots + p_r x_r \quad (X \in V.)$$

$$\therefore \quad V_1 \subset V_2 \ldots\ldots\ldots (2)$$

அடுத்து Y என்பது V_2ல் யாதானுமொரு உறுப்பாக இருக்கட்டும்.

$$Y = \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i\, x_i + \sum_{j=k+1}^{r} \beta_j\, x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i\, x_i + 0.\, x_k + \sum_{j=k+1}^{r} \beta_j\, x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \delta_i\, x_i \left(\text{இங்கு } \delta_k = 0,\ \delta_i = \beta_i \quad \begin{array}{l} 1 \leqslant i \leqslant k-1 \\ k+1 \leqslant i \leqslant r \end{array} \right)$$

எனவே, $Y \in V_1$. $\quad \therefore \quad V_2 \subset V_1 \ \ldots (3)$

(2), (3)-லிருந்து, $V_1 = V_2$ ஆகும்.

மேலும் T என்பது Sன் உள்ளடங்கு வெளியுமாதலால், S உருவாக்கும் உள்ளடங்கு வெளியையே T யும் உருவாக்குகிறது. எனவே, நிபந்தனை போதுமானதாகும்.

அடுத்து தேவையானதென நிறுவ, S-ல் T என்ற ஓர் உள்ளடங்கு கணம், இவையிரண்டும் உருவாக்கும் உள்ளடங்கு வெளிகள் ஒன்றாக இருக்குமாறுள்ளது என்று கொள்வோம். அப்படியானால், Sஆனது ஒருபடிச்சார்ந்த கணமென நிறுவவேண்டும்.

பொதுத்தன்மைக்குப் பங்கமேற்படாதவாறு $T = \{x_1, x_2, \ldots, x_t\}$ $(t < r)$ எனக் கொள்வோம்.

T உருவாக்கும் V-ன் உள்ளடங்கு வெளியும், S உருவாக்கும் V-ன் உள்ளடங்கு வெளியும் ஒன்றாதலால், S உருவாக்கும் உள்ளடங்கு வெளியில் உள்ள X_r எனும் உறுப்பு T உருவாக்கும் உள்

ளடங்கு வெளியில் இருக்கும். எனவே, X_r ஆனது $x_1, x_2, \ldots, x_t$-க்களின் ஒருபடிச்சேர்வாகும்.

$$\therefore \quad X_r = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_t x_t \quad (\lambda\text{-க்கள்} \in F)$$

$\therefore \quad \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_t x_t + 0 \cdot x_{t+1} + \ldots + 0 \cdot x_{r-1} + (-1) x_r = 0 \ldots\ldots (4)$ ஆகும்.

இதில் X_r-ன் குணகம் -1 ஆதலால் $(\neq 0)$ $x_1, x_2, \ldots, x_r$ என்பன ஒருபடிச்சார்ந்துள்ளன.

§ 4·13. தேற்றம்:

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-ல் எந்தவொரு முடிவுள்ள கணமும், அக்கணம் உருவாக்கும், உள்ளடங்கு வெளியை உருவாக்கும் ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ள ஒரு கணத்தை அடங்கு கணமாகக் கொண்டுள்ளது.

நிரூபணம் :

S என்பது V-ல் ஒரு முடிவுள்ள கணமாக இருக்கட்டும். S-ல் ஒரே ஒரு உறுப்பு மட்டுமிருந்தால், அவ்வுறுப்பு உருவாக்கும் உள்ளடங்கு வெளியையே உருவாக்கும் ஒருபடிச்சாரா ஒரு கணத்தை அடங்கு கணமாகக் கொண்டிருக்கும். ஏனெனில்,

S-ல் V-ன் பூச்சிய உறுப்பு மட்டுமிருந்தால், S-ன் உள்ளடங்கு கணமான வெறுமைக் கணம் Φ ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ளது. மேலும் Φ என்ற கணம் V-ன் உள்ளடங்கு வெளியான, பூச்சிய உறுப்பை மட்டுங்கொண்ட, வெளிப்படை உள்ளடங்கு வெளியை உருவாக்கும். இதுவே S உருவாக்கும் உள்ளடங்கு வெளியுமாகும்.

S-ல் பூச்சிய உறுப்பல்லாத ஒரே ஒரு உறுப்பு X $(x \neq 0)$ மட்டுமிருந்தால், $\{x\}$ ஆனது S-ன் உள்ளடங்கு கணமாகும். ($\because S = \{x\}$) மேலும் $\{x\}$ ஆனது ஒருபடிச்சாரா கணமாகும்.

$S = \{x\}$ ஆதலால், S உருவாக்கும் உள்ளடங்கு வெளியையே $\{x\}$-ம் உருவாக்குகிறது.

எந்த முடிவுள்ள V-ன் உள்ளடங்கு கணமும் $1 \leqslant r \leqslant n-1$ எனும்படி அமைந்த r உறுப்புகளைக் கொண்டிருந்தால், அதில் ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ள ஒரு உள்ளடங்கு கணம் உள்ளதென்பது

உண்மையாக இருக்கட்டும். (n இயற்கை எண் $\geqslant 2$) அப்படியானால், n உறுப்புகளைக் கொண்ட எந்த ஒரு முடிவுள்ள கணமும் ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ள ஓர் உள்ளடங்கு கணத்தைக் கொண்டுள்ளது என நிறுவலாம் [இது தொகுப்பாய்வு முறை induction process)] எனப்படும்.

$A=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்பது n உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு முடிவுள்ள கணமாக இருக்கட்டும். இக்கணமே ஒருபடிச்சாரா நிலையிலிருந்தால் நிறுவ வேண்டியது ஒன்றுமில்லை.

இக்கணம் ஒருபடிச்சார்ந்த நிலையிலிருந்தால் தேற்றம் § 4·12-ன்படி A உருவாக்கும் உள்ளடங்கு வெளியையே உருவாக்கும் ஒரு முற்றிலும் உள்ளடங்கு கணம் B ஆனது A-ல் உள்ளது.

B-ல் அதிக பட்சம் $(n-1)$ உறுப்புகள் இருக்குமாதலால் தொகுப்பாய்வுக் கொள்கையின்படி B-ல் ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ள ஓர் உள்ளடங்கு கணம் T-ல் உள்ளது. அக்கணம் T ஆனது B உருவாக்கும் உள்ளடங்கு வெளியையே உருவாக்குகின்றது. ($\because\ B \subset C,\ T \subset B.\ \therefore\ T \subset A$)

மேலும், T ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ளது.

A, B, T ஆகிய கணங்கள் தனித்தனியே ஒரே உள்ளடங்கு வெளியை உருவாக்குகின்றன. எனவே, தேற்றம் n என்ற மிகை முழு எண்ணிற்கும் உண்மையாகும்.

$\therefore$ தொகுப்பாய்வின்படி ஏற்கனவே $n = 1$ என்பதற்கு தேற்றம் உண்மையாதலால் எல்லாமிகை முழு எண்களுக்கும் தேற்றம் உண்மையாகும். ஆதலால், அருபவெக்டர் வெளி V-ல் எந்த ஒரு முடிவுள்ள கணமும் ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ள ஓர் உள்ளடங்கு கணத்தைக் கொண்டுள்ளது.

§ 4·14 ஒருபடிச்சார்ந்த நிலையின் அடிப்படைத்தேற்றம் : (fundemental theorem on linear dependence)

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-யை n உறுப்புகள் உருவாக்குகின்றன. V-ல் ஒருபடிச்சாரா நிலையில் r உறுப்புகள் உள்ளன என்றால் $n \geqslant r$

(அ-து) ஒரு அருபவெக்டர் வெளியை உருவாக்கும் கணத்திலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை, அவ்வெளியிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை விட அதிகமாக இருக்கும்.

நிரூபணம் :

$A=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ ஆனது Vஐ உருவாக்குகின்றது எனக் கொள்வோம். $B=\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ என்பது Vல் உள்ள ஒருபடிச் சாரா நிலையிலிருக்கும் யாதானுமொரு கணமாக இருக்கட்டும்.

$y_1, y_2, \cdots y_n$ என்பன Vஐ உருவாக்குவதால் x_1 என்பது இவற்றின் ஒருபடிச்சேர்வாக இருக்கும். எனவே § 4.9, § 2.3-ன் படி $B_1 = \{x_1, y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ என்பது V-யை உருவாக்குவதோடு, ஒருபடிச்சார்ந்த நிலையிலுமுள்ளது. ஆதலால், § 4.10-ன்படி B_1-ல் உள்ள உறுப்புகள் இதே வரிசையில் இரண்டாவது உறுப்பி லிருந்து, யாதானும் ஓர் உறுப்பு அதற்கு முன்னுலுள்ள உறுப்பு களின் ஒருபடிச்சேர்வாக இருக்கும். அதனை y_i என்று குறிப் போம்.

y_i-யை நீக்குவதால் கிடைக்கும் கணம் $B_2 =\{x_1, y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \cdots, y_n\}$ என்பது B_1 உருவாக்கும் உள்ளடங்கு வெளியையே உருவாக்குகின்றது. (§ 2.4)

$\therefore$ B_2 என்ற கணம் Vயை உருவாக்குகின்றது.

B_2 என்ற கணத்தில் முதல் உறுப்பாக x_2 ஐச் சேர்ப்போம்} அதனுல் கிடைக்கும் கணம் $B_3 = \{x_2, x_1, y_1, \cdots, y_{i-1}, y_{i+1}, \cdots, y_n$. ஆகும்.

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ என்பன V-யை உருவாக்குவதால் x_2 என்ற உறுப்பு இவற்றின் ஒருபடிச்சேர்வாகும். y_i ஆனது $x_1, y_1, \ldots, y_{i-1}$ என்பவற்றின் ஒருபடிச்சேர்வாகும்.

$\therefore$ x_2 என்பது $x_1, y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \cdots, y_n$ என்பவற்றின் ஒரு படிச்சேர்வாகும். எனவே B_3 ஆனது ஒருபடிச்சார்ந்த கண மாகும் § 4.9 மேலும், B_3 ஆனது B_2 உருவாக்கும் உள்ளடங்கு வெளியையே உருவாக்குகின்றது.

$\therefore$ B_3-யும் V-யை உருவாக்கும்.

B_3 ஆனது ஒருபடிச்சார்ந்த நிலையிலுள்ளதால், இக் கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளில் இதே வரிசையில் இரண்டாவது உறுப்பிலிருந்து யாதானுமொரு உறுப்பு அதற்கு முன்னுலுள்ள உறுப்புகளின் ஒருபடிச்சேர்வாக இருக்கும். இரண்டாவது உறுப்பு x_1 ஆனது அதற்கு முன்னுலுள்ள x_2-ன் ஒருபடிச்சேர் வாக இருக்கமுடியாது. [$\because$ (x_1, x_2) ஒருபடிச்சாரா நிலை] ஆதலால்,

$y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n$ என்பனவற்றில் யாதானுமொரு உறுப்பு y_j ஆனது B_3-ல் அதற்கு முன்னுலுள்ள உறுப்புகளின் ஒருபடிச்சேர்வாக இருக்கும். அதனை நீக்குவதால் கிடைக்கும் கணம்,

$B_4 = \{x_2, x_1, \ldots, y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \cdots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_n\}$ ஆனது B_3 உருவாக்கும் உள்ளடங்கு வெளியையே (V-யையே) உருவாக்குகின்றது. x_3-யை B_4-ல் முதலாவது உறுப்பாகச் சேர்க்க.

$B_5 = \{x_3, x_2, x_1, y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \cdots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_n\}$ கிடைக்கும்.

B_5-ம் B_4-ம் உருவாக்கும் உள்ளடங்கு வெளி V-யையே உருவாக்கும்.

மேலும் x_3 ஆனது $x_2, x_1, y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \cdots, x_{j-1}, y_{j+1}, y_n$களின் ஒருபடிச்சேர்வாகும். ஆதலால், B_5 ஒருபடிச்சார்ந்த நிலையிலுள்ளது.

இவ்வாறு மீண்டும், மீண்டும் செயல்பட, ஒவ்வொரு கட்டத்திலும் A-ல் உள்ள ஓர் உறுப்பு நீக்கப்படுகிறது; B-ல் உள்ள உறுப்பு சேர்க்கப்படுகிறது. A-ல் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $n \geqslant B$-ல் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை r ஆகும்.

அவ்வாறில்லாவிடில் $n < r$ எனக்கொள்வோம்.

$n = r - k \quad (k > 0)$ என்க.

மேற்கூறிய முறையில் கணம் A-யிலிருந்து ஒவ்வொரு தடவையும் B-யிலுள்ள ஓர் உறுப்பைச் சேர்த்து A-ல் ஓர் உறுப்பை நீக்குவதால் கிடைக்கும் கணமும் ஒருபடிச்சார்ந்த நிலையிலுள்ளது எனக் கிடைக்கும். A-ல் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை குறைந்து கொண்டே சென்று B-ன் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாகின்றது.

$(n-1)$ ஆவது நிலையில் கிடைக்கும் கணத்தில் $x_{n-1}, x_{n+2}, \ldots, x_1$ என்ற B-ல் உள்ள உறுப்புகளும் A-ல் உள்ள ஓர் உறுப்பு மட்டும் இருக்கும். ($\because r > n$) அந்த A-ல் உள்ள ஓர் உறுப்பு அதற்கு முன்னுலுள்ள உறுப்புகளின் ஒருபடிச்சேர்வாக இருக்கும். அதனை நீக்கி விட்டு x_n என்ற உறுப்பைச் சேர்க்க ($r > n$ ஆதலால், x_n என்பதனை B-யிலிருந்து எடுக்கலாம்) $\{x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1\}$ என்ற கணம் ஒருபடிச்சார்ந்தது எனக்கிடைக்கும். ஆனல் B ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ளதால் அதன் ஒவ்வொரு

உள்ளடங்கு கணமும் ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ளதாகும். இது ஒரு முரண்பாடாதலால் $n < r$ என்பது தவறு.

$\therefore n \geqslant r$ ஆகும்.

பிறிதொரு முறை (Aliter)

$A=\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ என்ற n உறுப்புகளைக் கொண்ட கணம் V-யை உருவாக்குகிறது என்போம். $(y_i \in V)$. $B=\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ என்பது V-ல் r உறுப்புகளைக் கொண்ட யாதானுமொரு ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ள கணமாக இருக்கட்டும். அப்படியானால், $r \leqslant n$ என நிறுவலாம்.

$r \leqslant n$ எனின் $r > n$ எனக்கொள்வோம். அப்படியானால், $r \geqslant n+1$ ஆகும். ஆதலால், B-யிலிருந்து $(n+1)$ உறுப்புகளை எடுத்துக்கொண்டு B'-யை அமைப்போம். $B'=\{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$ என்க. $B' \subset B$ ஆதலால் B' ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ள கணமாகும்.

$y_1, y_2, \dots, y_n$ என்பன V-ன் உருவாக்கிகளாதலால் V-ல் உள்ள $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ என்பன ஒவ்வொன்றையும் $y_1, y_2, \dots, y_n$ களின் ஒருபடிச்சேர்வாக எழுதலாம்.

$$\therefore\ x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, y_j \ (a_{ij} \in F, j=1, 2, \dots n+1) \dots\dots (1)$$

a_{ij} என்ற எண்ணிகளுக்கு ஒத்ததாக (corresponding to)

$$\begin{array}{l} a_{11}\, t_1 + a_{12}\, t_2 + \dots\dots + a_{1,\, n+1}\, t_{n+1} = 0 \\ a_{21}\, t_1 + a_{22}\, t_2 + \dots\dots + a_{2,\, n+1}\, t_{n+1} = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \end{array}$$

$a_{n,1}\, t_1 + a_{n,2}\, t_2 + \dots\dots + t_{n-1}\, a_{n,\, n+1} = 0$ என்ற சமன்பாடுகளைப் பூர்த்தி செய்யும் எல்லாம் பூச்சியமல்லாத எண்ணிகள் கொண்ட $\{t_1, t_2, \dots, t_{n+1}\}$ என்ற ஒரு கணமிருக்கும். (அணிக் கோவைகளின் தன்மை) இச் சமன்பாடுகளைச் சுருக்கமாக

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}\ t_j = 0 \ (i=1, 2, \dots n) \dots (2)$$ என எழுதலாம்.

$$t_1\, x_1 + t_2\, x_2 + \dots + t_{n+1}\, x_{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} t_j\, x_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} t_j \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i \quad (1)\text{-லிருந்து}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_j \cdot \left\{ \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} t_j \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 0.\ y_i \quad (2)\text{-லிருந்து}$$

$$= 0$$

∴ § 4·1-ன்படி $B' = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$ ஆனது ஒருபடிச் சார்ந்த நிலையிலிருக்கும். ஆனால் இது கொள்கைக்கு முரண்பாடாதலால் $r \leqslant n$ ஆகும்.

குறிப்பு: ஒரு அருபவெக்டர் வெளியை அதிலுள்ள n உறுப்புகள் உருவாக்குமானால் அவ்வெளியிலுள்ள எந்த $(n+1)$ அல்லது அதற்கு மேலுள்ள உறுப்புகளை எடுத்துக்கொண்டாலும் அவை ஒருபடிச்சார்ந்த நிலையிலிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்:

1. $X=(1,0,0)$, $Y=(1,1,0)$, $Z=(1,0,1)$, $W=(1,1,1)$ என்ற வெக்டர்கள் $V_3(C)$-ல் ஒருபடிச்சார்ந்தனவெனவும், இவற்றில் எந்த மூன்று வெக்டர்கள் ஒருபடிச்சாராவெனவும் நிறுவுக.

$1 \cdot X+(-1)Y+(-1)Z+1 \cdot W=(0,0,0)=0$. அடுத்து,

$\lambda_1 X+\lambda_2 Y+\lambda_3 Z=0$. எனின்,

$\lambda_1 (1,0,0)+\lambda_2 (1,1,0)+\lambda_3 (1,0,1)=(0,0,0)$ ஒத்தக் கூறுகளைச் சமனிட,

$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$; $\lambda_2=0$, $\lambda_3=0$

$\therefore \lambda_1=0$

எனவே X, Y, Z என்பன ஒருபடிச்சாராதவை.

இது போல் X, Y, Z, Wக்களில் இந்த மூன்று வெக்டர்களும் ஒருபடிச்சாராதவை என நிறுவலாம்.

2. $V_4(C)$-ல் $X_1=(1,2,-1,0)$, $X_2=(4,8,-4,0)$, $X_3=(0,3,-3,6)$ $X_4=(2,-5,7,-18)$, $X_5=(0,0,0,0)$ என்ற வெக்டர்களைக்

கொண்டுள்ள $\{x_1, x_2, ..., x_5\}$ என்ற கணம் உருவாக்கும் உள்ளடங்கு வெளியையே உருவாக்கும், ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ள ஓர் உள்ளடங்கு கணத்தைக் காண்க.

$S = \{x_1, x_2, ..., x_5\}$ எனின் இதிலுள்ள பூச்சிய வெக்டர் X_5 ஐ நீக்கக் கிடைப்பது $S_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ஆகும். அடுத்து, இரண்டாவது உறுப்பிலிருந்து எந்த ஓர் உறுப்பும் அதற்கு முன்னுல் உள்ள உறுப்புகளின் ஒருபடிச்சேர்வாக அமையுமானுல் அதனையும் நீக்கிவிடுவோம்.

இங்கு $X_2 = 4X_1$ ஆதலால், அதனை நீக்க

$S_2 = \{x_1, x_3, x_4\}$ ஆகும். இதில் $X_4 = 2X_1 - 3X_2$ ஆதலால், அதனையும் நீக்க $S_3 = \{x_1, x_3\}$ கிடைக்கும். இது ஒருபடிச்சாராதது. S, S_1, S_2, S_3 என்பன $V_4(C)$-ல் ஒரே உள்ளடங்கு வெளியை உருவாக்குவதால் நமக்குத் தேவையான உள்ளடங்கு கணம் $S_3 = \{x_1, x_3\}$ ஆகும்.

3. $V_2(F)$-ல் $(a, b), (c, d)$ என்ற பூச்சியமல்லா இரு வெக்டர்கள், $ab \neq bc$ என்றிருந்தால் மட்டுமே, ஒருபடிச்சாரா நிலையிலிருக்கும்.

$(a, b), (c, d)$ ஒரு படிச்சாராதிருக்குமானுல்,

$\lambda_1(a, d) + \lambda_2(c, d) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$ இருபுறமும் ஒத்தக் கூறுகளைச் சமனிட,

$\lambda_1 a + \lambda_2 c = 0$

$\lambda_1 b + \lambda_2 d = 0$

λ_1, λ_2-விற்கு வெளிப் படைத்தீர்வு இருக்குமானுல்;

$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \neq 0$ ஆகும். ie $ad - bc \neq 0$ ie $ad \neq bc$

அடுத்து, $ad \neq bc$ எனின்,

$\lambda_1(a, b) + \lambda_2(c, d) = 0$ எனும் சமன்பாட்டை எடுத்துக்கொள்வோம். $(\lambda_1, \lambda_2 \in F)$ அப்படியானுல்,

$\lambda_1 a + \lambda_2 c = 0$

$\lambda_1 b + \lambda_2 d = 0$

$\therefore \lambda_1(ad - bc) = 0, \lambda_2(bc - ad) = 0$

$ad-bc \neq 0$ ஆதலாலும், F-ல் பூச்சியக்காரணிகள் இல்லாததாலும் $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$ ஆகும்.

எனவே (a, b), (c, d) என்பன ஒருபடிச்சாராதவை.

குறிப்பு: இதை $V_n(F)$-ற்கு விரிவுபடுத்தினால், $(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$ $\ldots, (a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn})$ என்பன ஒருபடிச்சாரா நிலையிலிருக்க தேவையான நிபந்தனை

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots, a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots, a_{2n} \\ \ldots & \ldots \ldots, \ldots \\ \ldots & \ldots \ldots, \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots, a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ஆகும்.}$$

பயிற்சி 5

பின்வரும் பகுதிகளில் கருதப்படும் அருபவெக்டர் வெளிகள் முடிவுள்ள கணங்களால் உருவாக்கப்படுவனவாகும்.

1. களம் F-ன் மீது அமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-ல் X, Y, Z என்பன உறுப்புகள்.

(a) $X+Y, Y+Z, Z+X$ (b) ax, by, cz $(a, b, c \in F)$ என்பன ஒருபடிச்சார்ந்தனவா அல்லது சாராதனவா என ஆராய்க.

2. $V_3(R)$-ல் பின்வருபன ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ளன என நிறுவுக.

(a) $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$ $(1, 1, 1)$

(b) $(\sqrt{5}, \sqrt{2}, 0)$, $(0, \sqrt{3}, 0)$, $(0, 0, 1)$

(c) $(\pi, \frac{1}{2}, 0)$, $(0, \frac{2}{3}, 0)$, $(0, 0, \sqrt{2})$

3. விகிதமுறு மெய்யெண் களத்தின் மீது அருபவெக்டர் வெளியை அமைக்கும் மெய்யெண் களத்தில் $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ என்பன ஒருபடிச்சாராதவை என நிறுவுக.

4. (a) $V_2(C)$-ல் $(1+\lambda, 1-\lambda)$, $(1-\lambda, 1+\lambda)$ என்ற இரு வெக்டர்கள் ஒருபடிச்சார்ந்த நிலையிலிருக்க λ-வின் மேலுள்ள கட்டுப்பாடு என்ன ?

(b) $V_3(R)$-ல் $(0, 1, \lambda)$, $(\lambda, 0, 1)$, $(\lambda, 1, 0)$ என்பன ஒருபடிச்சார்ந்தவையெனின் λ-வின் மதிப்பென்ன ?

5. $C(x)$ என்ற அருபவெக்டர் வெளியில் (§ 1·2, எ-கா. 5) $f_1(x)=1$, $f_2(x)=x$, $f_3(x)=x^2$, $f_4(x)=1-x+x^2$ என்ற நான்கு பல்லுறுப்புக் கோவைகளும் ஒருபடிச்சார்ந்த நிலையிலுள்ளன என்று நிறுவுக. இவைகளில் எந்த மூன்று கோவைகள் ஒருபடிச்சாராதவை ?

6. விகிதமுறுஎண்களத்தில் அருபவெக்டர் வெளியை அமைக்கும் மெய்யெண் களத்தில் $1, X$ என்பன ஒருபடிச்சாராதிருப்பதற்குத் தேவையான நிபந்தனை, X என்பது விகிதமுறு எண்ணாக இருக்கவேண்டுமென்பதாகும் என நிறுவுக.

7. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ என்பன ஓர் அருபவெக்டர் வெளியின் உறுப்புகள். கணம் $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ உருவாக்கும் உள்ளடங்கு வெளியை அக்கணத்தின் எந்தவொரு முழு உள்ளடங்கு கணமும் உருவாக்க முடியாதெனின் $X_1, X_2, \ldots, X_n$ என்பன ஒருபடிச் சாராதவை எனக் காண்பி.

8. $Q(\sqrt{2})=\{a+\sqrt{2}b \mid a, b\in Q\}$ என்பது விகிதமுறு எண் களம் Q-ன் மீது ஒரு அருபவெக்டர் வெளியை அமைக்குமென நிறுவுக. மேலும், $3, \sqrt{2}$ என்பன $Q(\sqrt{2})$-வில் ஒருபடிச்சாராதவை எனவும் நிறுவுக.

9. $V_3(C)$-ல் $(1, \alpha, \alpha^2)$, $(1, \beta, \beta^2)$, $(1, \gamma, \gamma^2)$ என்பன ஒருபடிச்சார்ந்த நிலையிலிருப்பதற்கு $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ என்ற எண்ணிகளின் மேலுள்ள கட்டுப்பாடுகள் யாவை ?

10. $V_3(Z_2)$-ல் (a) இரு உறுப்புகளைக் கொண்ட
(b) மூன்று உறுப்புகளைக் கொண்ட
(c) நான்கு உறுப்புகளைக் கொண்ட,
ஒருபடிச்சாராக் கணங்கள் எத்தனை உள்ளது ?

11. களம் F-ன் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-ல் $S=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்பது பூச்சியமல்லாத உறுப்புகளைக் கொண்ட V-ன் உள்ளடங்கு கணமாகுமெனின் பின்வருபன சரிநிகர் (Equivalent) என நிறுவுக.

(a) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்பன ஒருபடிச்சாராதவை.

(b) T என்பது S-ன் யாதானுமொரு வெறுமையற்ற உள்ளடங்கு கணமாகவும், V_1, V_2 என்பன முறையே T, $(S-T)$-க்களால் உருவாக்கப்பட்ட V-ன் உள்ளடங்கு வெளிகளாகவுமிருந்தால் $V_1 \cap V_2 = 0$ ஆகும்.

12. F-ன் மீதமைந்த அரூபவெக்டர் வெளி V-ல் $x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்பன ஒருபடிச்சாராதவை. கணம் $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$-ல் ஆதாரச் செயல்களைச் செய்வதால் கிடைக்கும் கணமும் ஒரு படிச் சாராதது என நிறுவுக.

13. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்பன ஒருபடிச்சாராதவை. கணம் $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$-ல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் $x_1, x_2, \ldots, x_n$ களின் வெளிப்படையல்லாத ஒருபடிச்சேர்வாக இருந்தால் $y_1, y_2, \ldots, y_n$ என்பன ஒருபடிச்சாராதவை என நிறுவுக.

14. களம் F-ன் மீதமைந்த அரூபவெக்டர் வெளி V-ல் $S=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ஆனது ஒருபடிச்சாராதது. $B \cap C$ ஆனது வெறுமையற்றதாக இருக்குமாறு B, C என்பன S-ன் உள்ளடங்கு கணங்களாகும். $B \cap C$, B, C என்பவற்றால் தனித்தனியே உருவாக்கப்படும் உள்ளடங்கு வெளிகள் V_1, V_2, V_3 எனின் $V_1 = V_2 \cap V_3$ எனக் காண்பி.

15. (a) $V_3(Q)$-ல் $(7,2,5)$, $(3,1,0)$, $(0,0,1)$ என்பன (b) $V_3(C)$-ல் $(1+i, i, 2i)$, $(1-i, 2, i)$, $(1,0,1)$ என்பனவும் ஒரு படிச்சார்ந்தன என நிறுவுக. இவ்வெக்டர்கள் உருவாக்கும் உள்ளடங்கு வெளியையே ஒருபடிச்சாரா ஓர் உள்ளடங்கு கணம் என காண்க.

16. களம் F-ன் மீதமைந்த அரூபவெக்டர் வெளி V-ல் $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ என்பது ஓர் உள்ளடங்கு கணமாகும். $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ களில் முறையே ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $k+l$ ஆகும். எனின், $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n\}$-ல் ஒருபடிச்சாரா உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $\leqslant k+l$ என நிறுவுக.

17. 16-ல், $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ல் ஒவ்வொரு உறுப்பும் $x_1, x_2, \ldots, x_m$ களின் ஒருபடிச்சேர்வானல் $l \leqslant k$ என நிறுவுக.

18. $V_3(Q)$-ல் மூன்று வெக்டர்கள் ஒருபடிச்சாரா நிலையிலிருப்பதற்குத் தேவையான நிபந்தனை, இவை $V_3(R)$-ல் ஒரு படிச்சாரா நிலையிலிருக்க வேண்டுமென நிறுவுக.

19. சிக்கலெண் களம் C-ன் மீது அரூபவெக்டர் வெளியை அமைக்கும் சிக்கலெண் உறுப்புகளைக் கொண்ட எல்லா 2×2 அணிகளையும் கொண்ட வெளியில் $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$ என்பன ஒருபடிச்சாராதவை என நிறுவுக.

5. அருபவெக்டர் வெளியின் தளங்களும், அதன் பரிமாணமும்

(Basis of an abstract Vector Space and its Dimensions)

§ 5·1. வரையறை:

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளி *V*-ல், *B* என்ற ஒரு உள்ளடங்கு கணம் ஒருபடிச்சாராதிருந்து *V*-யை உருவாக்கினால், *B* ஆனது *V*-ன் தளம் (Basis) அல்லது ஒருபடித்தளம் (linear basis) அல்லது கூற்றுத் தொகுதி (linear system) எனப்படும்.

B ஆனது முடிவுள்ள கணமானல், *V*-ல் ஒரு முடிவுள்ள தளத்தைக் கொண்டுள்ளது என்போம். பின்வரும் பகுதிகளின் குறிப்பிட்டுச் சொன்னலன்றி முடிவுள்ள கணங்களால் உருவாக்கப்படும் வெக்டர் வெளிகளையே எடுத்துக் கொள்கிறோம் என்று கொள்ளுவோம்.

குறிப்பு: முடிவுள்ள தளத்தை வரையறுக்கும் போது சிலர், கணத்திலுள்ள உறுப்புகளின் வரிசைக்கும் முக்கியத்துவம் அளிப்பர். இதன் காரணம் நாம் பின்னல், அருபவெக்டர் வெளிக்கும், வெக்டர் வெளிக்கும் ஓரினச்சார்பு (Isomorphism) வரையறுக்கும் போது விளங்கும்.

§ 5·2. சில எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. V_n (F) ல், $E_1 = (1,0,\ldots,0)$, $E_2 = (0,1,\ldots,0)$,... $E_n = (0,0,\ldots,1)$ என்பன ஒரு தளத்தை அமைக்கும்.

2. *R*-ன் மீது *C* அமைக்கும் அருபவெக்டர் வெளிக்கு $\{1, i\}$ ஒரு தளமாகும்.

3. *C* அதன் மீதமைக்கும் அருபவெக்டர் வெளிக்கு $\{1\}$ ஒரு தளமாகும்.

4. $P_n(C)$ என்ற கணம் (§ 1·2,6) C-ன் மீது அமைக்கும் அருபவெக்டர் வெளிக்கு $\{1, x, ..., x^{n-1}\}$ ஒரு தளமாகும்.

5. $2\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + x = 0$ ன் எல்லா தீர்வுகளும் R-ன் மீதமைக்கும் அருபவெக்டர் வெளிக்கு $\left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2}t & 2t \\ e & e \end{matrix} \right\}$ ஒரு தளமாகும்.

6. $F(x)$ (F-என்பது யாதானுமொருகளம்) என்ற F-லிருந்து குணகங்களைக் கொண்ட x எனும் மாறியில், எல்லா பல்லுறுப்புக் கோவைகளையும் கொண்ட கணம் F-ன் மீது அமைக்கும் அருப வெக்டர் வெளிக்கு $\{1, x, ..., x^n, ...,\}$ என்ற முடிவிலிக்கணம் ஒரு முடிவிலித்தளமாகும் (infinite basis).

§ 5·3. தேற்றம்:

களம் F-ன் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-ல் $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ஆனது ஒரு தளமாவதற்குத் தேவையான கட்டுப்பாடு, V-ல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பையும், இக் கணத்திலுள்ள உறுப்புகளின் ஒருபடிச்சேர்வாக ஒரே ஒரு முறையில் தான் எழுத முடியும் (unique linear combination) என்பதாகும்.

நிரூபணம்:

V-ல் $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ என்பது தளமாக இருக்கட்டும். V-ல் யாதானுமொரு உறுப்பு X எனின், $X = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n$ ......(1) ஆகும். முடிந்தால், $X = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + ... + \mu_n x_n$......(2) ஆக இருக்கட்டும் இங்கு λ-க்கள், μ-க்கள் $\in F$. அப்படியானால்,

$$X - X = (\lambda_1 - \mu_1) x_1 + (\lambda_2 - \mu_2) x_2 + ... + (\lambda_n - \mu_n) x_n$$

(அ-து) $(\lambda_1 - \mu_1) x_1 + (\lambda_2 - \mu_2) x_2 + ... + (\lambda_n - \mu_n) x_n = 0$...(3)

$\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ஆனது Vல் ஒரு தளமாதலால், இது ஒருபடிச் சாராதது.

$$\therefore \quad (3) \Longrightarrow \lambda_1 - \mu_1 = 0,\ \lambda_2 - \mu_2 = 0, ..., \lambda_n - \mu_n = 0$$

ie. $\lambda_1 = \mu_1,\ \lambda_2 = \mu_2,\ ...,\ \lambda_n = \mu_n.$

அடுத்து, நிபந்தனை போதுமானது என நிறுவ, V-ல் உள்ள எந்த ஓர் உறுப்பையும் $x_1, x_2, ..., x_n$ களின் ஒருபடிச்சேர்வாக ஒரே ஒரு முறையில்தான் எழுதமுடியுமெனக் கொள்வோம்.

அப்படியானால், $x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்பன V-யை உருவாக்கு கின்றன.... (1) மேலும் $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ என்பன எண்ணி களெனின்,

$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$ஐ எடுத்துக்கொள்வோம்.

$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$ என நாமறிவோம்.

எனவே V-ல் உள்ள 0 ஐ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ களின் ஒருபடிச்சேர் வாக இருவழிகளில் எழுதியுள்ளோம். ஆனால் தரவின்படி, இவ்வாறு ஒருவழியில்தான் எழுதமுடியுமாதலால் $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$ ஆகும். எனவே $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்பது ஒருபடிச் சாராததாகும்......(2)

$\therefore$ (1), (2) லிருந்து $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ஆனது Vன் தள மாகும்.

§ 5·4. ஒரு அரூபவெக்டர் வெளியில் தளம் இருக்கும் தேற்றம்: (Existence theorem for basis of a finitely generated abstract vector space)

முடிவுள்ள கணத்தால் உருவாக்கப்படும் வெளிப்படை யல்லா, ஒவ்வொரு அரூபவெக்டர் வெளியிலும் ஒரு தளம் உண்டு.

நிரூபணம் :

களம் F-ன் மீதமைந்த அரூபவெக்டர் வெளி V-யை $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ உருவாக்கும் எனக்கொள்வோம்.

§ 4·13-ன்படி இக்கணம் உருவாக்கும் V-யே ஒருபடிச்சாரா உள்ளடங்கிலுள்ளது. அதனை T என்போம்.

$\therefore$ T ஆனது முடிவுள்ளதாகும். T ஒருபடிச்சாராததாலும், இது V-யை உருவாக்குவதாலும் T ஒரு முடிவுள்ள தளமாகும்.

ஆதலால், முடிவுள்ள கணத்தால் உருவாக்கப்படும். அரூப வெக்டர் வெளி V-ல் அக்கணத்திலிருந்தே ஒரு முடிவுள்ள தளத்தை அமைக்கலாம்.

எனவே V-ல் ஒரு முடிவுள்ள தளம் உண்டு.

குறிப்பு: ஒரு களத்தின் மீதமைந்த வெளிப்படை அரூப வெக்டர் வெளி V-ல் பூச்சிய உறுப்பு மட்டுமிருக்கும். இவ்வெளி

யிலுள்ள உள்ளடங்கு கணமான வெறுமைக்கணத்தை இவ் வெளியின் தளமெனலாம். (ஏனெனில் வெறுமைக்கணம் ஒருபடிச் சாராதது—அது பூச்சிய உறுப்பை உருவாக்கும்).

§ 5·5. ஒரு அருபவெக்டர் வெளியின் பரிமாணம் (Dimension of an abstract vector space)

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-ல் உள்ள ஒருபடிச்சாரா உறுப்புகளின் அதிகபட்ச எண்ணிக்கை யானது V-ன் **பரிமாணம்** எனப்படும். இதை $d(V)$ என்று குறிப்பது வழக்கம்.

V-ல் ஒருபடிச்சாரா உறுப்புகளின் எண்ணிக்கைக்கு முடிவுள்ள அதிகபட்சம் கிடையாதெனின் V-ன் பரிமாணம் ∞ எனவும், பூச்சிய உறுப்பை மட்டுங்கொண்டுள்ள அருபவெக்டர் வெளியின் பரிமாணம் 0 எனவும் வரையறுக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு 1: V-ன் பரிமாணம் r எனின், V-ல் r உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒருபடிச்சாராக் கணம் ஒன்றுவது உள்ளது. மேலும் V-ல் உள்ள எந்த $(r+1)$ (அல்லது அதற்குமேல்) உறுப்புகளை எடுத்துக்கொண்டாலும் அவை ஒருபடிச்சார்ந்திருக்கும்.

குறிப்பு 2: களம் F-ன் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V, அதிலுள்ள முடிவுள்ள கணத்தால் உருவாக்கப்பட்டால், அவ் வெளி முடிவுள்ள பரிமாணத்தையே கொண்டிருக்கும். ஏனெனில், அதிலுள்ள ஒருபடிச்சாரா உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை உருவாக்கும் கணத்திலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைவிட அதிக மிருக்காது.

குறிப்பு 3: $d(V)$ முடிவுள்ள எண்ணுயிருந்தால் V-யை **முடிவுள்ள பரிமாண அருபவெக்டர் வெளி** (finite dimensional abstract vector space) என்றும், $d(V)$ முடிவிலி எண்ணுக இருந்தால், V-யை **முடிவிலி பரிமாண அருபவெக்டர் வெளி** (infinite dimensional vector space) என்றும் அழைப்போம்.

§ 5·6. மீப்பெரு ஒருபடிச்சாராக் கணம் (Maximal linearly independent set)

களம் F-ன் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V, அதிலுள்ள முடிவுள்ள கணத்தால் உருவாக்கப்படுகிறது எனக்கொள்வோம். V-ன் உள்ளடங்கு கணம் $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ஆனது ஒருபடிச்சாரா திருந்து, இதிலில்லாத, ஆனல் V-ல் உள்ள எந்தவொரு

உறுப்பை இக்கணத்தோடு சேர்த்தாலும் அதனுல் கிடைக்கும் கணம் ஒருபடிச்சார்ந்திருந்தால் $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ஆனது V-ல் ஒரு மீப்பெரு ஒருபடிச்சாராக் கணம் எனப்படும்.

§ 5·7. தேற்றம் :

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த முடிவுள்ள கணத்தால் உருவாக்கப்பட்ட எந்தவொரு அருபவெக்டர் வெளி V-யிலும்,

(i) மீப்பெரு ஒருபடிச்சாராக் கணமொன்று உண்டு.

(ii) மீப்பெரு ஒருபடிச்சாராக் கணங்களின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை சமமாயிருக்கும்.

(iii) இவ்வெண்ணிக்கையே V-ன் பரிமாணம் ஆகும்.

நிருபணம் :

(i) ஒரு முடிவுள்ள கணத்தால் V உருவாக்கப்படுவதால் அதில் ஒரு தளம் உண்டு (§ 5·4). இத்தளம் V-யை உருவாக்குவதால், இத்தளத்தோடு இதிலில்லாத V-ல் உள்ள உறுப்பைச் சேர்ப்பதால், ஒருபடிச்சார்ந்த கணமே கிடைக்கும் (§ 4·14 குறிப்பு 2). ஆதலால் இத்தளம் ஒரு மீப்பெரு ஒருபடிச்சாராக் கணமாகும். எனவே ஒவ்வொரு அருபவெக்டர் வெளியிலும் மீப்பெரு ஒருபடிச்சாராக் கணம் ஒன்று உண்டு.

(ii) V-ல் $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ என்பது ஒரு மீப்பெரு ஒருபடிச்சாராக் கணமாயும் V_1 என்பது S-ஆல் உருவாக்கப்பட்ட கணமாயுமிருக்கட்டும். $V_1 \subset V$ என்பது வெளிப்படை......(1)

X என்பது V-ல் யாதானுமொரு உறுப்பாக இருக்கட்டும். $X \in S$ எனின், $X \in V_1$........(2)

$X \notin S$ எனின், $\{x_1, x_2, ..., x_n, x\}$ என்பது ஒருபடிச்சார்ந்த கணமாகும்.

[$\because$ $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ என்பது மீப்பெரு ஒருபடிச்சாரா நிலைக் கணம்].

எனவே, $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ஒருபடிச்சாராததால் § 4·11ன்படி X ஆனது $x_1, x_2, ..., x_n$ களின் ஒருபடிச்சேர்வாகும்.

$\therefore$ $X \in V_1$........(3)

(2), (3)-லிருந்து V-ல் உள்ள எந்த உறுப்பு X-ம் V_1-ல் உள்ளதென அறிகிறேம்.

$\therefore \quad V \subset V_1 \ldots\ldots\ldots(4)$

(1), (4)-லிருந்து, $V = V_1$

$\because \quad \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ஆனது V-யை உருவாக்குகிறது. மேலும் இது ஒருபடிச்சாராதது. எனவே, இக்கணம் V-ன் தளமாகும்.

$\therefore$ மீப்பெரு ஒருபடிச்சாராக் கணம் ஒரு தளம் என நிரூபித்துள்ளோம்.

அடுத்து, $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, $T = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ என்பன V-ல் யாதானுமிரு மீப்பெரு ஒருபடிச்சாராக் கணங்களெனின்,

S, T என்பன V-யில் தளங்களாகும்.

Sஐ V-ன் உருவாக்கும் கணமாகவும், Tஐ V-ல் உள்ள ஒருபடிச்சாராக் கணமாகவும் கருதினால் § 4.14-ன்படி $n \leqslant m$ ஆகும்.

Sஐ V-ல் உள்ள ஒருபடிச்சாராக் கணமாகவும், Tஐ V-ன் உருவாக்கும் கணமாகவும் கருதினால் $m \leqslant n$ ஆகும்.

$\therefore \quad m = n$

(iii) V-யில் ஒரு மீப்பெரு ஒருபடிச்சாராக் கணம் ஒன்று உண்டென (i)-ல் நிரூபித்துள்ளோம். அக்கணத்தில் n உறுப்புகள் உள்ளனவெனின் V-ல் n உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒருபடிச்சாராக்கணம் ஒன்றுள்ளது என்பது தெளிவு. மேலும் மீப்பெரு ஒருபடிச்சாராக் கணம் Vஐ உருவாக்குவதால் V-ல் $(n+1)$ உறுப்புகளைக் கொண்ட எந்த ஒரு கணமும் ஒருபடிச்சார்ந்துள்ளது (§ 4·14 குறிப்பு 2). எனவே $d(V) = n$ ஆகும்.

குறிப்பு: மேற்கூறிய தேற்றத்திலிருந்து, முடிவுள்ள கணத்தால் உருவாக்கப்படும் அருபவெக்டர் வெளியில் எந்தவொரு மீப்பெரு ஒருபடிச்சாராக் கணமும் ஒரு தளமாகும். எனவும், எந்த ஒரு தளமும் ஒரு மீப்பெரு ஒருபடிச்சாராக் கணமாகும் எனவும் அறிகிறோம்.

மேலும் 'அதிலுள்ள எந்தவொரு மீப்பெரு ஒருபடிச்சாராக் கணத்திலுமுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையே அதன் பரிமாணம் ஆகும்' எனவும் வரையறுக்கலாம்.

V ஆனது பூச்சிய உறுப்பை மட்டுங்கொண்டிருந்தால், இவ்வெளியில் வெறுமைக்கணமே, மீப்பெரு ஒருபடிச்சாராக் கணமாகும்.

§ **5·8.** அருபவெக்டர் வெளியின் தளத்தேற்றம் : (Basis theorem for abstract vector space)

களம் F-ன் மீதமைந்த வெளிப்படையல்லா அருபவெக்டர் வெளி V என்போம்.

(i) V ஆனது r உறுப்புகளைக் கொண்ட முடிவுள்ள தளத்தைக் கொண்டிருந்தால் $d(V) = r$ ஆகும். மேலும் V-ன் ஒவ்வொரு தளமும் r உறுப்புகளைக் கொண்டிருக்கும்.

(ii) $d(V) = r$ எனின், V-ல் r உறுப்புகளைக் கொண்ட தளம் ஒன்று உண்டு. மேலும் V-ல் r உறுப்புகள் ஒருபடிச்சாராதிருந்தால், இந்த r உறுப்புகளைக் கொண்ட கணம் V-ல் ஒரு தளமாகும்.

நிருபணம் :

(i) V-ல் r உறுப்புகளைக் கொண்ட முடிவுள்ள தளத்தை B என்போம்.

இத்தளம் V-யை உருவாக்குகின்றது, ஒருபடிச்சாராதது. ஆதலால், V-ல் r உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒருபடிச்சாராத கணம் ஒன்றுள்ளது......(1)

மேலும் இத்தளம் V-யை உருவாக்குவதால் எந்த $(r+1)$ உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு கணமும் ஒருபடிச்சார்ந்துள்ளது......(2)

$\therefore$ (1), (2)-லிருந்து $d(V) = r$ என அறிகிறோம்.

V-ல் மற்றொருதளம் B' ஆனது r' உறுப்புகளைக் கொண்டிருக்கட்டும்.

$r < r'$ எனின், B ஆனது V-யை உருவாக்குவதாலும், r உறுப்புகளைக் கொண்டிருப்பதாலும், r' உறுப்புகளைக் கொண்ட B' ஆனது ஒரு படிச்சார்ந்திருக்கும். இது முரண்பாடாதலால் $r \nless r'$ ஆகும்.

இது போல் $r' \nless r$ என நிறுவலாம்.

$\therefore$ $r = r'$ ஆகும்.

(ii) $d(V)=r$ ஆதலால் V-ல் r உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு படிச்சாராத கணம் ஒன்றுள்ளது. மேலும், V-ல் $(r+1)$ உறுப்புகளைக் கொண்ட எந்தவொரு கணமும் ஒரு படிச்சார்ந்திருக்கும்.

$T=\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ ஆனது V-ல் ஒருபடிச்சாராக் கணமென வும் T–ஆல் உருவாக்கப்பட்ட V-ன் உள்ளடங்கு வெளி எனவும் கொள்வோம். X என்பது V-ல் யாதானுமொரு உறுப்பாக இருக்கட்டும்.

$X \in T$ எனின் $X \in V_1$ ஆகும்......(3)

$X \notin T$ எனின், $\{x, x_1, \ldots, x_r\}$ ஆனது $(r+1)$ உறுப்புகளைக் கொண்டுள்ளதால், ஒருபடிச்சார்ந்திருக்கும். எனவே X ஆனது. x_1, x_2, ..., x_r களின் ஒருபடிச்சேர்வாகும்.

$\therefore \quad X \in V_1 \ldots\ldots\ldots(4)$

(3), (4)-லிருந்து V-ல் உள்ள எந்த உறுப்பும் V_1-ல் இருப்ப தால் $V \subset V_1$ ஆகும். ஆனால் $V \subset V_1$ என்பது வெளிப்படை.

$\therefore \quad V = V_1$

எனவே $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ ஆனது V-யை உருவாக்குகின்றது. மேலும் இது ஒருபடிச்சாராததால், இக்கணம் V-ல் ஒரு தளமாகும்.

$\therefore$ $d(V)=r$ எனின் V-ல் r உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு தளம் உண்டு. V-ல் எந்தவொரு கணமும் r உறுப்புகளைக் கொண்டு ஒரு படிச்சாராதிருந்தால் மேற்கூறிய வழியில் அக் கணம் V-ன் ஒரு தளமென நிறுவலாம்.

குறிப்பு : முடிவுள்ள பரிமாணங் கொண்ட வெளி, முடிவுள்ள கணத்தால் உருவாக்கப்படுமென அறிகிறோம்.

§ **5·9.** மேற்கூறிய தேற்றத்திலிருந்து 'F என்ற களத்தின் மீத மைந்த முடிவுள்ள கணத்தால் உருவாக்கப்படும், வெளிப்படை யல்லா, அருபவெக்டர் வெளி V-ல் உள்ள யாதானுமொரு தளத் திலிருக்கும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையே, V-ன் பரிமாணம்' என வரையறுக்கலாம்.

§ **5·10. கிளைத்தேற்றம் 1.**

$d(V)=r$ எனின் V-ல் உள்ள $(r-1)$ உறுப்புகளைக் கொண்ட எந்தவொரு கணமும் V-யை உருவாக்க முடியாது.

நிரூபணம் :

$d(V)=r$ ஆதலால், V-ல் r உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு படிச்சாராக் கணமொன்று இருக்கும் (§ 5·5)

V-ல் $(r-1)$ உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு கணம் V-யை உருவாக்குமானால், § 4·14-ன்படி $r-1 \geqslant r$ ஆகும்.

இது ஒரு முரண்பாடாதலால் $(r-1)$ உறுப்புகளைக் கொண்ட எந்தவொரு கணமும் V-யை உருவாக்கமுடியாது.

§ 5·11. கிளைத்தேற்றம் 2.

களம் F-ன் மீதமைந்த வெளிப்படையல்லா அரூபவெக்டர் வெளியின் பரிமாணம் n ஆகும். V-ல் உள்ள $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்ற கணம் தளம் ஆவதற்குப் போதுமான நிபந்தனை, இக்கணம் V-யை உருவாக்கவேண்டும் அல்லது ஒருபடிச்சாராதிருக்க வேண்டும் என்பதாகும்.

நிரூபணம் :

(i) $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ V-யை உருவாக்கட்டும். § 4·13-ன்படி $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$-ல் V-யை உருவாக்கும் ஒருபடிச்சாரா ஓர் உள்ளடங்கு கணம் ஒன்று உண்டு. அதனை A' என்றால், A' ஆனது V-ன் ஒரு தளமாகும்......(1)

$d(V)=n$ ஆதலால், A'ல் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை n ஆகும் (§ 5·8). எனவே, $A' \subset A$

எனவே, (1)-லிருந்து A என்பது V-ன் ஒரு தளமாகும்.

(ii) $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்பது ஒருபடிச்சாராதிருக்கட்டும்.

$d(V)=n$ ஆதலால் § 5·8, (ii)-ன்படி இக்கணம் V-ல் ஒரு தளமாகும்.

§ 5·12. முடிவுள்ள பரிமாண அரூபவெக்டர் வெளிக்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. $V_n(F)$-ல் n உறுப்புகளைக் கொண்ட $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ என்ற தளமிருப்பதால், $V_n(F)$ன் பரிமாணம் n ஆகும். ஆதலால் $V_n(F)$ஐ n **பரிமாண கூற்றுத்தொகுதி வெளி** (n dimensional coordinate space) என்றழைப்பது பொருத்தமாக உள்ளது. இது போல் $V_n(C)$, $V_n(R)$ களை முறையே n பரிமாண சிக்கலெண் கூற்றுத் தொகுதி வெளி, மெய்யெண் கூற்றுத்தொகுதி வெளி என அழைப்போம்.

2. சிக்கலெண் களம் C மெய்யெண் களத்தின் மீதமைக்கும் அரூபவெக்டர் வெளியில் $\{1, i\}$ ஒருதளமாதலால், இவ்வெளியின் பரிமாணம் 2 ஆகும்.

3. C அதன் மீதமைக்கும் அருபவெக்டர் வெளியில் பரிமாணம் ஒன்று ஆகும்.

4. $P_n(C)$ ன் (§ 1·3, 6) பரிமாணம் n ஆகும்.

5. களம் F மீதமைந்த எல்லா $m \times n$ அணிகளையும் கொண்ட F மீதமையும் அருபவெக்டர் வெளியின் பரிமாணம் mn ஆகும்.

6. F என்பது யாதானுமொரு களமானுல் $F(x)$ என்ற F லிருந்து குணகங்களைக் கொண்ட x எனும் மாறியில் எல்லா பல்லுறுப்புக் கோவைகளையும் கொண்ட கணம் F-ன் மீது ஒரு அருபவெக்டர் வெளியை அமைக்கும். இது முடிவிலி (infinite) பரிமாணங் கொண்டது.

§ 5·13. தளத்தைப் பூர்த்தி செய்தல் (Completion of basis)

தேற்றம் :

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த வெளிப்படையல்லாத அருப வெக்டர் வெளி V-ல் உள்ள எந்தவொரு ஒருபடிச்சாராக் கணமும் V-ன் ஒரு தளத்தின் உள்ளடங்கு கணமாகும்.

நிருபணம் :

$d(V) = n$ எனக்கொள்வோம். அப்படியானுல், $(n+1)$ அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புகளைக் கொண்ட எந்தவொரு கணமும் ஒரு படிச்சார்ந்திருக்கும்......(1)

$B = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ என்பது $\dot{V}$-ல் யாதானுமொரு, ஒருபடிச் சாரா கணமாக இருக்கட்டும்.

அப்படியானுல், (1)-ன்படி $r \leqslant n$

$r = n$ எனில், B ஆனது V-ல் ஒரு தளமாகுமாதலால் பூர்த்தி செய்யத்தேவையில்லை $r \leqslant n$ என்போம். B உருவாக்கும் உள்ளடங்கு வெளியை V_1 என்போம்.

V_1 என்பது Vன் முற்றிலும் உள்ளடங்கு கணமாகும் (§ 5·10 கி. தே)

$\therefore$ V_1-ல் இல்லாத V-ல் உள்ள உறுப்பு ஒன்ருவது இருக்கும். அவ்வுறுப்பை X_{r+1} எனக் குறிப்போம்.

$\therefore$ $X_{r+1} \in V,\ X_{r+1} \notin V_1$......(2)

X_{r+1} ஐ B-யுடன் சேர்ப்பதால் கிடைக்கும் கணம் $B_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}\}$ என்க.

B_1 ஆனது ஒருபடிச்சாராதிருக்கும். ஏனெனில், $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_{r+1} x_{r+1} = 0 \ldots\ldots (3)$ என்றால் (λ-க்கள் $\in F$) $\lambda_{r+1} = 0$ ஆகும். இல்லாவிடில், *ie.* $\lambda_{r+1} \neq 0$ என்றால் (3)-லிருந்து,

$X_{r+1} = \lambda_{r+1}^{-1} \left[(-\lambda_1)\ x_1 + (-\lambda_2)\ x_2 + \ldots + (-\lambda_r)\ x_r \right]$ எனக்கிடைக்கும். (அ-து) x_{r+1} ஆனது $x_1, x_2, \ldots, x_r$ களின் ஒருபடிச்சேர்வாகும்.

$\therefore$ $x_{r+1} \in V_1$ ஆனால் இது நமது கொள்கைக்கு முரண்பாடானது.

$\therefore$ $\lambda_{r+1} \neq 0$ என்பது தவறு. $\therefore$ $\lambda_{r+1} = 0$ ஆகும்.

எனவே (3)-லிருந்து, $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_r x_r = 0$ எனக் கிடைக்கும். ஆனால் $x_1, x_2, \ldots, x_r$ என்பன ஒருபடிச்சாராததால், $\lambda_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ ஆகும்.

$\therefore$ (3)-லிருந்து $B_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_{r+1}\}$-ம் ஒருபடிச்சாராதது என அறிகிறோம். இவ்வாறாக,

$r < n$ என்றால், கொடுத்துள்ள r ஒருபடிச்சாரா உறுப்புகளோடு மேலும் V-ல் உள்ள ஓர் உறுப்பைச் சேர்த்து $(r+1)$ உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒருபடிச்சாராக் கணத்தை அமைக்க முடியும்.

$r+1 = n$ என்றால், B ஆனது V-ல் ஒரு தளமாகும். ஆதலால், B ஆனது V-ல் ஒரு தளமாகப் பூர்த்தி செய்யப்பட்டுள்ளது.

$r+1 < n$ என்றால், B_1-லிருந்து மேற்கூறிய வழியில் $(r+2)$ உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒருபடிச்சாரா B_2 என்ற கணத்தை அமைக்கலாம்.

$r+2 = n$ என்றால் B_2, V-ல் ஒரு தளமாகும். $r+2 < n$ என்றால், மேற்கூறிய வழியில் தொடர்ந்து செயல்பட, ($n-r$ தடவை) இறுதியாக தளம் பூர்த்தியாகும்.

குறிப்பு 1: மேற்கூறிய தேற்றம் ஒரேதர வெக்டர்களைக் கொண்டமைந்த வெளிப்படையல்லா வெக்டர் வெளியிலும் உண்மையாகும்.

குறிப்பு 2 : ஒரு அருபவெக்டர் வெளியிலுள்ள ஒருபடிச் சாரா கணத்தைப் பல வழிகளில் V-ல் ஒரு தளமாகப் பூர்த்தி செய்யலாம். ஏனெனில், தேற்றத்தில் $r<n$ எனின் V-ல் உள்ள V_1-ல் இல்லாத எந்தவொரு உறுப்பை எடுத்துக்கொண்டும் $(r+1)$ உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒருபடிச்சாராக் கணத்தை அமைக்கலாம். V-ல் உள்ள V_1-ல் இல்லாத வெவ்வேறு உறுப்புகளைப் B-யோடு சேர்ப்பதால் B-யை V-ல் வெவ்வேறு தளங்களாகப் பூர்த்தி செய்யலாம். இதிலிருந்து வெளிப்படை இல்லாத அருபவெக்டர் வெளிக்குப் பல தளங்கள் உண்டென அறிகிறோம்.

அடுத்து வரும் தேற்றம் இதனை நன்கு விளக்கும்.

§ 5·14. தேற்றம் :

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-ல் உள்ள ஒரு தளத்தில் முடிவுள்ள எண்ணிக்கையில் ஆதார மாற்றங்களைச் செய்வதால் கிடைக்கும் கணமும் ஒரு தளமாகும்.

(**குறிப்பு:** ஒன்றும் கூறாத இடங்களில் V-யை வெளிப்படையல்லாத வெளியாகவே கொள்வோம்.)

நிரூபணம் :

$B=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்பது V-ல் ஒரு தளமாக இருக்கட்டும். B ஆனது V-யை உருவாக்குவதால், § 2·5-ன்படி, B-ல் ஆதாரமாற்றங்களை முடிவுள்ள எண்ணிக்கையில் செய்வதால் கிடைக்கும் கணமும் V-யை உருவாக்கும்......(1)

B ஆனது V-ன் தளமாதலால், இக்கணம் V-ல் ஒருபடிச் சாராதது. இக்கணத்தில் ஆதாரமாற்றங்களை முடிவுள்ள எண்ணிக்கையில் செய்வதால் கிடைக்கும் கணமும் ஒருபடிச் சாராதது என நிறுவவேண்டும்......(2)

(2) ஐ நிறுவுவதற்கு, ஒவ்வொரு ஆதாரமாற்றத்திலும் ஒன்றை எடுத்துக்கொண்டு B-ல் அதன் விளைவைப் பார்த்தால் போதும்.

முதல் வகை ஆதாரமாற்றமான, B-ல் உள்ள உறுப்புகளை இடம் மாற்றுவதால் அதன் ஒருபடிச்சாராத் தன்மை மாறாது என்பது வெளிப்படை.

அடுத்து இரண்டாவது வகை ஆதாரமாற்றமான, B-ல் உள்ள ஓர் உறுப்பு X_i க்குப் பதிலாக λX_i $(\lambda \neq 0, \in F)$ ஐ

எடுத்துக்கொள்வோம். இதன் விளைவாக B ஆனது $B_1=\{x_1, x_2, \ldots, \lambda x_i, \ldots, x_n\}$ என மாறுமானல் $\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ldots+\lambda_i (\lambda x_i)+\ldots+\lambda_n x_n=0$ ஐ எடுத்துக்கொள்வோம். (λ-க்கள் $\in F$)

$$\therefore \quad \lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ldots+(\lambda_i \lambda) x_i+\ldots+\lambda_n x_n=0 \text{ ஆகும்.}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ ஒருபடிச்சாராததால், இதிலிருந்து $\lambda_1=0=\lambda_2=\ldots=\lambda_i=\ldots=\lambda_n$ ($\because \lambda_i \lambda=0, \lambda\neq 0 \implies \lambda_i=0$) என்று கிடைக்கும். எனவே, B_1-ம் ஒருபடிச்சாராதது என அறிகிறோம்.

ie. இரண்டாவது வகை ஆதாரமாற்றத்தாலும் B-ன் ஒருபடிச்சாராத்தன்மை மாருது.

அடுத்து, மூன்ருவது வகை ஆதாரமாற்றமாக, B-ல் உள்ள ஓர் உறுப்பு x_i-க்குப் பதிலாக $x_i+\mu x_j$ என்று ($x_j \in B$) எடுத்துக் கொள்வோம் ($i \neq j$) இதன் விளைவாக $B_2=\{x_1, x_2, \ldots, x_i+\mu x_j, \ldots, x_n\}$ கிடைக்கட்டும்.

$\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ldots+\lambda_i (x_i+\mu x_j)+\ldots+\lambda_j x_j+\ldots+\lambda_n x_n=0$ ஐ எடுத்துக்கொள்வோம். அதாவது,

$\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ldots+\lambda_i x_i+\ldots+(\lambda_j+\mu \lambda_i) x_j+\ldots+x_n=0$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \lambda_1=0, \lambda_2=0, \ldots, \lambda_i=0 \ldots, \lambda_j+\mu \lambda_j=0 \ldots, \lambda_n=0 \text{ ஆகும்.}$$

$$\lambda_j+\mu \lambda_i=0, \lambda_i=0 \implies \lambda_j=0$$

$$\therefore \quad \{x_1, x_2, \ldots, x_i+\mu x_j, \ldots, x_n\}\text{-ம் ஒருபடிச்சாராதது.}$$

எனவே ஒருபடிச்சாராக் கணங்களில், முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள ஆதாரமாற்றங்களைச் செய்யும்போது, ஒவ்வொரு மாற்றத்தின் போதும், இத்தன்மை மாறுவதில்லை...(3)

(1), (3)-லிருந்து, B-ல் ஆதாரமாற்றங்களை முடிவுள்ள எண்ணிக்கையில் செய்வதால் கிடைக்கும் கணம் V-யை உருவாக்குவதோடு, ஒருபடிச்சாராதுமிருப்பதால் அக்கணம் V-ன் ஒரு தளமாகும்.

§ 5·15. எடுத்துக்காட்டு:

$V_3(R)$-ல் (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) என்ற மூன்று வெக்டர்களும் ஒரு தளத்தை அமைக்கும். இதில் ஆதார

மாற்றங்கள் செய்து $\{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ என்ற தளத்தை அமைக்கலாம்.

§ 5·16. ஒரேதர வெக்டர்களால் அமைக்கப்பட்ட வெளிப்படையல்லா வெக்டர் வெளியில் தளத்தேற்றம் (Basis theorem for non trivial vector spaces formed by vectors of the same order)

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த வெளிப்படையல்லாத n தர வெக்டர் வெளி V என்பது,

(i) முடிவுள்ள பரிமாணம் கொண்டது. மேலும் $0 < d(V) \leqslant n$

(ii) $d(V) = r$ என்றால், V-ல் ஒருபடிச்சாரா எந்த r வெக்டர்களும் ஒரு தளத்தை அமைக்கும். மேலும், V-ன் ஒவ்வொரு தளமும் r ஒருபடிச்சாரா வெக்டர்களைக் கொண்டது.

நிரூபணம்:

V-ல் எந்த $(n+1)$ வெக்டர்களைக் கொண்ட கணத்தை எடுத்துக்கொண்டாலும், அக்கணம் ஒருபடிச்சார்ந்திருக்கும். ஏனெனில்,

$$X_1 = (x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1})$$
$$X_2 = (x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{n2})$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$X_{n+1} = (x_{1, n+1}, x_{2, n+1}, \ldots, x_{n, n+1})$ என்பன V-ல் யாதானும் $(n+1)$ வெக்டர்களாகட்டும்.

$X_{ij} \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 1, 2, \ldots, n+1 \end{pmatrix}$ என்ற F-ல் உள்ள எண்ணிகளுக்கு,

$$\left.\begin{array}{l} x_{11}\, t_1 + x_{12}\, t_2 + \ldots\ldots + x_{1, n+1}\, t_{n+1} = 0 \\ x_{21}\, t_1 + x_{22}\, t_2 + \ldots\ldots + x_{2, n+1}\, t_{n+1} = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{n1}\, t_1 + x_{n2}\, t_2 + \ldots\ldots + x_{n, n+1}\, t_{n+1} = 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

என்ற சமன்பாடுகளை நிறைவு செய்யும், எல்லாம் பூச்சியமல்லாத $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}$ என்ற எண்ணிகள் F-ல் இருக்கும். (அணிக்கோவைகள் தேற்றம்) இப்பொழுது,

$$
\begin{aligned}
t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots + t_{n+1} x_{n+1} &= (x_{11} t_1 + x_{12} t_2 + \ldots + x_{1,n+1} t_{n+1}, \\
&\quad x_{21} t_1 + x_{22} t_2 + \ldots + x_{2,n+1} t_{n+1}, \\
&\quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots, \\
&\quad x_{n1} t_1 + x_{n2} t_2 + \ldots + x_{n,n+1} t_{n+1}) \\
&= (0, 0, \ldots, 0) \quad (1)\text{-லிருந்து} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$\therefore$ $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$ என்பது ஒருபடிச்சார்ந்ததாகும்...(2)

V என்பது வெளிப்படையல்லாத வெக்டர் வெளிப்படையல்லாத வெக்டர் வெளியாதலால் அதில் பூச்சியமல்லாத வெக்டர் ஒன்றுவது இருக்கும். அதனை x_1 என்றும், இது உருவாக்கும் உள்ளடங்கு வெளியை V_1 என்றும் குறிப்போம்.

$\{x_1\}$ ஆனது V-ல் ஒருபடிச்சாராததால் V-ன் பரிமாணம் $\geqslant 1$.........(3)

$\{x_1\}$ ஆனது V_1-ன் தளமாதலால் $d(V_1) = 1$ ஆகும்.

$V = V_1$ என்றால் $d(V) = 1$.

V_1 என்பது V-ல் முற்றிலும் உள்ளடங்கு வெளியாக V_1-ல் இல்லாத V-ல் உள்ள வெக்டர் ஒன்றுவது இருக்கும். அதனை x_2 என்போம். $x_2 \neq 0$ என்பது தெளிவு. $\{x_1, x_2\}$ என்பது ஒருபடிச் சாராததாகும். ஏனெனில், $\lambda_1, \lambda_2 \in F$, $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0$ என்றால் $\lambda_2 = 0$ ஆகும். $\lambda_2 \neq 0$ என்றால் $x_2 = \overset{-1}{\lambda_2} (-\lambda_1) x_1$. $\therefore$ $x_2 \in V_1$ ஆனல் $x_2 \notin V_1$ ஆதலால், இது ஒரு முரண்பாடாகும். எனவே, $\lambda_2 = 0$.

$$\therefore \quad \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 x_1 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 0 \quad (\because \quad x_1 \neq 0)$$

$\therefore$ $\{x_1, x_2\}$ என்பது ஒருபடிச்சாராதது. இதனல் உருவாக்கப்படும்.

V-ன் உள்ளடங்கு வெளியை V_2 என்போம். $d(V_2) = 2$ ஆகும்.

$V = V_2$ என்றால் $d(V_2) = d(V) = 2$ ஆகும்.

V_2 என்பது V-ல் முற்றிலும் உள்ளடங்கு கணமாயிருந்தால், மேற்கூறிய முறையை மீண்டும் கடைப்பிடிப்போம். ஆனல்,

n தடவைகளுக்குமேல் கடைபிடிக்க முடியாது. ஏனெனில், n ஆவது நிலையில் (n^{th} stage) V-ல் n வெக்டர்களைக் கொண்ட ஒரு படிச்சாராக் கணமிருக்கும். அந்நிலையில் இக்கணமே Vஐ உருவாக்கும் என நிறுவலாம்.

(2) லிருந்து அந்நிலையில் $d(V)=n$ ஆகும்.

இந்நிலைக்குப்பின் V-ல் $(n+1)$ வெக்டர்களைக் கொண்ட ஒருபடிச் சாராக் கணத்தைக் காண முடியாததாலும், இந்நிலைக்கு முன்னால் $d(V)$ ஆனது n-ஐ விடக் குறைவாக இருக்குமாதலாலும் $d(V) \leqslant n$ என்று கூறலாம்......(4)

(3), (4) இவற்றிலிருந்து, $1 \leqslant d(V) \leqslant n$ என்று கூறலாம்.

n என்பது முடிவுள்ள இயற்கையெண்ணாதலால், $d(V)$ ஆனது முடிவுள்ள இயற்கையெண்ணாகும்.

(ii) ஒரேதர வெக்டர்களால் அமைக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு வெக்டர் வெளியும் அருபவெக்டர் வெளியாதலால் § 5·8-லிருந்து இப்பகுதி உண்மையெனத் தெரியும்.

குறிப்பு : $V_n(F)$ என்ற வெக்டர் வெளியின் பரிமாணம் n ஆதலால், $V_n(F)$-ல் எந்த $(n+1)$ வெக்டர்களை எடுத்துக்கொண்டாலும் அவை ஒருபடிச்சார்ந்திருக்கும். ஒருபடிச்சாரா எந்த n வெக்டர்களை எடுத்துக்கொண்டாலும் அவை ஒரு தளத்தை $V_n(F)$ல் அமைக்கும்.

உள்ளடங்கு வெளிகளின் பரிமாணங்கள் (Dimensions of sub-spaces)

§ 5·17. தேற்றம் :

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த வெளிப்படையல்லா அருப வெக்டர் வெளி V-ல் M என்பது ஓர் உள்ளடங்கு வெளியெனின்,

(i) $d(M) \leqslant d(V)$

(ii) $d(M) = d(V)$ என்றால், $M=V$ என நிறுவுக.

நிரூபணம் :

$d(V) = n$ என்போம். அப்படியானால், எந்த $(n+1)$ உறுப்புகளை எடுத்துக்கொண்டாலும் அவை ஒருபடிச்சார்ந்திருக்கும்.........(1)

M என்பது V-ன் வெளிப்படை உள்ளடங்கு வெளியானுல் $d(M)=0<n$. M ஆனது V-ன் வெளிப்படையல்லாத உள்ளடங்கு வெளியாகட்டும். அப்படியானுல், அதில் பூச்சியமல்லாத ஓர் உறுப்பாவது உண்டு. அதனை x_1 என்போம். x_1 ஆல் உருவாக்கப்படும் M-ன் உள்ளடங்கு வெளியை M_1 என்று $M_1 \subset M$ ஆகும்.

$M=M_1$ என்ருல் M-ல் ஓர் உறுப்பைக் கொண்ட ஒரு தளம் உண்டு.

[$\because$ M_1-ல் $\{x_1\}$ ஒருதளமாகும்]

M_1 ஆனது M-ல் முற்றிலும் உள்ளடங்கு வெளியானுல் M_1-ல் இல்லாத M-ல் உள்ள உறுப்பு ஒன்ருவது உண்டு. அதனை x_2 என்று குறிப்போம். $\{x_1, x_2\}$ ஆல் உருவாக்கப்படும் M-ன் உள்ளடங்கு வெளியை M_2 என்று குறிப்போம்.

$\therefore$ $M_2 \subset M$

$M_2=M$ என்ருல் M-ல் ஈருறுப்புத்தளம் ஒன்றுண்டு.

[$\because$ M_2 ல் $\{x_1, x_2\}$ ஒருதளமாகும்]

M_2 ஆனது M-ல் முற்றிலும் உள்ளடங்கு வெளியானுல் M_2-ல் இல்லாத M-ல் உள்ள உறுப்பை எடுத்துக்கொண்டு மேற்கூறிய முறையைப் பின்பற்றுவோம். ஒவ்வொரு நிலையிலும் M-ல் ஒருபடிச்சாராத உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாகிறது. ஆனுல், n தடவைகளுக்குமேல் இவ்வழியைப் பின்பற்றமுடியாது. ஏனெனில், $(n+1)$ ஆவது நிலையில், M-ல் $(n+1)$ ஒருபடிச்சாரா உறுப்புகள் உள்ளன எனக் கிடைக்கும். ஆனுல், $d(V)=n$ ஆதலாலும் $M \subset V$ ஆதலாலும் V-ல் எந்த $(n+1)$ உறுப்புகளும் ஒருபடிச்சார்ந்திருக்குமாதலாலும், இது ஒரு முரண்பாடாகும்.

ஆதலால் n ஆவது, அல்லது அதற்கு முன்னுல் மேற்கூறிய முறையைப் பின்பற்றுவது முடிந்திருக்கவேண்டும்.

$\therefore$ M-ல் n அல்லது அதற்குக் குறைவான உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு தளம் உண்டு. M-ல் உள்ள எந்தவொரு தளத்திலும் இருக்கும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையே அதன் பரிமாணமாதலால் $d(M) \leqslant n$

(ii) $d(M)=n$ என்பது தரவு.

∴ § 5.8-ன்படி, M-ல் n உறுப்புகளைக் கொண்ட தளம் ஒன்றுண்டு. இதனை B என்போம்.

∵ $M \subset V$, V-யிலும் B-ல் உள்ள n உறுப்புகள் ஒருபடிச் சாராதிருக்கும்.

∵ $d(M)=n$, V-ல் B என்ற கணம் ஒரு தளமாகும்.

∴ B ஆனது M ஐயும், V-யையும் உருவாக்குகிறது.

∴ $M=V$

குறிப்பு: (i)-ல் கூறப்பட்ட முறையைப் பின்பற்றி, உள்ளடங்கு வெளியில் ஒரு தளத்தை அமைத்துப் பின்னர் அதே முறையில் இத்தளத்தினை V-ல் ஒருதளமாகப் பூர்த்திசெய்யலாம். இதுவே பின்வரும் கிளைத்தேற்றத்தில் கூறப்படுகிறது.

§ 5.18. கிளைத்தேற்றம்:

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த வெளிப்படையல்லாத, அருப வெக்டர் வெளி V-ல், M என்பது வெளிப்படையல்லாத ஓர் உள்ளடங்கு வெளியாகும். $d(V)=n$, $d(M)=m$ என்றால், $x_1, x_2, \ldots, x_m$ என்ற M-ல் உள்ள உறுப்புகளைக் கொண்டுள்ள $\{x_1, x_2, \ldots x_m, x_{m+1}, \ldots x_n\}$ என்ற தளத்தை V-ல் அமைக்கலாம்.

§ 5.19. கிளைத்தேற்றம்:

F என்ற களத்தின்மீது n-தர வெக்டர்களால் அமைக்கப்பட்ட வெளிப்படையல்லாத வெக்டர் வெளி V ஆகும். $d(V)=n$ என்றால் $V=V_n(F)$.

§ 5.17, (ii) லிருந்து, மேற்கூறிய முடிவு வெளிப்படையாகும்.

§ 5.20. கிளைத்தேற்றம்:

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-ல் M, N என்பன உள்ளடங்கு வெளிகளாகும்.

$M \subset N$, $d(M)=d(N)$ என்றால், $M=N$ ஆகும்.

§ 5.21. எடுத்துக்காட்டுகள்:

1. F என்ற முடிவுள்ள களம் (finite field) p உறுப்புகளைக் கொண்டுள்ளது. F-ன் மீதமைந்த ஓர் அருபவெக்டர்

வெளியின் பரிமாணம் n என்ருல், V-ல் p^n உறுப்புகளே உள்ளன என நிறுவுக.

$d(V)=n$ ஆதலால், V-ல் n உறுப்புகளைக் கொண்ட தளம் ஒன்றுண்டு. அதனை $B=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்போம்.

F-ல் p உறுப்புகள் உள்ளதால் அவற்றை $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ எனக் கொள்வோம். B ஆனது V-யை உருவாக்குவதால், V-ல் உள்ள எந்த உறுப்பும், B-யிலுள்ள உறுப்புகளின் ஒருபடிச் சேர்வாகும்.

ஆதலால், V-ல் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்பதற்கு $x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்பனவற்றைக் கொண்டும், $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ என்ற எண்ணிகளைக் கொண்டும், எத்தனை வெவ்வேருன ஒருபடிச்சேர்வுகளைக் காணலாமெனக் கண்டறிந்தால் போதும். அதாவது, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்ற உறுப்புகளுக்கு முன்ஞல் எண்ணிகளுக்குரிய n வெறுமை இடங்களை $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ என்ற p எண்ணிகளைக் கொண்டு, எந்த எண்ணியையும் எவ்வளவு தடவையும் உபயோகப்படுத்தலாம் என்ற கட்டுப் பாட்டில், எத்தனை வழிகளில் நிரப்ப முடியும் எனக் காண வேண்டும்.

முதல் வெறுமையிடத்தைப் p வழிகளில் ஏதாவதொரு வழியில் நிரப்பினுல், இரண்டாவது வெறுமையிடத்தையும் p வழிகளில் நிரப்பலாம். ஆதலால், முதல் இரண்டு வெறுமை இடங்களை $p \cdot p=p^2$ வழிகளில் நிரப்பலாம். இம்முறையில் n வெறுமை இடங்களையும் p^n வழிகளில் நிரப்பலாம்.

$\therefore$ V-ல் p^n உறுப்புகளே உளது.

குறிப்பு: இதிலிருந்து $V_n(Z_p)$-ல் (p பகா எண்) p^n உறுப்புகள் உள்ளன என்பது தெளிவு.

2. $V_4(R)$-ல் பின்வரும் உள்ளடங்கு வெளிகளின் தளம் ஒன்றைக்கண்டு, அதன் வழி, அவ்வெளிகளின் பரிமாணம் காண்க.

(i) S எனும் உள்ளடங்கு வெளி $(1, -1, 2, -3)$, $(1, 1, 2, 0)$, $(3, -1, 6, -6)$ என்ற 3 வெக்டர்களால் உருவாக்கப்படுகிறது.

(ii) T என்ற உள்ளடங்கு வெளி $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 1)$, $(2, 2, 3, 3)$, $(7, 7, 11, 11)$ என்ற 4 வெக்டர்களால் உருவாக்கப் படுகிறது :-

(i) $x_1=(1, -1, 2, -3)$; $x_2=(1, 1, 2, 0)$; $x_3=(3, -1, 6, -6)$ என்போம். $\{x_1, x_2, x_3\}$-யிலிருந்து S-ல் ஒரு தளத்தையமைக்க வேண்டும்.

x_1, x_2, x_3 என்பன ஒருபடிச்சார்ந்துள்ளனவா, இல்லையா என முதலில் சோதித்தறிய வேண்டும்.

$\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\lambda_3 x_3 = 0 \Longrightarrow \lambda_1=0, \lambda_2=0, \lambda_3 = 0$ என எளிதில் நிறுவலாம். எனவே, $\{x_1, x_2, x_3\}$ ஆனது ஒருபடிச் சாராதது ; மேலும், இது Sஐ உருவாக்குவதால், இக்கணம் S-ல் ஒரு தளமாகும்.

$\therefore$ $d(S) = 3$ ஆகும். (தளத்திலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை)

(ii) $y_1=(1,1,0,0)$, $y_2=(0,0,1,1)$, $y_3=(2,2,3,3)$ $Y_4=(7,7,11,11)$ என்போம். இவற்றிலிருந்து T-ல் ஒருதளத்தை அமைக்க வேண்டும். $y_1+2y_2+3y_3-y_4=0$ ஆதலால், $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ ஆனது ஒருபடிச்சார்ந்ததாகும். இக்கணத்திலிருந்து T-யை உருவாக்கும், ஒருபடிச்சாரா உள்ளடங்கு கணத்தைக் காணவேண்டும். இவற்றில் எந்த உறுப்பும் பூச்சிய வெக்டரல்ல.

y_2 என்பது y_1-ன் ஒருபடிச்சேர்வல்லவெனவும், y_3 ஆனது y_1, y_2-க்களின் ஒருபடிச்சேர்வெனவும் எளிதில் சோதித்தறியலாம். $\{\because y_3=y_1+2y_2\}$ ஆதலால், $\{y_1, y_2, y_3\}$ உருவாக்கும் T-ன் உள்ளடங்கு வெளியையே $\{y_1, y_2\}$-ம் உருவாக்குகிறது......(1)

அடுத்து, $y_4=y_1+2y_2+3y_3$ ஆதலால், y_4-ம் y_1,y_2,y_3-க்களின் ஒருபடிச்சேர்வாகும். எனவே, $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ உருவாக்கும் T-ன் உள்ளடங்கு வெளியையே $\{y_1, y_2, y_3\}$-ம் உருவாக்கும்......(2)

(1), (2) லிருந்து, $\{y_1, y_2\}$ என்ற ஒருபடிச்சாராக் கணம் T-யை உருவாக்குகிறது என்பது தெளிவு.

$\therefore$ T-ல் ஒரு தளம் $\{y_1, y_2\}$ ஆகும். $\therefore$ $d(T)=2$

3. $V_4(R)$-ல் $x_1=(0,0,1,1)$, $x_2=(1,1,0,0)$ என்ற இரு வெக்டர்களை மட்டுமே பொதுவாகக் கொண்ட இரு வேறு தளங்களைக் காண்க.

$\{x_1, x_2\}$ என்ற கணம் ஒருபடிச்சாராதது. $V_4(R)$-ன் பரிமாணம் 4 ஆதலால், இக்கணம் $V_4(R)$ ஐ உருவாக்காது. ஆதலால், இது $V_4(R)$-ல் ஒரு தளமல்ல.

$\{x_1, x_2\}$ என்ற கணத்தால் உருவாக்கப்பட்ட V_4 (R)-ன் உள்ளடங்கு வெளியை S என்று குறிப்போம்.

$$\therefore \quad S=\{\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in R\}$$
$$=\{(\lambda_2, \lambda_2, \lambda_1, \lambda_1) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in R\}$$

S-ல் இல்லாத, ஆனால் $V_4(R)$ல் உள்ள இருவேறு வெக்டர்களை எடுத்துக்கொள்ளுவோம். $x_3=(1,0,1,0)$, $x_4=(0,1,0,1)$ இங்கு $x_3, x_4 \notin S$; $x_3, x_4 \in V_4(R)$. $\therefore$ § 5·13-ன்படி $\{x_1, x_2, x_3\}$, $\{x_1, x_2, x_4\}$ என்ற இரு கணங்களும் V_4 (R)-ல் ஒருபடிச்சாராதவை. ஆனால், $V_4(R)$-ன் பரிமாணம் 4 ஆதலால், இவ்விரு கணங்களும் தனித்தனியே $V_4(R)$-ன் தளமாக இருக்க முடியாது. ஆதலால், § 5·13-ல் கூறியபடி, T, U என்பன முறையே $\{x_1, x_2, x_3\}$, $\{x_1, x_2, x_4\}$ என்ற கணங்களால் உருவாக்கப்பட்ட $V_4(R)$-ன் உள்ளடங்கு வெளிகளாக இருக்கட்டும்.

$$\therefore \quad T=\{\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\lambda_3 x_3 \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R\}$$
$$=\{(\lambda_2+\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1+\lambda_3, \lambda_1)\}$$
$$U=\{\mu_1 x_1+\mu_2 x_2+\mu_3 x_3 \mid \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in R\}$$
$$=\{(\mu_2, \mu_2+\mu_3, \mu_1, \mu_1+\mu_3)\}$$

முன்னர் கூறியதுபோல், T-ல் இல்லாத ஆனால் $V_4(R)$-ல் உள்ள ஒரு வெக்டரை எடுத்துக்கொள்வோம். (அ-து) $x_5 = (0, 1, 1, 1)$ $[x_5 \notin T, x_5 \in V_4(R)]$ U-ல் இல்லாத, $V_4(R)$-ல் உள்ள x_5-க்குச் சமமல்லாத $x_6 = (1, 0, 1, 1)$ $[x_6 \notin U, x_6 \in V_4(R)]$ ஐ எடுத்துக்கொள்வோம். § 5·13-ன்படி $\{x_1, x_2, x_3, x_5\}$, $\{x_1, x_2, x_4, x_6\}$ என்பன ஒருபடிச்சாராதவை. மேலும், இவை ஒவ்வொன்றும் 4 வெக்டர்களைக் கொண்டுள்ளன. எனவே $\{x_1, x_2, x_3, x_5\}$, $\{x_1, x_2, x_4, x_6\}$ என்பன V_4 (R)-ல் x_1, x_2-க்களை மட்டுமே பொதுவாகக் கொண்டுள்ள இரு தளங்களாகும்.

4. $V_4(R)$-ல் $K = \{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)\}$ என்ற உள்ளடங்கு கணம் ஆறு வெக்டர்களைக் கொண்டது. இக்கணத்திலிருந்து V_4 (R)-ல் இருவேறு மீப்பெரு ஒருபடிச்சாராக் கணங்களை அமைக்கவும்.

இங்கு, எந்தவொரு மீப்பெரு ஒருபடிச்சாராக் கணமும் ஒரு தளமாகும் என்பதையும் (§ 5·7), $V_4(R)$-ன் பரிமாணம் 4 ஆதலால், $V_4(R)$-ல் ஒருபடிச்சாரா எந்த 4 வெக்டர்களும் ஒரு தளத்தை அமைக்குமென்பதையும் (§ 5·16) நினைவு கூறுவோம்.

முதலில் K-யிலிருந்து யாதானுமொரு வெக்டரை எடுத்துக் கொண்டு ஒரு கணத்தை அமைப்போம். உதாரணமாக $\{(1, 1, 0, 0)\}$ என்ற இக்கணத்தால் உருவாக்கப்பட்ட $V_4(R)$-ன் உள்ளடங்கு வெளியை S என்போம்.

$$S=\{\lambda_1 (x_1) \mid \lambda_1 \in R\} = \{(\lambda_1, \lambda_1, 0, 0)\}$$

S-ல் இல்லாத K-ல் உள்ள யாதானுமொரு வெக்டர் $x_2 = (1, 0, 1, 0)$ ஐ எடுத்துக்கொள்வோம். $[x_2 \notin S,\ x_2 \in K]$ அப்படியானால், $\{x_1, x_2\}$ என்ற கணம் $V_4(R)$-ல் ஒருபடிச்சாராதிருக்கும். இக்கணத்தால் உருவாக்கப்பட்ட $V_4(R)$-ன் உள்ளடங்கு வெளியை T என்போம்.

$$T=\{\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in R\} = \{(\lambda_1+\lambda_2, \lambda_1, \lambda_2, 0)\}$$

அடுத்து T-ல் இல்லாத K-ல் உள்ள யாதானுமொரு வெக்டர் $x_3=(1, 0, 0, 1)$ ஐ எடுத்துக்கொள்வோம்.

$\therefore$ $\{x_1, x_2, x_3\}$ ஆனது $V_4(R)$-ல் ஒருபடிச்சாராதிருக்கும். இக்கணத்தால் உருவாக்கப்பட்ட, $V_4(R)$-ன் உள்ளடங்கு வெளியை U என்று குறிப்போம்.

$\therefore$ $U=\{\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\lambda_3 x_3 \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R\} = \{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\}$. U-ல் இல்லாத K-ல் உள்ள யாதானுமொரு வெக்டர் $x_4=(0,1,1,0)$ஐ எடுத்துக்கொள்வோம்.

$\therefore$ $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ஆனது $V_4(R)$-ல் ஒருபடிச்சாராதிருக்கும். இக்கணத்தில் 4 வெக்டர்கள் உள்ளதால், இது $V_4(R)$ ல் ஒரு தளமாகும். $V_4(R)$-ல் எந்தவொரு தளமும், ஒரு மீப்பெரு ஒருபடிச்சாராக் கணமாதலால், $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ என்பது $V_4(R)$-ல் ஒரு மீப்பெரு ஒருபடிச்சாராக் கணமாகும்.

இது போல் $\{(0,0,1,1), (0,1,0,1), (0,1,1,0), (1,0,0,1)\}$ என்ற K-யிலிருந்து $V_4(R)$-ல் மற்றொரு மீப்பெரு ஒருபடிச்சாராக் கணத்தை அமைக்கலாம்.

பயிற்சி 6

1. $V_4(R)$ ல் உள்ள, பின்வரும் உள்ளடங்கு வெளிகளின், தளம் ஒன்றைக் கண்டு, அதிலிருந்து, அவ்வெளிகளின் பரிமாணங்களைக் காண்க.

(a) A எனும் உள்ளடங்கு வெளி $\{(1,-1,-3,0), (0,-2,-1,1), (1,0,1,0), (0,1,0,1)\}$ என்ற கணத்தால் உருவாக்கப் படுகிறது.

(b) B ஆனது $\{(1,2,0,1), (2,0,3,1), (0,3,1,4,) (0,4,5,0)\}$ என்ற கணத்தால் உருவாக்கப்படுகிறது.

2. $V_n(F)$ ல் $(n \geqslant 2)$ $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்ற கணம், பரிமாணம் 2-ம் கொண்ட ஓர் உள்ளடங்கு வெளி S ஐ உருவாக்குகிறது. மேலும், இக்கணத்தில் எந்த இரு வெக்டர்களை எடுத்துக் கொண்டாலும் அவை ஒருபடிச்சாராதவை. x_{n+1}, என்பது இக்கணத்தில் இல்லாத $V_n(F)$-ல் உள்ள ஒரு வெக்டராகும். $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$ என்பது Sஐ உருவாக்குவதற்கும், இக்கணத்தில் எந்த இரு வெக்டர்களும் ஒருபடிச்சாராதிருப்பதற்கும் தேவையான விதி,

$$x_{n+1} = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n, \quad (\lambda_t \neq 0 \in F, \quad t = 1, 2, \ldots, n)$$

என்பதாகும் என நிறுவுக.

இதனை உபயோகித்து $V_4(R)$ ல் பரிமாணம் 2 கொண்ட ஓர் உள்ளடங்கு வெளியை உருவாக்கும், நான்கு வெக்டர்கள் கொண்ட கணத்தினை, அக்கணத்தில் எந்த இரு வெக்டர்களை எடுத்துக் கொண்டாலும் அவை ஒரு படிச்சாராதிருக்குமாறு அமைக்க.

3. F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அரூபவெக்டர் வெளி V-ன் பரிமாணம் 5 ஆகும். M, N என்பன V-ல் இருவேறு உள்ளடங்கு வெளிகளாகும். அவை ஒவ்வொன்றின் பரிமாணமும் 3 என்றால் $M \cap N \neq \Phi$ என நிறுவுக.

4. $V_3(R)$-ல் $(1,0,0)$ என்ற வெக்டரை மட்டும் பொதுவாகக் கொண்ட மூன்று வெவ்வேறு தளங்களை அமைக்கவும்.

5. $V_4(R)$-ல் பொது உறுப்பில்லாத, $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 1, 1, 0)$ என்ற இரு வெக்டர்களைக் கொண்ட ஒரு தளத்

தையும், $(0, 0, 1, 1)$, $(0, 1, 0, 1)$ என்ற இருவெக்டர்களைக் கொண்ட மற்றொரு தளத்தையும் அமைக்கவும்.

6. $V_3(R)$-ல் $S=\{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R, \lambda_3=0$ அல்லது $1\}$ என்பது ஓர் உள்ளடங்கு கணமாகும். இக் கணத்திலிருந்து $V_3(R)$-ல் எத்தனை வெவ்வேறு தளங்களை அமைக்கலாம்?

7. $V_4(R)$-ல் $T=\{(1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 0)\}$ என்ற கணத்திலிருந்து, இருவேறுபட்ட மீப்பெரு ஒருபடிச்சாராக் கணங்களைக் காண்க.

8. மெய்யெண் களத்தை விகிதமுறு எண்களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளியாகக் கருதும் பொழுது, அவ்வெளி முடிவுள்ள பரிமாணம் கொண்டதா? கிடைக்கும் விடைக்குத் தகுந்த நிருபணம் தருக.

9. $V_n(Z_p)$-ல் (p பகா எண்) வெவ்வேறுன, K பரிமாணமுள்ள உள்ளடங்கு வெளிகள் எத்தனை உள்ளன?

10. $ax+by=0, cx+dy=0$ ($a, b, c, d, \in R$, நிலையானவை) என்ற இரு சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் (x, y)ஐக் கொண்ட கணம், R-ன் மீது ஓர் அருபவெக்டர் வெளியை அமைக்குமென நிறுவுக. அதன் பரிமாணத்தை a, b, c, dக்கள் வழியாகக் காண்க.

11. $V_3(R)$-ல் பின்வரும் கணங்களில் எவை தளங்களாக அமையும்? விடைகளுக்குத் தகுந்த காரணங்கள் கூறவும்.

(a) $\{(1, \pi, 0), (0, \pi, 1), (1, 2, 3)\}$

(b) $\{(1, -1, -1), (1, 0, 1), (-1, -1, 1)\}$

(c) $\{\sqrt{2}, 1, \sqrt{3}), (0, \sqrt{\pi}, 0), (0, 0, \sqrt{6})\}$

(d) $\{(\frac{2}{3}, 0, 0), (0, \sqrt{13}, 0), (0, 0, \sqrt{\pi})\}$

12. F என்பது முடிவிலிக்களமானல் $V_n(F)$-ல் உள்ள வெவ்வேறு தளங்களின் எண்ணிக்கை முடிவிலி ஆகும் என நிறுவுக. [Hint. § 5·14 ஐ உபயோகிக்கவும்].

13. $Q(\sqrt{2})$ என்ற கணம் $Q\sqrt{2} =\{a+\sqrt{2}b \mid a, b, \in Q\}$ என்றவாறு அமைந்துள்ளது. $Q\sqrt{(2)}$ ஆனது, Q-ன் மீது ஓர் அருபவெக்டர் வெளியை அமைக்குமென நிருபித்து, அவ் வெளியிலுள்ள யாதானுமொரு தளத்தைக் கண்டு, அதிலிருந்து அதன் பரிமாணத்தைக் கணக்கிடுக. (Q என்பது விகித முறு எண்களம்)

14. F என்ற களத்தின் குணஎண் (Characteristic of a field) 2 ஆனால் $V_n(F)$ என்ற வெக்டர் வெளியில், $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ என்ற மூன்று வெக்டர்களும் ஒருபடிச்சாராதிருக்குமா என ஆராய்க.

15. (a) R-ன் மீது $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| \, a, d, \in R \right\}$ என்பது ஓர் அரூபவெக்டர் வெளியை அமைக்குமென நிறுவுக. இவ் வெளியில் ஒரு தளத்தைக் கண்டு, அதிலிருந்து இவ்வெளியின் பரிமாணத்தைக் கணக்கிடுக.

(b) $N = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, b, c, d \in R \right\}$ என்ற கணம் R-ன் மீது ஓர் அரூபவெக்டர் வெளியை அமைக்குமென நிறுவுக. இதன் பரிமாணம் என்ன?

(c) $T = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| \, d \in R \right\}$ என்ற கணம் R-ன் மீது ஓர் அரூபவெக்டர் வெளியை அமைக்குமென நிரூபித்து, அதன் பரிமாணம் காண்க.

6. அருபவெக்டர் வெளிகளில் புனல் சார்புகளும், ஓரினச் சார்புகளும்

(Homomorphisms, Isomorphisms)

§ 6·1. வரையறை :

V, W என்பன ஒரே களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளிகளாக இருக்கட்டும். V-யிலிருந்து W-விற்கு ஓர் அமைப்பு மாற்றம் f (mapping) ஆனது,

(i) $\forall X, Y \in V, f: (X+Y) \in V \longrightarrow f(X)+f(Y) \in W$

(ii) $\forall X \in V, \lambda \in F, f: \lambda X \in V \longrightarrow \lambda f(X) \in W$

என்ற நிபந்தனைகளைப் பூர்த்தி செய்தால், அவ்வமைப்பு மாற்றமானது, V-யிலிருந்து W-விற்குச் செல்லும் புனல் சார்பு (homomorphism of V to W) என வரையறுக்கப்படுகிறது.

வரையறையிலிருந்து, V-யிலிருந்து W-விற்கு, ஓர் அமைப்பு மாற்றம் புனல் சார்பாவதற்கு, இவ்விரு வெளிகளில் வரையறுக் கப்பட்ட ஒத்த செயல்களை அவ்வமைப்பு மாற்றம் பாதுகாக்க வேண்டுமென்பதாகும் எனத்தெரிகின்றது. மேலும், ஒரே களத்தின் மீதமைந்த இரு அருபவெக்டர் வெளிகளில் ஒன்றிலிருந்து, மற்றதற்கு வரையறுக்கப்பட்ட புனல் சார்பு ஒருபடி நிலைமாற்றம் (linear transformation) எனப்படும்.

குறிப்பு: ஓர் அருபவெக்டர் வெளியிலிருந்து அதற்கே வரையறுக்கப்படும் புனல் சார்பானது, தன் புனல் சார்பு (endomorphism) எனப்படும்.

சில எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. $f: V_4(F) \longrightarrow V_3(F), f: (x_1, x_2, x_3, x_4) \in V_4 \longrightarrow (x_1, x_2, x_3) \in V_3$

என்பது ஒரு புனல் சார்பு (ஒருபடி நிலைமாற்றம்) ஆகும்.

2. $f: V_3(F) \longrightarrow V_3(F)$, $f: (x_1, x_2, x_3) \in V_3 \longrightarrow (0, -x_2, 0) \in V_3$

என்பது ஒரு புனல் சார்பாகும்.

3. $P_n(R)$-ல் $f: h(x) \longrightarrow h'(x)$ [$h'(x)$ என்பது $h(x)$-ன் வகைக் கெழு (differential coeffts) ஆகும்] என்ற அமைப்பு மாற்றம் $P_n(R)$-லிருந்து, அதற்கே ஒரு புனல் சார்பாகும்.

4. மெய்யெண் களத்தின் மீதமைந்த எல்லா 2×2 அணிகளையும் கொண்ட அருபவெக்டர் வெளி $M_2(R)$-ல்

$f: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ என்பது $M_2(R)$-லிருந்து அதற்கே ஒரு, ஒருபடி நிலைமாற்றமாகும்.

§ 6·2. தேற்றம்:

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளிகள் V, W ஆகியவற்றில், f என்பது V-யிலிருந்து W-விற்கு ஒரு, ஒருபடி நிலைமாற்றமென்ருல்,

(i) $W' = \left\{ f(x) \middle/ X \in V \right\}$ ஆனது W-ல் ஓர் உள்ளடங்கு வெளி.

(ii) $0, 0'$ என்பன முறையே V, W ஆகியவற்றில் உள்ள பூச்சிய உறுப்புகளைக் குறித்தால், $f(0) = 0'$

(iii) $\forall\, x \in V, f(-x) = -f(x)$

(iv) $V' = \{X \in V \mid f(x) = 0'\}$ என்பது V-ல் ஓர் உள்ளடங்கு வெளியாகும்.

நிருபணம்:

(i) W'-ல் $f(x), f(y)$ என்பன யாதானுமிரு உறுப்புகளாக இருக்கட்டும்.

$\therefore\ x \in V, y \in V, f: x \longrightarrow f(x): f: y \longrightarrow f(y)$ $x + y \in V$ ஆதலால், $f(x+y) \in W'$

ஆனுல், $f(x+y) = f(x) + f(y)$

{$\because f$ என்பன ஒரு படிமாற்றம்}

$\therefore\ f(x) + f(y) \in W'$

எனவே, W' ஆனது W-வில் வரையறுக்கப்பட்ட கூட்டலின் கீழ் அடைப்புள்ளது......(1) $\lambda \in F$ என்ருல், $\lambda x \in V$,

$\therefore$ $f(\lambda x) \in W'$ ஆனால், $f(\lambda x) = \lambda f(x) \in W'$

$\therefore$ W' ஆனது W-ல் வரையறுக்கப்பட்ட எண்ணியால் பெருக்கலின் கீழும் அடைப்புள்ளது......(2)

$\therefore$ (1), (2) லிருந்து W' ஆனது W-ல் ஓர் உள்ளடங்கு வெளியாகும்.

(ii) $x \neq 0,\ x \in V,\ 0 \in F$ என்போம்.

$f(\lambda x) = \lambda f(x)$ ஆதலால் $f(0 \cdot x) = 0.\ f(x)$

(அ-து) $f(0) = 0'$

(iii) $\forall x \in V,\ f(-x) = f[(-1)x]$

$= (-1) f(x) = -f(x)$

(iv) $V' = \{x \in V \mid f(x) = 0'\}$. $f(0) = 0'$ ஆதலால், $0 \in V'$ எனவே, V' ஆனது வெறுமைக் கணமல்ல.

$x, y \in V'$ என்றால்,

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$= 0' + 0' \ [\because x, y \in V', f(x) = f(y) = 0']$$
$$= 0'$$

$\therefore$ $x+y \in V'$......(3)

$\lambda \in F$ என்றால் $f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda .\ 0' = 0'$

$\therefore$ $\lambda x \in V'$......(4) (3), (4) லிருந்து, V' ஆனது V-ன் உள்ளடங்கு வெளியாகும்.

§ **6·3.** வரையறை :

V, W என்பன F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளிகளாகட்டும். $f: V \to W$ என்பது, ஒரு, ஒருபடி நிலைமாற்ற மெனின் $V' = \{x \in V \mid f(x) = 0'\}$ என்ற கணம் V-ல் ஓர் உள்ளடங்கு வெளியை அமைக்குமென அறிவோம். இந்த உள்ளடங்கு வெளியானது, ஒருபடி நிலைமாற்றம் f-ன் கெர்னல் (kernel of the linear transformation) என வரையறுக்கப்படுகிறது.

§ **6·4.** $f: V \to W$ என்பது ஒன்றுக்கொன்று அமைப்புமாற்றமாக (one to one mapping) இருந்தால், அது ஒருமையில் ஒருபடி நிலை மாற்றம் (non singular linear transformation) என அழைக்கப் படும். அவ்வாறில்லாவிடில் அது, ஒருமைசேர் ஒருபடி நிலை மாற்றம் (singular linear transformation) எனப்படும்.

§ 6·5. தேற்றம்:

V, W என்பன F-ன் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளிகள். $f: V \rightarrow W$ என்பது V-யிலிருந்து W-விற்கு ஒருபடி நிலைமாற்றமெனின்

(i) "f என்பது ஒருமையில் ஒருபடி நிலைமாற்றம் $\Longleftrightarrow$ f-ன் கெர்னல் $\{0\}$"

(ii) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்பன V-ல் ஒருபடிச்சார்ந்த நிலையிலிருந்தால் $f(x_1), f(x_2) \ldots f(x_n)$ என்பன W-ல் ஒருபடிச்சார்ந்திருக்கும்.

(iii) $f(x_1), \ldots f(x_n)$ என்பன W-ல் ஒருபடிச்சாராதிருந்தால் $x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்பன V-ல் ஒருபடிச்சாராதிருக்கும்.

நிருபணம்:

(i) f என்பது ஒருமையில் ஒருபடி மாற்றமென்போம். f-ன் கெர்னல் V' என்ருல், $V' = \{x \in V \mid f(x) = 0'\}$ x என்பது V'-ல் யாதானுமொரு உறுப்பாக இருக்கட்டும்.

$$\therefore \; f(x)=0' \text{ ஆனுல் } f(0)=0' \quad \therefore \; f(x)=f(0)$$

$$\therefore \; x=0 \; [\because f \text{ என்பது ஒருமையிலாகும்}]$$

$$\therefore \; V' = \{0\}$$

மறுதலையாக, $V' = \{0\}$ எனக் கொள்வோம்.

x, y என்பன V-ல் யாதானுமிரு உறுப்புகளாக இருக்கட்டும். $f(x) = f(y)$ என்ருல், $f(x-y) = f(x) - f(y) = 0'$

$$\therefore \; x-y \in V, \; f(x-y) = 0' \quad \therefore \; x-y \in V'$$

$$\therefore \; x-y=0 \quad [\because V'=\{0\}] \quad \therefore \; x = y$$

$$\therefore \; f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$$

$\therefore$ f என்பது ஒருமையிலாகும்.

(ii) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்பன V-ல் ஒருபடிச் சார்ந்திருக்கட்டும். அப்படியானுல், எல்லாம் பூச்சியமல்லாத, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ என்ற எண்ணிகள் $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$ என்றவாறு அமைந்துள்ளன.

$$\therefore \; f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n) = f(0) = 0'$$

$$\therefore \; \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n) = 0'$$

$\therefore$ $f(x_1), f(x_2) \ldots, f(x_n)$ என்பன ஒருபடிச்சார்ந்துள்ளன.

(iii) $f(x_1), f(x_2) \dots f(x_n)$ என்பன W-ல் ஒருபடிச்சாராதிருக்கட்டும். $[x_1, x_2, \dots, x_n \in V]$

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n \in F, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0$$
$$\Longrightarrow f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) = f(0)$$
$$\Longrightarrow \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n) = f(0')$$
$$\Longrightarrow \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_n = 0.$$

$\therefore$ $x_1, x_2, \dots x_n$ என்பன ஒருபடிச்சாராதவை.

§ 6·6. தேற்றம்:

V, W என்பவை F என்ற களத்தின் மீது அமைந்த அருபவெக்டர் வெளிகளாக இருக்கட்டும். $f: V \longrightarrow W$ என்பது V-யிலிருந்து W-விற்கு, ஒரு, ஒருபடி நிலைமாற்றம் ஒருமையில் ஒருபடி நிலைமாற்றம் ஆவதற்குத் தேவையான, போதுமான விதி, அந்நிலைமாற்றம் ஒருபடிச்சார நிலையைப் பாதுகாக்க வேண்டும் என்பதாகும். [(அ-து) $x_1, x_2, \dots x_r$ என்பவை V-யில் ஒருபடிச்சாரா நிலையிலிருந்தால், $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_r)$ என்பவை W-வில் ஒருபடிச்சாரா நிலையிலிருக்கும்.]

நிரூபணம்:

f என்பது V-யிலிருந்து W-விற்கு, ஒருமையில் ஒருபடிநிலை மாற்றமாக இருக்கட்டும்.

V-யில் ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ள யாதானும் ஒரு கணம் $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ ஐ எடுத்துக்கொள்வோம்.

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in F, \ \ \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_r f(x_r) = 0$ எனின் $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_r x_r) = f(0)$ [$\because$ f என்பது ஒரு, ஒருபடி நிலைமாற்றமாகும்.]

$\therefore$ $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_r x_r = 0$ [$\because$ f என்பது ஒருமையில் ஒருபடி நிலைமாற்றமாகும்]

$\Longrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots \lambda_r = 0$ [$\because$ $\{x_1, x_2, \dots x_r\}$ என்ற கணம் ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ளது]

$$\therefore \ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in F, \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_r f(x_r) = 0'$$
$$\Longrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_r = 0$$

$\therefore$ $\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_r)\}$ என்ற கணம் W-ல் ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ளதாகும்.

மறுதலையாக, f என்ற ஒருபடி நிலைமாற்றம் ஒருபடிச்சாரா நிலையைப் பாதுகாக்கட்டும்........(1)

$$x, y \in V, f(x) = f(y) \Longrightarrow f(x-y) = f(x) - f(y) = 0' = f(0)$$

$\therefore \quad x-y=0 \quad$ [$\because$ $x-y \neq 0$ எனின் $\{x-y\}$ என்ற ஒருறுப்புக் கணம் V-யில் ஒருபடிச்சாரா நிலையிலிருக்கும். $\therefore f(x-y) \neq 0'$ ஆகும். [(1)-லிருந்து]]

$\therefore \quad x = y$

$\therefore \quad f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y.$

$\therefore \quad f$ என்பது ஒருமையில் ஒருபடி நிலைமாற்றமாகும்.

ஒருபடி நிலைமாற்றங்களின் அருபவெக்டர் வெளி (Abstract vector space of linear transformations)

§ 6·7. தேற்றம் :

V, W என்பவை F என்ற களத்தின் மீது அமைந்த அருபவெக்டர் வெளிகளாக இருக்கட்டும். V-யிலிருந்து, W-விற்கு அமையும் எல்லா ஒருபடி நிலைமாற்றங்களையும் கொண்ட கணம் பின்வரும் முறையில் வரையறுக்கப்பட்ட கூட்டல், எண்ணியால் பெருக்கல் ஆகிய செயல்களின் கீழ் F-ன் மீது அருபவெக்டர் வெளியை அமைக்கும்.

கூட்டல் : f_1, f_2 என்பவை V-யிலிருந்து W-விற்கு, யாதானுமிரு, ஒருபடி நிலைமாற்றங்களெனின், $f_1 + f_2$ என்ற அமைப்புமாற்றம் (mapping), $\forall x \in V$, $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$ என்ற முறையில் வரையறுக்கப்படுகிறது.

எண்ணியால் பெருக்கல் : λ என்பது F-ல் யாதானும் ஓர் எண்ணியாக இருந்தால், λf_1 என்ற அமைப்புமாற்றம் (mapping), $\forall x \in V$, $\lambda f_1(x) = \lambda [f_1(x)]$ என்ற முறையில் வரையறுக்கப்படுகிறது.

நிருபணம் :

V-யிலிருந்து W-விற்கு அமையும் எல்லா ஒருபடி நிலைமாற்றங்களையும் கொண்ட கணத்தை $L(V, W)$ என்று குறிப்போம்.

$L(V, W)$ என்ற கணம் வெறுமையற்ற கணமாகும். [$\because$ $\forall\ x \in V, f: x \in V \to 0' \in W$ என்ற ஒருபடி நிலைமாற்றம் $L(V, W)$-ல் உள்ளது].

f_1, f_2 என்பவை $L(V, W)$-ல் யாதானுமிரு ஒருபடி நிலைமாற்றங்களாக இருக்கட்டும்.

$$\therefore \forall\ x, y \in V,\ (f_1+f_2)(x+y) = f_1(x+y) + f_2(x+y)$$
$$= [f_1(x)+f_1(y)]+[f_2(x)+f_2(y)]$$
$$= [f_1(x)+f_2(x)]+[f_1(y)+f_2(y)]$$

[$\because$ W என்பது ஓர் அருப வெக்டர் வெளியாகும்].

$$= (f_1+f_2)(x)+(f_1+f_2)(y)$$

[கூட்டல் வரையறையின்படி] ....(1)

$\lambda \in F$ எனின்,

$$(f_1+f_2)(\lambda x) = f_1(\lambda x)+f_2(\lambda x)$$
$$= \lambda f_1(x)+\lambda f_2(x) = \lambda [f_1(x)+f_2(x)]$$
$$= \lambda \{(f_1+f_2)(x)\} \quad \text{...........(2)}$$

(1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து, $f_1 + f_2$ என்பது V-யிலிருந்து W-விற்கு, ஒரு, ஒருபடி நிலைமாற்றமாகும்.

$\therefore$ $f_1+f_2 \in L(V, W)$

$\therefore$ $L(V, W)$ என்ற கணம் அதில் வரையறுக்கப்பட்ட கூட்டலின் கீழ் அடைப்புள்ளது (closed under addition)......(3)

$0, 0'$ என்பவை, முறையே V, W-ல் பூச்சிய உறுப்புகளையும், 0 என்பது F-ல் உள்ள பூச்சிய உறுப்பையும் குறிக்கட்டும்.

$\forall\ x \in V, f: x \to 0'$ என்ற அமைப்புமாற்றம் V-யிலிருந்து W-விற்கு ஒரு, ஒருபடி நிலைமாற்றமாகும். இதனை 0 என்று குறிப்போம்.

$0 \in L(V, W)$, மேலும் $\forall\ \Phi \in L(V, W)$
$\Phi + 0 = \Phi$ ஆகும்...........(4)

f-என்பது $L(V, W)$-ல், யாதானுமொரு, ஒருபடி நிலைமாற்றமெனின், V-யிலிருந்து W-விற்கு, $-f$ என்ற அமைப்புமாற்றம் (mapping) பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$\forall\, x \in V, (-f)(x) = -[f(x)].$$

$-f$ என்பது ஒருபடி நிலைமாற்றமென எளிதாக நிறுவலாம். மேலும் $f + (-f) = 0$ ஆகும் ....(5)

$f_1, f_2 \in L(V, W)$, எனின் $f_1 + f_2 = f_2 + f_1$ என்பது வெளிப்படையாகும் ....(6)

f என்பது $L(V, W)$-ல் யாதானுமொரு, ஒருபடி நிலைமாற்றமாக இருக்கட்டும். $\lambda \in F$ எனின்,

$$\begin{aligned}\forall\, x, y \in V, (\lambda f)(x+y) &= \lambda [f(x+y)] \\ &= \lambda [f(x)+f(y)] \\ &= \lambda [f(x)] + \lambda [f(y)] \\ &= (\lambda f)(x) + (\lambda f)(y) \quad \text{............} (7)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall\, \mu \in F, x \in V, (\lambda f)(\mu x) &= \lambda [f(\mu x)] \\ &= \lambda [\mu f(x)] \\ &= (\lambda \mu) [f(x)] = (\mu \lambda) [f(x)] \\ &= \mu \{\lambda [f(x)]\} \\ &= \mu \{(\lambda f)(x)\} \quad \text{............} (8)\end{aligned}$$

(7), (8) ஆகியவற்றிலிருந்து λf என்பது V-யிலிருந்து W-விற்கு ஓர், ஒருபடி நிலைமாற்றம் எனத் தெரிகிறது. $\therefore \lambda f \in L(V, W)$.

$\therefore L(V, W)$ என்ற கணம் அதில் வரையறுக்கப்பட்ட எண்ணியால் பெருக்கல் எனுஞ்செயலின்கீழ் அடைப்புள்ளது. [closed under scalar multiplication] ....(9)

f_1, f_2 என்பவை $L(V, W)$-ல் யாதானுமிரு உறுப்புகளாகவும், x என்பது V-ல் எந்த உறுப்பாகவும், λ, μ என்பவை F-ல் யாதானுமிரு எண்ணிகளாகவும் இருந்தால்,

$$\begin{aligned}\{(\lambda+\mu) f_1\}(x) &= (\lambda+\mu)[f_1(x)] = \lambda [f_1(x)] + \mu [f_1(x)] \\ &= (\lambda f_1)(x) + (\mu f_1)(x) = (\lambda f_1 + \mu f_1) x\end{aligned}$$

$\therefore (\lambda + \mu) f_1 = \lambda f_1 + \mu f_1$ [சம அமைப்புமாற்றங்களின் வரையறையின்படி]......(10)

$$\begin{aligned}\{\lambda (f_1+f_2)\}(x) &= \lambda [(f_1+f_2)(x)] = \lambda [f_1(x) + f_2(x)] \\ &= \lambda [f_1(x)] + \lambda [f_2(x)]\end{aligned}$$

$$= (\lambda f_1)(x) + (\lambda f_2)(x)$$
$$= (\lambda f_1 + \lambda f_2)(x)$$

$\therefore \quad \lambda (f_1 + f_2) = \lambda f_1 + \lambda f_2$ ....(11)

$$[(\lambda \mu) f_1](x) = (\lambda \mu) [f_1(x)]$$
$$= \lambda [\mu f_1(x)]$$
$$= \lambda [(\mu f_1)(x)] = \{ \lambda (\mu f_1) \} (x)$$

$\therefore \quad (\lambda \mu) f_1 = \lambda (\mu f_1)$ ....(12)

1 என்பது F-ன் பெருக்கல் அலகைக் குறித்தால்,

$$(1 \cdot f_1)(x) = 1 \cdot \{f_1(x)\} = f_1(x)$$

$\therefore \quad 1 \cdot f_1 = f_1$ ....(13)

(3)—(6), (9)—(13) ஆகியவற்றிலிருந்து $L(V, W)$ என்ற கணம் அதில் வரையறுக்கப்பட்ட கூட்டல், எண்ணியால் பெருக்கல் ஆகிய செயல்களின்கீழ், F-ன் மீது ஓர் அருபவெக்டர் வெளியை அமைக்கிறது.

குறிப்பு: $L(V, W)$ என்ற அருபவெக்டர் வெளி ஒருபடி நிலைமாற்றங்களின் அருபவெக்டர் வெளி என அழைக்கப் படுகிறது. (vector space of linear transformations) ஒருபடி நிலைமாற்றம் ஒவ்வொன்றும் ஒருபுனல் சார்பாதலால் (homomorphism), $L(V, W)$ ஐ புனல் (V, W) அல்லது Hom (V, W) என்று எழுதுவது வழக்கம்.

ஓரினச்சார்பில் உள்ள அருபவெக்டர் வெளிகள் (Isomorphic Abstract Vector Spaces)

6·8. வரையறை ஓரினச்சார்பு: (Isomorphism)

V, W என்பவை ஓரே களம் F-ன் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளிகளாக இருக்கட்டும். V-யிலிருந்து W-விற்கு அமையும் ஒருபுனல் சார்பு (ஒருபடி நிலைமாற்றம்) ஒன்றுக் கொன்று முழு அமைப்புமாற்றமாக இருந்தால் (one-one onto mapping) அச்சார்பு V-யிலிருந்து W-விற்கு ஓர் ஓரினச்சார்பு என வரையறுக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு 1: V-யிலிருந்து W-விற்கு அமையும் ஓர் அமைப்பு மாற்றம் f, பின்வரும் மூன்று விதிகளை நிறைவு செய்தால் அது V-யிலிருந்து W-விற்கு ஓர் ஓரினச்சார்பாகும்.

(i) f என்பது V-யிலிருந்து W-விற்கு ஒன்றுக்கொன்று அமைப்புமாற்றமாக இருக்கவேண்டும். (one-one mapping from V to W).

(ii) f என்பது V-யிலிருந்து W-விற்கு ஒரு, முழு அமைப்பு மாற்றமாக இருக்கவேண்டும். (onto mapping from V to W)

(iii) f என்பது V, W ஆகியவற்றில் வரையறுக்கப்பட்ட ஒத்த செயல்களைப் (respective operations) பாதுகாக்கவேண்டும் (அ-து) f என்பது V-யிலிருந்து W-விற்கு ஓர் ஒருபடி நிலை மாற்றமாக (புனல் சார்பாக) இருக்கவேண்டும்.]

குறிப்பு **2 :** F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-யிலிருந்து அதற்கே அமையும் ஓர் ஓரினச்சார்பு, தன் ஓரினச்சார்பு (automorphism) எனப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. $f: (a_1, a_2, a_3) \in V_3 (R) \longrightarrow (2a_1, a_2, a_3) \in V_3 (R)$ என்ற V_3 (R)-லிருந்து அதற்கே அமையும் அமைப்புமாற்றம், ஓர் ஓரினச் சார்பாகும்.

2. $f: (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in V_3 (R) \longrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 \in P_3 (R)$ என்ற $V_3 (R)$-லிருந்து $P_3 (R)$ற்கு [1·3 எ-கா. 6] அமையும் அமைப்புமாற்றம் ஓர், ஓரினச்சார்பாகும்.

6·9. தேற்றம் :

V, W என்பவை, F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளிகளாக இருக்கட்டும். f என்பது V-யிலிருந்து, W-விற்கு, ஓர், ஓரினச்சார்பெனின், f^{-1} என்ற f-ன் எதிர்மறை அமைப்புமாற்றம், W-லிருந்து, V-க்கு, ஓர், ஓரினச்சார்பாகும்.

நிரூபணம் :

f என்பது V-யிலிருந்து W-விற்கு ஓர், ஓரினச்சார்பு, ஆதலால், f^{-1} என்பது W-விலிருந்து, V-க்கு, ஒன்றுக் கொன்று முழு அமைப்புமாற்றமாகும் (one-one onto mapping from W to V) என்பது வெளிப்படை.

X', Y' என்பவை W-ல் யாதானுமிரு உறுப்புகளாகவும், λ என்பது F-ல் யாதானுமொரு எண்ணியாகவும் இருக்கட்டும்.

f என்பது V-யிலிருந்து W-விற்கு முழு அமைப்புமாற்றம் ஆதலால் [onto mapping],

$$F \quad X, Y \in V, \quad f(x)=X', f(y)=Y'$$

மேலும், $f^{-1}(x')=X$, $f^{-1}(y')=Y$ ஆகும்.

$f(x+y)=f(x)+f(y)=X'+Y'$ ஆதலால்,

$$f^{-1}(x'+y')=X+Y=f^{-1}(x')+f^{-1}(y') \qquad \text{.........(1)}$$

$f(\lambda x)=\lambda f(x)=\lambda X'$ ஆதலால்,

$$f^{-1}(\lambda x')=\lambda x=\lambda f^{-1}(x') \qquad \text{.........(2)}$$

(1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து f^{-1} என்ற அமைப்புமாற்றம், W-விலிருந்து V-க்கு, ஓர், ஒருபடி நிலைமாற்றமாகும்.

ஆனால், f^{-1} என்பது ஒன்றுக்கொன்று முழு அமைப்புமாற்றம் ஆதலால், f^{-1} என்பது W-விலிருந்து V-யினுக்கு, ஓர், ஓரினச்சார்பாகும்.

குறிப்பு: V-யிலிருந்து W-விற்கு, ஓர், ஓரினச்சார்பு f இருந்தால், அச்சார்பின் எதிர்மறைச்சார்பு W-விலிருந்து V-க்கு ஓர், ஓரினச்சார்பாகும் எனத் தெரிகிறது. ஆகையால், V-யிலிருந்து W-விற்கு ஓர், ஓரினச்சார்பு இருந்தால், V, W என்பன ஓரினச்சார்பில் உள்ள அருபவெக்டர் வெளிகள் (isomorphic abstract vector spaces) என அழைக்கப்படுகிறது. இதனை V, W என எழுதுவோம்.

6·10. தேற்றம்:

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த, வெளிப்படையல்லாத முடிவுள்ள பரிமாணம் கொண்ட, V, W என்ற இரு அருபவெக்டர் வெளிகளில், f என்பது V-யிலிருந்து W-விற்கு, ஓர், ஓரினச்சார்பாகுமெனின்,

(a) $f(0)=0'$ [$0, 0'$ என்பவை முறையே V, W ஆகியவற்றில் பூச்சிய உறுப்பைக் குறிக்கும்.]

(b) f, ஒருபடிச்சேர்வுகளைப் பாதுகாக்கின்றது. (அ-து) V-ல் உள்ள X எனும் உறுப்பு, $x_1, x_2, \ldots, x_r$ என்ற V-ல் உள்ள உறுப்புகளின் ஒருபடிச்சேர்வானால், W-ல் உள்ள $f(x)$ எனும் உறுப்பு, $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_r)$ என்ற உறுப்புகளின் (அதே எண்ணிகளால் அமைக்கப்பட்ட) ஒருபடிச்சேர்வாகும்.

(c) ஒருபடிச்சார்ந்த நிலையும், சாரா நிலையும், f-ஆல் பாதுகாக்கப்படுகிறது.

(d) $d(V) = d(W)$ ஆகும்.

நிரூபணம் :

f என்பது V-யிலிருந்து W-விற்கு ஓரினச்சார்பு ஆதலால், அது ஒருமையில் ஒருபடி நிலைமாற்றமாகும். ∴ தேற்றம் 6·2, 6·5, 6·6 ஆகியவற்றிலிருந்து (a), (c) என்ற பகுதிகள் உண்மை என்று தெரிகிறது.

(b) $x_1, x_2, \ldots, x_r \in V$, $X = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_r x_r$
$[\lambda_1 \lambda_2, \ldots \lambda_r \in F]$

எனின்,
$$\begin{aligned} f(x) &= f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots \lambda_r x_r) \\ &= f(\lambda_1 x_1) + f(\lambda_2 x_2) + \ldots + f(\lambda_r x_r) \\ &= \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_r f(x_r) \end{aligned}$$

∴ W-ல் உள்ள $f(x)$ எனும் உறுப்பு, $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_r)$ என்ற உறுப்புகளின் $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ என்ற எண்ணிகளால் அமைக்கப்பட்ட ஒருபடிச்சேர்வாகும்.

(d) $d(V) = m$, $d(W) = n$ என்க [m, n என்பவை முடிவுள்ள பாசிட்டிவ் முழு எண்கள், $m, n > 0$]

$d(V) = m$ ஆதலால், தேற்றம் 5·8, ii-ன்படி, V-ல் m உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு தளம் உண்டு. அதனை $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ எனக்கொள்வோம். B என்ற கணம் V-யில் ஒருபடிச் சாரா நிலையிலுள்ளதால், $\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_m)\}$ என்ற கணம் W-ல் m உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ள கணமாகும் [பகுதி c-யிலிருந்து]

$d(W) = n$ ஆதலால், $m \leq n$ ஆகும் [வரையறை 5.5]......(1)

$d(W) = n$ ஆதலால், தேற்றம் 5·8, ii-ன்படி, W-ல், n-உறுப்புகளைக் கொண்ட தளம் ஒன்றுண்டு. அதனை $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ எனக்கொள்வோம். f^{-1} என்ற அமைப்புமாற்றம் W-லிருந்து, V-க்கு, ஓர், ஓரினச்சார்பாதலால், $\{f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2), \ldots, f^{-1}(y_n)\}$ என்ற கணம் V-ல் n உறுப்புகளை கொண்ட ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ள கணமாகும். $d(V) = m$ ஆதலால், $n \leq m$ ஆகும் [வரையறை 5.5] ....(2)

(1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து, $n=m$ ஆகும்.

(அ-து) $d(V)=d(W)$.

6·11. முடிவுள்ள பரிமாணங்கள் கொண்ட அருபவெக்டர் வெளிகளில் ஓரினச்சார்புத் தேற்றம்: (Isomorphism theorem for finite dimensional abstract vector spaces)

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த வெளிப்படையல்லாத n-பரிமாணம் கொண்ட [n என்பது முடிவுள்ள பாசிட்டிவ் முழு எண், $n>0$] அருபவெக்டர் வெளி V-யும், $V_n(F)$ என்ற அருபவெக்டர் வெளியும் ஓரினச்சார்பில் உள்ளவையாகும்.

நிரூபணம்:

$d(V)=n$ ஆதலால், தேற்றம் 5.8, ii-ன்படி, V-ல் n உறுப்புகளைக் கொண்ட தளம் ஒன்றுண்டு. அதனை $B=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ எனக்கொள்வோம்.

X என்பது V-யில் எந்த ஓர் உறுப்பாகவும் இருந்தால், $X = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$ $[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in F]$ ஆகும். மேலும், $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ என்ற எண்ணிகள் தனித்தன்மை வாய்ந்தவையாகும். [தேற்றம். 5·3]

ஆதலால், V-ல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பு X-ற்கும், $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ போன்ற தனித்தன்மை வாய்ந்த வரிசைப்பட்ட, n-கூறுகள் தொடர்பு படுத்தப்படுகிறது.

ஆகையால், V-லிருந்து $V_n(F)$ ற்கு, f என்ற அமைப்பு மாற்றத்தைப் பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

$X \in V$, $X= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots \ldots \lambda_n x_n$ எனின்

$$f: X \in V \longrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in V_n(F)$$

X, Y என்பவை V-ல் யாதானுமிரு உறுப்புகளாகஇருக்கட்டும். $X = \lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+ \ldots +\lambda_n x_n$, $Y = \mu_1 x_1+\mu_2 x_2+ \ldots +\mu_n x_n$ என்க.

$$f(X)=f(Y) \implies (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)=(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$$
$$\implies \lambda_1=\mu_1,\ \lambda_2=\mu_2, \ldots \lambda_n=\mu_n$$
$$\implies X=Y$$

$\therefore$ f என்பது ஒன்றுக்கொன்று அமைப்பு மாற்றமாகும்...(1)

$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ என்பது $V_n(F)$ ல் யாதானுமொரு வெக்டராக

இருக்கட்டும். $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ என்பவை F-ல் உள்ள எண்ணிகள் ஆதலால், $Z = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$ என்ற உறுப்பு V-ல் இருக்கும். மேலும், $f: Z \in V \longrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in V_n(F)$ ஆகையால் f என்பது முழு அமைப்புமாற்றமாகும் ....(2)

$X = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$, $Y = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_n x_n$ என்பவை V-ல் யாதானுமிரு உறுப்புகளெனின்,

$$\begin{aligned} f(X+Y) &= f[(\lambda_1+\mu_1)x_1 + (\lambda_2+\mu_2)x_2 + \ldots + (\lambda_n+\mu_n)x_n] \\ &= (\lambda_1+\mu_1, \lambda_2+\mu_2, \ldots, \lambda_n+\mu_n) \\ &= (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) + (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) \\ &= f(X) + f(Y) \qquad \ldots\ldots\ldots(3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in F, f(\alpha x) &= f[(\alpha\lambda_1)x_1 + (\alpha\lambda_2)x_2 + \ldots + (\alpha\lambda_n)x_n] \\ &= (\alpha\lambda_1, \alpha\lambda_2, \ldots \alpha\lambda_n) \\ &= \alpha(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) = \alpha f(x) \qquad \ldots\ldots\ldots(4) \end{aligned}$$

(1)-(4)-லிருந்து, f என்ற அமைப்புமாற்றம், V-லிருந்து, $V_n(F)$-ற்கு ஓர் ஓரினச்சார்பாகும் என்பது தெளிவு.

$\therefore \quad V \simeq V_n(F)$

கிளைத்தேற்றம். 1 :

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த வெளிப்படையல்லாத முடிவுள்ள பரிமாணம் கொண்ட இரு அரூபவெக்டர் வெளிகள், ஓரினச்சார்பில் உள்ள வெளிகள் ஆவதற்குத் தேவையான, போதுமான விதி, அவ்விரு வெளிகளும் சம பரிமாணம் கொண்டவையாக இருக்கவேண்டும் என்பதாகும்.

நிரூபணம் :

V, W என்பவை F என்ற களத்தின் மீதமைந்த முடிவுள்ள பரிமாணம் கொண்ட வெளிப்படையல்லாத அரூபவெக்டர் வெளிகளாக இருக்கட்டும். $V \simeq W$ எனின், $d(V) = d(W)$ ஆகும். [தேற்றம். 6.10]

மறுதலையாக, $d(V) = d(W) = n$ எனின் [n என்பது முடிவுள்ள பாசிட்டிவ் முழு எண், $n > 0$], $V \simeq V_n(F)$, $W \simeq V_n(F)$ ஆகும். [தேற்றம். 6.11]

$\therefore \quad V \simeq V_n(F), \quad V_n(F) \simeq W$ [$\because$ "ஓரினச்சார்பில் உள்ளது" எனும் தொடர்பு சமச்சீர் தொடர்பாகும்.]

$\therefore \quad V \simeq W$

குறிப்பு 1: கொடுத்த களத்தின் மீதமையும், கொடுத்த (முடிவுள்ள) பரிமாணம் கொண்ட அருபவெக்டர் வெளி, ஓரினச்சார்பு வரை (upto isomorphism) ஒன்றே ஒன்றுதான் உண்டு எனக்கூறலாம்.

குறிப்பு 2: V-ல் வெவ்வேறு தளங்களை எடுத்துக் கொண்டு, V-லிருந்து V_n (F)-ற்குப் பல ஓரினச்சார்புகளை அமைக்கலாம்.

கிளைத்தேற்றம். 2:

ஒவ்வொரு முடிவுள்ள பரிமாணம் கொண்ட, வெளிப்படையல்லாத அருபவெக்டர் வெளியிலும், அதிலுள்ள யாதானுமொரு தளத்தை, அதிலுள்ள மற்ளொரு தளத்திற்கு எடுத்துச்செல்லும் தன் ஓரினச்சார்பு (automorphism) ஒன்றுண்டு.

நிரூபணம் :

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த வெளிப்படையல்லாத n-பரிமாணம் கொண்ட [n என்பது முடிவுள்ள மிகை முழு எண், $n > 0$] அருபவெக்டர் வெளி V-ல் $B_1=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்பது யாதானுமொரு தளமாகவும், $B_2=\{x_1', x_2', \ldots, x_n'\}$ என்பது V-ல் மற்ளொரு தளமாகவும் இருக்கட்டும்.

V-ல் X என்பது எந்த ஓர் உறுப்பாகவும் இருக்கட்டும். $X=\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ldots+\lambda_n x_n$ $[\lambda_i \in F]$ எனின்,

$f: X \longrightarrow X' = \lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2' + \ldots + \lambda_n x_n'$ என்பது V-லிருந்து V-க்கு, ஓர் அமைப்புமாற்றமாகும். (mapping) மேலும், $X = \lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$, $Y = \mu_1 x_1+\mu_2 x_2 + \ldots + \mu_n x_n$ என்பவை V-ல் யாதானுமிரு உறுப்புகளாக இருக்கட்டும்.

$$
\begin{aligned}
f(X) = f(Y) &\Longrightarrow \lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2' + \ldots + \lambda_n x_n' \\
&\qquad = \mu_1 x_1' + \mu_2 x_2' + \ldots + \mu_n x_n' \\
&\Longrightarrow (\lambda_1-\mu_1)\, x_1' + (\lambda_2-\mu_2)\, x_2' + \ldots + \\
&\qquad\qquad (\lambda_n-\mu_n)\, x_n' = 0] \\
&\Longrightarrow \lambda_1-\mu_1=0,\ \lambda_2-\mu_2=0,\ \ldots\ \lambda_n-\mu_n=0
\end{aligned}
$$

[$\because$ B_2 என்ற கணம் V-ல் ஒரு தளமாகும்.]

$$
\begin{aligned}
&\Longrightarrow \lambda_1=\mu_1,\ \lambda_2=\mu_2,\ \ldots\ \lambda_n=\mu_n \\
&\Longrightarrow X = Y
\end{aligned}
$$

$\therefore$ f என்பது ஒன்றுக்கொன்று அமைப்புமாற்றமாகும்...(1)

Z' என்பது V-ல் யாதானுமொரு உறுப்பாக இருக்கட்டும். B_2 என்ற கணம் V-ல் ஒரு தளம் ஆதலால், $Z' = \alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2' \ldots + \alpha_n x_n'$ ஆகும். $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F]$

$$\therefore \; F \;\; Z = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n \in V,$$
$$f : Z \in V \longrightarrow Z' \in V$$

$\therefore$ f என்பது ஒரு முழு அமைப்புமாற்றமாகும் ....(2)

$\forall X, Y \in V, \alpha \in F, \; [X = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n,$
$Y = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_n x_n$
எனக்கொள்வோம்.

$$\begin{aligned} f(X+Y) &= f\,[(\lambda_1+\mu_1)\,x_1 + (\lambda_2+\mu_2)\,x_2 + \ldots + (\lambda_n+\mu_n)\,x_n] \\ &= (\lambda_1+\mu_1)\,x_1' + (\lambda_2+\mu_2)\,x_2' + \ldots + (\lambda_n+\mu_n)\,x_n' \\ &= \lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2' + \ldots + \lambda_n x_n' + \mu_1 x_1' + \mu_2 x_2' + \ldots \\ &\qquad + \mu_n x_n' \\ &= f(X) + f(Y) \qquad \ldots\ldots\ldots(3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\alpha\, x) &= f\,[(\alpha\,\lambda_1)\,x_1 + (\alpha\,\lambda_2)\,x_2 + \ldots + (\alpha\,\lambda_n)\,x_n] \\ &= (\alpha\,\lambda_1)\,x_1' + (\alpha\,\lambda_2)\,x_2' + \ldots + (\alpha\,\lambda_n)\,x_n' \\ &= \alpha\,[\lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2' + \ldots + \lambda_n x_n'] = \alpha[f(x)] \ldots\ldots(4) \end{aligned}$$

(1) – (4)-லிருந்து, f என்ற அமைப்புமாற்றம், V-லிருந்து அதற்கே ஓர் ஓரினச்சார்பாகும் என்பது தெளிவு. அதாவது, f என்பது, V-ன், ஒரு தன் ஓரினச்சார்பு (automorphism of V) ஆகும்.

மேலும், $X_i = 0 \cdot x_1 + \ldots + 1 \cdot x_i + \ldots + 0 \cdot x_n \;\; [1 \leqslant i \leqslant n]$

ஆதலால், $f(X_i) = 0 \cdot x_1' + \ldots + 1 \cdot x_i' + \ldots + 0 \cdot x_n'$
$= X_i'$

ஆகையால் f என்ற தன் ஓரினச்சார்பு, V-ல் உள்ள தளம் B_1 ஐ, மற்றொரு தளமாகிய B_2-விற்கு எடுத்துச்செல்கிறது.

குறிப்பு: மேற்கூறிய தேற்றத்திலிருந்து, வெளிப்படையல்லாத முடிவுள்ள பரிமாணம் கொண்ட ஓர் அருபவெக்டர் வெளியில் எல்லாத்தளங்களும் சரிநிகரானவை [all bases of an abstract vector space are eqiuvalent] எனக் கூறலாம்.

6·12. கூற்றுத் தொகுதிகள் (Coordinate Systems)

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த வெளிப்படையல்லாத n-பரிமாணம் கொண்ட [n என்பது முடிவுள்ள மிகை முழு எண், $n>0$] அருபவெக்டர் வெளி V-ல் $B=\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ என்ற வரிசையிட்ட தளத்தை (ordered basis) எடுத்துக்கொள்வோம். [B-ல் உள்ள உறுப்புகளின் வரிசைக்கும் முக்கியத்துவம் அளிக்கப்படுகிறது. (அ-து) B-ல் உள்ள உறுப்புகளின் வரிசையை மாற்றி அமைப்பதால் கிடைக்கும் தளம் B-யிலிருந்து வேறுபட்ட தளமாகும்]

V-ல் உள்ள எந்த உறுப்பு Xஐயும், $X=\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ldots+\lambda_n x_n$ [$\lambda_i \in F$] என எழுதலாம். இதில் $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ என்ற எண்ணிகள் தனித்தன்மை வாய்ந்தவையாகும். மேலும், தேற்றம் 7·11-ல் இருந்து, B என்ற தளத்தைக் கொண்டு, V-யிலிருந்து $V_n(F)$ற்கு ஓர் ஓரினச்சார்பை வரையறுக்கலாம் என்பதும், அச்சார்பு, X என்ற உறுப்பை, $V_n(F)$-ல் உள்ள ஒரே ஒரு வரிசையிட்ட n-கூறு $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ களுக்கு (unique ordered n-tuple) எடுத்துச் செல்லும் என்பதும் தெளிவு.

V-ல் உள்ள யாதானுமொரு வரிசையிட்ட தளம் Bயைக் கொண்டு, V-ல் உள்ள உறுப்பு X உடன் தொடர்பு படுத்தப்படும் $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ என்ற ஒரே ஒரு வரிசையிட்ட n-கூறில் உள்ள உறுப்புகள் (components) B-யைச் சார்ந்த X-ன் கூறுகள் (coordinates of X w. r. t. B) என அழைக்கப்படுகின்றன. $\alpha=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ என்ற $V_n(F)$ல் உள்ள வெக்டர், V-ல் உள்ள X என்ற உறுப்பை, V-ல் உள்ள வரிசையிட்ட தளம் B-யைச் சார்ந்து குறியீடு செய்கின்றது என்றும் கூறலாம். இதனை $\alpha=R(X, B)$ என்று எழுதுவது வழக்கம்.

V-ல் வெவ்வேறு வரிசையிட்ட தளங்களை எடுத்துக் கொண்டு, V-ல் உள்ள எந்த ஒரு பூச்சியமல்லாத உறுப்பையும், $V_n(F)$ல் உள்ள வெவ்வேறு வெக்டர்களால் குறியீடு செய்யலாம். ஆதலால், V-ல் உள்ள பூச்சியமல்லாத உறுப்பின் கூறுகள், நாம் எடுத்துக்கொள்ளும் வரிசையிட்ட தளத்தினைப் பொறுத்தவையாகும். V-ல் உள்ள பூச்சிய உறுப்பு மட்டும், அதில் எந்த வரிசையிட்ட தளத்தினை எடுத்துக் கொண்டாலும், அவற்றைச் சார்ந்து, $V_n(F)$ல் உள்ள பூச்சிய வெக்டரால் மட்டுமே குறியீடு செய்யப்படுகின்றது.

மாதிரி 1: F என்ற களத்தின் மீதமைந்த வெளிப்படையல்லாத, முடிவுள்ள பரிமாணங்கள் கொண்ட அருபவெக்டர்

வெளி V, W ஆகியவற்றில், f என்பது V-யிலிருந்து W-விற்கு, ஒரு முழு ஒருபடி நிலைமாற்றமாகுமெனின் (onto linear transformation) $d(W) \leqslant d(V)$ என நிறுவுக. மேலும் f' என்பது W-விலிருந்து, V-யினுக்கு ஒரு முழு ஒருபடிநிலைமாற்றமெனின் $d(V) = d(W)$ ஆகும் எனவும் நிறுவுக.

நிருபணம் :

$d(V) = m$, $d(W) = n$ எனக்கொள்வோம். $d(W) = n$ ஆதலால், W-வில் n-உறுப்புகளைக் கொண்ட தளம் ஒன்று உண்டு. அதனை $B = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ எனக்கொள்வோம். f என்பது V-யிலிருந்து W-விற்கு ஒரு முழு ஒருபடி நிலைமாற்றம் ஆதலால், F $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$, $f(X_1) = y_1$, $f(X_2) = y_2, \ldots,$ $f(X_n) = y_n$ ஆகும்.

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in F$, $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$ எனின்,

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n) = f(0) = 0'$$

$$\therefore \lambda_1 f(X_1) + \lambda_2 f(X_2) + \ldots + \lambda_n f(X_n) = 0'$$

$$\therefore \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots + \lambda_n y_n = 0'$$

$\therefore \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$ [$\because$ B என்பது W-ல் ஒரு தளமாகும்.]

$\therefore$ $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்ற கணம் V-ல் ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ளது. ஆனால், $d(V) = m$ ஆகும்.

$\therefore n \leqslant m$ [வரையறை 5.5]

(அ-து) $d(W) \leqslant d(V)$

f' என்பது W-விலிருந்து V-யினுக்கு, ஒரு முழு ஒருபடி நிலைமாற்றமெனின், மேற்கூறிய வழியைப் பின்பற்றி, $d(V) \leqslant d(W)$ என நிறுவலாம். $\therefore$ $d(V) = d(W)$ ஆகும்.

மாதிரி 2: F என்ற களத்தின் மீதமைந்த, வெளிப்படையல்லாத, முடிவுள்ள பரிமாணங்கள் கொண்ட அரூபவெக்டர் வெளி V, W ஆகியவற்றில், f_1, f_2 என்பவை V-யிலிருந்து W-விற்குச் செல்லும் இரு, ஒருபடி நிலைமாற்றங்களாகும். $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்பது V-ல் ஒரு தளமாகும். $f_1(X_i) = f_2(X_i)$ [$i = 1$ முதல் n முடிய] எனின் $f_1 = f_2$ என நிறுவுக.

நிரூபணம் :

X என்பது V-ல் யாதானும் ஓர் உறுப்பாக இருக்கட்டும். $X=\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ldots+\lambda_n x_n \quad [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in F]$ என எழுதலாம்.

$[\because \ \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்ற கணம் V-ல் ஒருதளமாகும்.$]$

$$\begin{aligned} f_1(X) &= f_1[\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n] \\ &= \lambda_1 f_1(x_1) + \lambda_2 f_1(x_2) + \ldots + \lambda_n f_1(x_n) \\ &= \lambda_1 f_2(x_1) + \lambda_2 f_2(x_2) + \ldots + \lambda_n f_2(x_n) \\ &\qquad [\text{தரவின் படி } f_1(X_i) = f_2(X_i)\ 1 \leqslant i \leqslant n] \\ &= f_2(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n) \\ &= f_2(X) \end{aligned}$$

$$\therefore \ \forall X \in V, f_1(X) = f_2(X) \quad \therefore \ f_1 = f_2$$

மாதிரி 3 : $V_4(R)$-ல் [R என்பது மெய்யெண் களத்தைக் குறிக்கும்], E_1, E_2, E_3, E_4 என்ற அலகு வெக்டர்களின் $B=\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 3), (0, 1, 0, 3)\}$ என்ற தளத்தைச்சார்ந்த கூற்றுத்தொகுதிகள் யாவை ?

நிரூபணம் :

$E_1 = (1, 0, 0, 0) = \lambda_1(1, 1, 0, 0) + \lambda_2(0, 0, 1, 1) + \lambda_3(1, 1, 0, 3) + \lambda_4(0, 1, 0, 3)$

இதிலிருந்து $\lambda_1=0, \lambda_2=0, \lambda_3=1, \lambda_4=-1$ எனக்கிடைக்கும்.

ஆகையால், B-யைச் சார்ந்த E_1-ன் கூற்றுத்தொகுதி $= (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (0, 0, 1, -1)$.

அதாவது $(0, 0, 1, -1)=R(E_1, B)$ ஆகும்.

இதே போன்று $(1, 0, -1, 1) = R(E_2, B)$, $(\frac{1}{3}, 1, -\frac{1}{3}, 0) = R[E_3, B]$, $(-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0)=R[E_4 B]$ என்றும் நிரூபிக்கலாம்.

மாதிரி 4: மெய்யெண் குணகங்களைக் கொண்ட x எனும் மாறியில் 2 அல்லது அதற்குக் குறைவான படியைக் கொண்ட எல்லா பல்லுறுப்புக் கோவைகளையும், பூச்சியத்திற்கு முற்றிலும் சமமான கோவையையும் கொண்ட $P_3(R)$ என்ற கணம், மெய்யெண் களத்தின் மீது பரிமாணம் 3 கொண்ட அரூபவெக்டர் வெளியை அமைக்கிறது என நிறுவுக. இவ்வெளியில் $f_1(x)$, $f_2(x), f_3(x)$ என்ற யாதானும் மூன்று இருபடிக்கோவைகள் ஒரு தளத்தை அமைப்பதற்குரிய நிபந்தனையைக் காண்க.

மேலும், $\{x^2 + x, x^2 - x, x + 1\}$ என்பது $P_3(R)$ ல் ஒரு தளம் ஆனுல் $2x^2 - 7x + 3$ என்ற $P_3(R)$ ல் உள்ள உறுப்பைக் குறிக்கும் $V_3(R)$ ல் உள்ள வெக்டரைக் காணவும்.

நிரூபணம் :

$P_3(R)$ என்பது R-ன் மீது அருபவெக்டர் வெளியை அமைக்கும் என்றும், அதில் $\{1, x, x^2\}$ என்ற மூன்று உறுப்புகளைக் கொண்ட கணம் ஒரு தளமாகும் என்றும் எளிதாக நிறுவலாம். $\therefore \; d[P_3(R)] = 3$ ஆகும்.

$$f_1(x) = a_1 x^2 + b_1 x + c_1, \quad f_2(x) = a_2 x^2 + b_2 x + c_2,$$
$$f_3(x) = a_3 x^2 + b_3 x + c_3$$

என்ற மூன்று இருபடிக்கோவைகளை எடுத்துக்கொள்வோம். $[a_i, b_j, c_k \in R]$.

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \in R, \; \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$ எனின்,

$$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3) x^2 + (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3) x + (\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3) = 0$$

$$\therefore \left.\begin{array}{l} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0 \\ \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = 0 \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3 = 0 \end{array}\right\}$$

[$\because$ $\{1, x, x^2\}$ என்ற கணம் ஒரு தளமாகும்] ....(1)

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ எனின் } (1) \Longrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$$

(அ-து) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$ எனின் $\{f_1, f_2, f_3\}$ என்ற கணம் ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ளது எனக் கிடைக்கிறது. இதில் மூன்று உறுப்புகள் உள்ளதாலும் $d[P_3(R)] = 3$ ஆதலாலும் $\{f_1, f_2, f_3\}$ என்ற கணம் $P_3(R)$-ல் ஒரு தளமாகும்.

$B = \{x^2 + x, x^2 - x, x + 1\}$ என்ற கணம் $P_3(R)$-ல் ஒரு தளமாகும் என எளிதாக நிறுவலாம்.

$2x^2 - 7x + 3 = \lambda_1 (x^2 + x) + \lambda_2 (x^2 - x) + \lambda_3 (x + 1)$ எனின் $\lambda_1 = -4, \; \lambda_2 = 6, \; \lambda_3 = 3$ ஆகும்.

$\therefore \; (-4, 6, 3)$ என்ற $V_3(R)$-ல் உள்ள வெக்டர் $2x^2 - 7x + 3$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவை B-ஐச் சார்ந்து குறியீடு செய்கின்றது.

பயிற்சி 7

1. V, W என்பவை F-என்ற களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளிகளாகும். V-யிலிருந்து W-விற்குச் செல்லும் f என்ற அமைப்புமாற்றம் புனல்சார்பு ஆவதற்குத் [ஒருபடி நிலைமாற்றம் ஆவதற்கு] தேவையான, போதுமான விதி, $\forall\ X, Y \in V, \lambda, \mu \in F, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ என்று இருக்கவேண்டும் என்பதாகும் என நிறுவுக.

2. பின்வருவனவை $V_4(R)$ விருந்து அதற்கே அமையும் அமைப்பு மாற்றங்களாகும் (mappings) அவற்றில் எவை ஒருபடி நிலைமாற்றங்கள் என ஆராயவும்.

(i) $f_1 : (x_1, x_2, x_3, x_4) \longrightarrow (2x_1, 3x_2, -x_3, -x_4)$

(ii) $f_2 : (x_1, x_2, x_3, x_4) \longrightarrow (-x_1, x_2, -x_3, x_4)$

(iii) $f_3 : (x_1, x_2, x_3, x_4) \longrightarrow (x_2, x_3, x_4, x_1)$

(iv) $f_4 : (x_1, x_2, x_3, x_4) \longrightarrow (0, 2x_2, 3x_3, 4x_4)$

3. மேற்கூறிய அமைப்புமாற்றங்களில் எவை எவை ஓரினச்சார்புகள் ஆகும்?

4. F என்ற களத்தின் மீதமைந்த முடிவுள்ள பரிமாணம் கொண்ட அருபவெக்டர் வெளி V-ன் f -என்பது ஒரு தன் புனல்சார்பு ஆகும் (endomorphism) என்றால் பின்வருவனவை சரி நிகரானவை என நிறுவுக.

(i) f என்பது V-ன், ஒரு தன் ஓரினச்சார்பு.

(ii) f என்பது V-யிலிருந்து அதற்கே ஓர் ஒன்றுக்கொன்று அமைப்புமாற்றம்.

(iii) f என்பது V-யிலிருந்து அதற்கே ஒரு முழு அமைப்பு மாற்றம்.

5. 6·1 எடுத்துக்காட்டு (1)-ல் உள்ள ஒருபடி நிலை மாற்றத்தின் கெர்னலைக் காண்க. இந்நிலைமாற்றம் ஒரு முழு நிலைமாற்றமா?

6. $\{(2, -3, 1), (0, 1, 2), (1, 1, -2)\}$ என்ற கணம் $V_3(R)$-ல் ஒரு தளத்தினை அமைக்கும் என நிறுவி. (α, β, r) என்ற $V_3(R)$-ல் உள்ள வெக்டரின் இத்தளத்தைச்சார்ந்த கூறுகளைக் காண்க.

7. $\{(2i, 1, 0), (2, -i, 1), (0, 1+i, 1-i)\}$ என்ற கணம் $V_3(C)$ யில் ஒரு தளத்தினை அமைக்குமென நிறுவுக. $(1, 1, 0)$ என்ற வெக்டரின் இத்தளத்தினைச் சார்ந்த கூறுகள் யாவை?

8. $\{(\pi, 0, 1), (0, 2, 0), (0, 0, \sqrt{2})\}$ என்ற கணம் $V_3(R)$-ல் ஒரு தளத்தினை அமைக்குமா? அவ்வாறு அமைந்தால், $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ ஆகிய வெக்டர்களின் அத்தளத்தினைச் சார்ந்த கூறுகள் யாவை?

9. F என்ற களத்தின் மீதமைந்த முடிவுள்ள பரிமாணம் கொண்ட அருபவெக்டர் வெளி V-யின் ஒரு தன்புனல்சார்பு f என்பது பின்வரும் நிபந்தனையை நிறைவு செய்தால், அது V-ன் ஒரு தன் ஓரினச்சார்பாகும் என நிரூபிக்க. நிபந்தனை : $f(X_1), f(X_2)......, f(X_n)$ என்பவை ஒருபடிச்சாரா நிலையில் இருக்குமாறு $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ என்ற ஒருதளம் V-ல் உள்ளது.

10. மெய்யெண் களத்தின் மீதமைந்த எல்லா 2×2 அணிகளையும் கொண்ட அருபவெக்டர் வெளி $M_2(R)$-ல் $\{\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)\}$ என்ற கணம் ஒரு தளமாகும் என நிறுவுக. $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ என்ற அணியின் இத்தளத்தைச் சார்ந்த கூறுகள் யாவை?

7. ஒருபடிச் சார்புகளும் துணை வெளிகளும்

[Linear Functions and Dual Spaces]

7·1. வரையறை ஒருபடிச்சார்பு : (Linear Function)

V என்பது F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளியாக இருக்கட்டும். V-யிலிருந்து F-ற்குச் செல்லும் ஒரு அமைப்புமாற்றம் (mapping from V to F) f என்பது பின்வரும் நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்தால் அது V-ன் மீது ஓர், ஒருபடிச்சார்பு (linear function on the abstract vector space V) என வரையறுக்கப்படுகிறது.

(i) $\forall \;\; x, y \in V, \;\; f: (x+y) \in V \longrightarrow f(x) + f(y) \in F$

(ii) $\forall \;\; x \in V, \; \lambda \in F, \; f: (\lambda x) \in V \longrightarrow \lambda f(x) \in F$

குறிப்பு: F என்ற களத்தை F-ன் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளியாகக் கருதலாம் என்று முன்னரே அறிந்திருக்கிறோம். [1·3 எ-கா 2.] ஆகையால், F-ன் மீது அமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-யின் மீது வரையறுக்கப்பட்ட ஒருபடிச்சார்பு அருபவெக்டர் வெளி V-யிலிருந்து அருபவெக்டர் வெளி F-ற்கு, ஓர், ஒருபடி நிலைமாற்ற (linear transformation) மாகும். ஆகையால், ஒருபடிச்சார்பின் வரையறையைப் பின்வருமாறும் கூறலாம்.

"F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-யிலிருந்து, அருபவெக்டர் வெளி F-ற்கு அமையும் புனல் சார்பே (ஒருபடி நிலைமாற்றமே) V-ன் மீதமையும் ஒருபடிச்சார்பு (linear function) என வரையறுக்கப்படுகிறது."

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. F-ல், $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ என்ற யாதானும் n-எண்ணிகளை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$f: (x_1, x_2, ..., x_n) \in V_n(F) \longrightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n \in F$ என்ற $V_n(F)$-லிருந்து F-ற்கு அமைப்புமாற்றம், $V_n(F)$-ன் மீதமைந்த ஒருபடிச்சார்பு (linear function) ஆகும். குறிப்பாக, $f: (x_1, x_2, ..., x_n) \in V_n(F) \longrightarrow x_1 \in F$ என்பது $V_n(F)$ ன் மீதமைந்த ஒருபடிச்சார்பாகும்.

2. $P_n(R)$ என்ற அருபவெக்டர் வெளியில் [1·3. எ-கா. 6] $f: h(x) \in P_n(R) \longrightarrow \lambda_1 h(x_1) + \lambda_2 h(x_2) + ... + \lambda_n h(x_n) \in R$ [$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, என்பவையும், $x_1, x_2, ... x_n$ என்பவையும் R-ல் உள்ள யாதானும் $2n$ எண்ணிகளாகும்] என்ற $P_n(R)$ லிருந்து R-ற்கு அமையும் அமைப்புமாற்றம், $P_n(R)$-ன் மீது அமையும் ஓர் ஒருபடிச்சார்பாகும். குறிப்பாக, $f; h(x) \in P_n(R) \longrightarrow h(0)$ என்ற அமைப்புமாற்றம், $P_n(R)$-ன் மீது ஓர், ஒருபடிச் சார்பாகும்.

3. $R[x]$ எனும் அருபவெக்டர் வெளியில் [1·3. எ-கா. 5.]

$f: h(x) \in R[x] \longrightarrow \int_0^1 h(x)\, dx \in R$ என்பது $R[x]$ ன் மீது அமையும் ஓர், ஒருபடிச்சார்பாகும்.

ஓர் அருபவெக்டர் வெளியின் துணை வெளி (Dual space of an abstract vector space)

7·2. வரையறை :

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-ன் மீதமையும் எல்லா ஒருபடிச்சார்புகளையும் கொண்ட கணமும், V-யிலிருந்து F-ற்கு அமையும் எல்லா ஒருபடி நிலைமாற்றங்களையும் கொண்ட கணமும் ஒன்றுதலால், V-ன் மீது எல்லா ஒருபடிச் சார்புகளையும் கொண்ட கணம் F-ன் மீது ஓர் அருபவெக்டர் வெளியை அமைக்கும். [தேற்றம் 6·7] இவ்வெளியே V-ன் துணை வெளி (Dual space of V) என வரையறுக்கப்படுகிறது. இதனை V^* என்று குறிப்பது வழக்கம்.

துணைத்தளங்கள் : [Dual bases]

7·3. தேற்றம் :

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த வெளிப்படையல்லாத n-பரிமாணம் கொண்ட [n என்பது முடிவுள்ள பாசிட்டிவ் முழு

எண் $n > 0$] அரூபவெக்டர் வெளி V-ல் $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்பது யாதானுமொரு தளமாக இருக்கட்டும். $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ என்பவை F-ல் யாதானும் n எண்ணிகளாக இருக்கட்டும். $x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்ற V-ல் உள்ள உறுப்புகளை முறையே $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ என்ற F-ல் உள்ள எண்ணிகளுக்கு எடுத்துச்செல்லும் V-ன் மீதமைந்த ஒருபடிச்சார்பு ஒன்றே ஒன்றுதான் உண்டு.

நிரூபணம் :

x என்பது V-ல் யாதானுமொரு உறுப்பாக இருக்கட்டும்.

$\therefore \quad x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$ என எழுதலாம்.

[$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ என்பவை F-ல் உள்ள தனித்தன்மை வாய்ந்த எண்ணிகள்]

$f: x \in V \longrightarrow \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \ldots + \alpha_n \lambda_n \in F$ என்ற V-லிருந்து F-ற்கு அமையும் அமைப்புமாற்றத்தை எடுத்துக் கொள்ளவும் ....(1)

இது V-ன் மீது ஓர் ஒருபடிச்சார்பாகும் என எளிதாக நிறுவலாம். மேலும், $f: x_i \longrightarrow 1 \cdot \lambda_i = \lambda_i \ (1 \leqslant i \leqslant n)$ ஆகும். ஆகையால், $x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்ற உறுப்புகளை முறையே $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ என்ற எண்ணிகளுக்கு எடுத்துச்செல்லும் V-ன் மீதமைந்த ஒருபடிச்சார்பு ஒன்றுண்டு.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்ற உறுப்புகளை முறையே $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ என்ற எண்ணிகளுக்கு எடுத்துச்செல்லும் Φ என்ற மற்றொரு [V-ன் மீதமைந்த] ஒருபடிச்சார்பு இருப்பதாகக் கொள்வோம்.

$\therefore \quad \Phi : x_i \in V \longrightarrow \lambda_i \in F \quad [1 \leqslant i \leqslant n]$ ....(2)

$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$ என்பது V-ல் யாதானுமொரு உறுப்பாக இருந்தால்,

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \Phi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) \\ &= \alpha_1 \Phi(x_1) + \alpha_2 \Phi(x_2) + \ldots + \alpha_n \Phi(x_n) \\ &\quad [\because \ \Phi \text{ என்பது ஒருபடிச்சார்பாகும்}] \\ &= \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \ldots + \alpha_n \lambda_n \quad [\ (2)\text{-லிருந்து}\ ] \\ &= f(x) \quad [\ (1)\text{-லிருந்து}\ ] \end{aligned}$$

$\therefore \quad \forall\, x \in V, \ \Phi(x) = f(x)$

$$\therefore \quad \Phi = f$$

$\therefore$ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்ற V_ல் உள்ள உறுப்புகளை முறையே $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ என்றால் F_ல் உள்ள எண்ணிகளுக்கு எடுத்துச்செல்லும் V_ன் மீதமைந்த ஒருபடிச்சார்பு ஒன்றே ஒன்றுதான் உண்டு. அதுவே (1) ல் வரையறுக்கப்பட்ட ஒருபடிச்சார்பாகும்.

7·4. F என்ற களத்தின் மீதமைந்த வெளிப்படையல்லாத n_பரிமாணம் கொண்ட [n என்பது முடிவுள்ள மிகை முழு எண் $n > 0$] அருபவெக்டர் வெளி V_ல் $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்பது யாதானுமொரு தளமாக இருந்தால்,

$$f_j(x_i) = \delta_{ij} \quad [i = j \text{ எனின் } \delta_{ij} = 1$$
$$i \neq j \text{ எனின் } \delta_{ij} = 0]$$

$$[i, j \text{ என்பவை } 1 \text{ முதல் } n \text{ முடிய}]$$

என்ற முறையில் அமைக்கப்பட்ட $f_1, f_2, \ldots, f_n$ என்ற ஒருபடிச் சார்புகளைக் கொண்ட கணம் V^*_ல் ஒரு தளமாகும்.

நிரூபணம் :

$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்ற கணம் V_ல் ஒரு தளமாதலால், $f_j(x_1) = 0$, $f_j(x_2) = 0$, ..., $f_j(x_j) = 0$ என்றமைந்த ஒருபடிச் சார்பு f_j என்பது, V^*_ல் தனித்தன்மை வாய்ந்தது. $[1 \leqslant j \leqslant n]$ மேலும், $X = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$ என்பது V_ல் எந்த ஓர் உறுப்பாகவும் இருந்தால் $f_j(x) = \alpha_j$ என்ற முறையில் f_j அமைகிறது. $[1 \leqslant j \leqslant n]$ [தேற்றம் 7·3] ....(1)

$\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ என்ற V^*_ல் உள்ள உள்ளடங்கு கணத்தை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in F$, $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_n f_n = 0$ எனின்,

[0 என்பது V^* உள்ள பூச்சிய உறுப்பைக் குறிக்கும்]

$$\therefore \quad \forall x \in V, (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_n f_n)(x) = 0 \cdot (x)$$
$$= 0 \text{ ஆகும் } [0 \in F]$$

$x = x_i$ என எடுத்துக்கொண்டால் $(1 \leqslant i \leqslant n)$

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_n f_n)(x_i) = 0$$

$$\therefore \quad \lambda_1 f_1(x_i) + \lambda_2 f_2(x_i) + \ldots + \lambda_i f_i(x_i) + \ldots + \lambda_n f_n(x_i) = 0$$

$$\therefore \quad 0 + \ldots + \lambda_i \cdot 1 + \ldots + 0 = 0 \quad [\because \; f_j(x_i) = \delta_{ij}]$$

$\therefore \ \lambda_i = 0 \ [1 \leqslant i \leqslant n]$

$\therefore \ \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_n = 0$

$\therefore \ \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ என்ற கணம் V^*-ல் ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ளதாகும் ....(2)

f என்பது V^*-ல் யாதானும் ஓர் உறுப்பாக இருக்கட்டும்.

$f : x_i \in V \longrightarrow c_i \ [c_i \in F]$ எனக்கொள்வோம்.

$X = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$ என்ற V-ல் எந்த ஓர் உறுப்பையும் எடுத்துக்கொண்டால்,

$f(x) = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \dots + \alpha_n c_n$ ஆகும்.

$= c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x)$

[(1) லிருந்து $f_j(x) = \alpha_j$]

$= (c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n)(x)$

$\therefore \ \forall \ x \in V, f(x) = (c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n)(x)$

$\therefore \ f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n$

$\therefore \ \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ என்ற கணம் V^*-ன் உருவாக்கிக் கணமாகும் ....(3)

(2), (3) ஆகியவற்றிலிருந்து, $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ என்ற கணம் V^*-ல் ஒரு தளமாகும்.

கிளைத்தேற்றம் :

முடிவுள்ள பரிமாணம் கொண்ட ஓர் அரூபவெக்டர் வெளி V-ன் துணை வெளியும் (dual space) அதே பரிமாணம் கொண்டது.

நிரூபணம் :

$d(V) = n$ எனக்கொள்வோம் [n என்பது முடிவுள்ள பாசிட்டிவ் முழு எண் $n > 0$]

$\therefore$ தேற்றம் 7·4-லிருந்து, V^*-ல் n உறுப்புகளைக் கொண்ட தளம் ஒன்றுண்டு எனக்கிடைக்கிறது. $\therefore \ d(V^*) = n$ ஆகும்.

$\therefore \ d(V) = d(V^*)$

7·5. வரையறை : துணைத்தளம் (Dual bases)

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த வெளிப்படையல்லாத முடிவுள்ள பரிமாணம் கொண்ட அரூபவெக்டர் வெளி V-ல் உள்ள

ஒவ்வொரு தளம் B-யினுக்கும், துணைவெளி V^*-ல் ஒரே ஒரு தளமுண்டு. [தேற்றம். 7·4] இத்தளம் B-யின் துணைத்தளம் [dual bases of B] என வரையறுக்கப்படுகிறது.

7·6. தேற்றம் :

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த n-பரிமாணம் கொண்ட [n என்பது முடிவுள்ள மிகை முழு எண், $n > 0$] அருபவெக்டர் வெளி V-ல் ஒவ்வொரு பூச்சியமல்லாத உறுப்பு x-ற்கும், $f(x) \neq 0$ என்ற முறையில் அமைந்த, V-ன் மீது ஒருபடிச்சார்பு f, ஒன்ருவது உண்டு.

நிரூபணம் :

$B = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்பது V-ல் யாதானுமொரு தளமாகவும், $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ என்பது B-ன் துணைத்தளமாகவும் இருக்கட்டும். $X = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$ என்பது V-ல் எந்த ஓர் உறுப்பாகவும் இருந்தால், $(\alpha_j \in F)$

$f_j(x) = \alpha_j$ ஆகும் [தேற்றம் 7·4, (1)] ....(1)

$\forall f \in V^*, f(x) = 0$ எனின் $f_j(x) = 0$ ஆகும் $[1 \leqslant j \leqslant n]$
$\{\because f_j \in V^*\}$

$\therefore \alpha_j = 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant n)$ [(1) லிருந்து]

$\therefore x = 0$

$\therefore \forall f \in V^*, f(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$

$\therefore x \neq 0$ எனின் $f(x) \neq 0$ என்றமைந்த ஒருபடிச்சார்பு ஒன்ருவது V^*-ல் இருக்கும்.

கிளைத்தேற்றம் :

x, y என்பவை V-ல் யாதானுமிரு, வேறுபட்ட உறுப்புகளெனின் [(அ-து) $x \neq y$] $f(x) \neq f(y)$ என்றமைந்த ஒருபடிச்சார்பு f, ஒன்ருவது V^*-ல் உண்டு.

நிரூபணம் :

$x \neq y$ என்பது தரவு. $\therefore x - y \neq 0$ ஆகும். $\therefore x - y$ என்ற பூச்சியமல்லாத V-ல் உள்ள உறுப்பிற்கு, $f(x-y) \neq 0$ என்றமைந்த ஒருபடிச்சார்பு f ஒன்ருவது V^*-ல் உண்டு.

[தேற்றம். 8·6]

(அ-து) F $f \in V^*$, $f(x-y) \neq 0$

$\therefore$ $f(x) - f(y) \neq 0$ [$\because$ f என்பது V-ன் மீது ஒருபடிச் சார்பாகும்]

$\therefore$ $f(x) \neq f(y)$

பூச்சியமாக்கிகள் (Annihilators)

7·7. வரையறை :

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-ல், S என்பது யாதானுமொரு உள்ளடங்கு கணமாக (Subset of V) இருந்தால், $S^\circ = \{f \in V^* \mid f(x) = 0, \forall x \in S\}$ என்ற V^*-ன் உள்ளடங்கு கணம் S என்ற கணத்தின் பூச்சியமாக்கி (Annihilator of the subset S) என வரையறுக்கப்படுகிறது.

7·8. தேற்றம் :

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-ல் S என்பது யாதானுமொரு உள்ளடங்கு கணமாயின் S° என்ற S-ன் பூச்சியமாக்கி V^*-ல் ஓர் உள்ளடங்கு வெளியாகும்.

நிருபணம் :

$S^\circ = \{f \in V^* \mid f(x) = 0, \forall X \in S\}$ என்ற S-ன் பூச்சியமாக்கியை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$f_1, f_2 \in S^\circ$ எனின், $f_1, f_2 \in V^*$ ஆகும்.

$\therefore$ $\forall X \in S$, $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$

[$\because$ V^*-ல் வரையறுக்கப்பட்ட கூட்டல் எனும் செயலின்படி]

$= 0 + 0 = 0$

$\therefore$ $f_1 + f_2 \in S^\circ$ ....(1)

$\forall X \in S$, $\lambda \in F$, $(\lambda f_1)(x) = \lambda [f_1(x)]$

[$\therefore$ V^*-ல் வரையறுக்கப்பட்ட எண்ணியால் பெருக்கல் எனும் செயலின்படி]

$= \lambda \cdot 0 = 0$

$\therefore$ $\lambda f_1 \in S^\circ$ ....(2)

(1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து S° என்பது V^*-ல் ஓர் உள்ளடங்கு வெளியாகும் என்பது தெளிவு.

7·9. தேற்றம் :

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த வெளிப்படையல்லாத n-பரிமாணம் கொண்ட (n என்பது முடிவுள்ள மிகை முழு எண் $n > 0$) அருபவெக்டர் வெளி V-ல் S என்பது m-பரிமாணமுள்ள உள்ளடங்கு வெளியாகுமெனின் S° என்ற S-ன் பூச்சியமாக்கி, V^*-ல் $n-m$ பரிமாணம் கொண்ட ஓர் உள்ளடங்கு வெளியாகும்.

நிரூபணம் :

$d(S)=m$ ஆதலால், S-ல் $B_1=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ என்ற தளம் ஒன்றுண்டு. [தேற்றம் (5·8. ii)]

இத்தளம் V-ல் ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ள கணமாதலால், இத்தளத்தை V-ல் ஒரு தளமாக விரிவு படுத்தலாம். [தேற்றம் 5·13]

இதனை $B_2=\{x_1, x_2, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_n\}$ எனக்கொள்வோம். B_2-ன் துணைத்தளத்தை (dual bases) $\{f_1, f_2, ..., f_m, f_{m+1}, ..., f_n\}$ எனக்கொள்வோம்.

$\therefore\ f_j(x_i) = \delta_{ij}$ [$i=j$ எனின் $\delta_{ij}=1$, $i \neq j$ எனின் $\delta_{ij}=0$.
$i, j = 1$ முதல் n முடிய] ....(1)

$\{f_{m+1}, f_{m+2}, ..., f_n\}$ என்ற கணத்தால் உருவாக்கப்பட்ட, V^*-ன் உள்ளடங்கு வெளியை T எனக்குறிப்போம். இக்கணம் ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ளதால் $d(T)=n-m$ ஆகும் ......(2)

X என்பது S-ல் யாதானுமொரு உறுப்பாக இருக்கட்டும்.

$\therefore\ X=\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+...+\alpha_m x_m$ [$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \in F$]

$m+1 \leqslant j \leqslant n$ எனின் $f_j(x) = \alpha_1 f_j(x_1) + \alpha_2 f_j(x_2) + ... + \alpha_m f_j(x_m)$

$= 0$ [(1) லிருந்து]

$\therefore\ \forall\ X \in S,\ f_j(x) = 0$ [$m+1 \leqslant j \leqslant n$]

$\therefore\ f_{m+1}, f_{m+2}, ..., f_n$ என்ற உறுப்புகள் S°-ல் உள்ளன. S° என்பது V^*-ல் ஓர் உள்ளடங்கு வெளியாதலாலும், [தேற்றம். 7·8] $\{f_{m+1}, f_{m+2}, ..., f_n\}$ என்ற கணம் T-யை உருவாக்குவதாலும், $T \subset S^{\circ}$ ஆகும் ....(3)

f என்பது S°-ல் யாதானுமொரு உறுப்பாக இருக்கட்டும்.

$\therefore \; f \in V^*$

$$\therefore \; f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_m f_m + \lambda_{m+1} f_{m+1} + \dots + \lambda_n f_n, \; [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in F]$$

[$\because$ $(f_1, \dots f_n)$ என்ற கணம் V^*-ல் ஒரு தளமாகும்]

$1 \leqslant i \leqslant m$ எனின்,

$$f(x_i) = \lambda_1 f_1(x_i) + \lambda_2 f_2(x_i) + \dots + \lambda_i f_i(x_i) + \dots + \lambda_m f_m(x_i) + \dots + \lambda_n f_n(x_i)$$

$= \lambda_i \quad [1 \leqslant i \leqslant m]$ {(1) லிருந்து}

$= 0 \quad [\because \; f \in S^\circ]$

$\therefore \; \lambda_i = 0 \quad [1 \leqslant i \leqslant m] \quad \therefore \; f = \lambda_{m+1} f_{m+1} + \dots + \lambda_n f_n$

$\therefore \; f \in T \quad \therefore \; S^\circ \subset T$ ஆகும் ....(4)

(3), (4) ஆகியவற்றிலிருந்து $S^\circ = T$ ஆகும்.

$d(T) = n - m$ ஆதலால், [(2) லிருந்து] $d(S^\circ) = n - m$ ஆகும். ஆகையால், S-ன் பூச்சியமாக்கி, V^*-ல் $n - m$ பரிமாணம் கொண்ட ஓர் உள்ளடங்கு வெளியாகும்.

மாதிரி 1: $V_3(R)$ல் $B = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$ என்பது ஒரு தளமாகும். B-யின் துணைத்தளம் $\{f_1, f_2, f_3\}$ எனின் f_1, f_2, f_3 ஆகியவற்றை நிர்ணயிக்கவும். $Y = (2, 3, 1)$ எனின் $f_1(y), f_2(y), f_3(y)$ ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

நிரூபணம்:

$\{f_1, f_2, f_3\}$ என்பது B-யின் துணைத்தளமாதலால்,

$f_1 : (1,1,0) \to 1 \in R, \quad f_1 : (1,0,1) \to 0 \in R, \quad f_1 : (0,1,1) \to 0 \in R$
$f_2 : (1,1,0) \to 0 \quad f_2 : (1,0,1) \to 1 \quad f_2 : (0,1,1) \to 0$
$f_3 : (1,1,0) \to 0 \quad f_3 : (1,0,1) \to 0 \quad f_3 : (0,1,1) \to 1$

$X = (x_1, x_2, x_3)$ என்பது $V_3(R)$ல் எந்த ஓர் உறுப்பாகவும் இருந்தால், $X = \alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(1,0,1) + \alpha_3(0,1,1)$ என எழுதலாம் [$\because$ B என்பது ஒரு தளமாகும்]

$$\therefore \; \alpha_1 = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3), \quad \alpha_2 = \tfrac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3),$$
$$\alpha_3 = \tfrac{1}{2}(x_2 + x_3 - x_1) \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad f_1 : X \in V_3(R) \longrightarrow \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3) \in R$$
$$f_2 : X \in V_3(R) \longrightarrow \tfrac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3) \in R$$
$$f_3 : X \in V_3(R) \longrightarrow \tfrac{1}{2}(x_2 + x_3 - x_1) \in R$$

$Y = (2, 3, 1)$ எனின், $f_1 : Y \longrightarrow \tfrac{1}{2}(2+3-1) = 2 \in R$
$f_2 : Y \longrightarrow \tfrac{1}{2}(2-3+1) = 0 \in R, f_3 : Y \longrightarrow \tfrac{1}{2}(3+1-2) = 1 \in R.$

மாதிரி **2** : $V_4(R)$-ல் $B = \{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1)\}$ என்ற கணத்தால் உருவாக்கப்படும் உள்ளடங்கு வெளி S-ன் பூச்சியமாக்கியைக் காண்க. [annihilator of S].

நிருபணம் :

B என்பது ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ளதால், இக்கணம் S-ல் ஒரு தளமாகும். இதனை $V_4(R)$-ல் ஒரு தளமாக விரிவுபடுத்தலாம்.

$B_1 = \{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0)\}$ என்பது அவ்வாறு விரிவு படுத்தப்பட்ட, $V_4(R)$-ல் உள்ள தளமாகும்.

B_1 என்ற தளத்தின் துணை வெளியை $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ எனக்கொள்வோம்.

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ என்பது $V_4(R)$-ல் எந்த ஒரு வெக்டராகவும் இருக்கட்டும். $X = \alpha_1 (1, 1, 0, 0) + \alpha_2 (0, 1, 0, 1) + \alpha_3 (1, 0, 1, 0) + \alpha_4 (0, 1, 0, 0)$ என எழுதலாம். இதிலிருந்து,

$$\alpha_1 = x_1 - x_3,\ \alpha_2 = x_4,\ \alpha_3 = x_3,\ \alpha_4 = x_2 - x_4 - x_1 + x_3$$

$$\therefore \quad \forall\ X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in V_4(R),$$
$$f_1 : X \longrightarrow x_1 - x_3 \in R, \quad f_2 : X \longrightarrow x_4 \in R,$$
$$f_3 : X \longrightarrow x_3 \in R, \quad f_4 : X \longrightarrow x_2 - x_4 - x_1 + x_3 \in R.$$

$\{f_3, f_4\}$ என்ற கணத்தால் உருவாக்கப்பட்ட $V^*_4(R)$-ன் உள்ளடங்கு வெளியே S-ன் பூச்சியமாக்கியாகும்.

பயிற்சி 8

1. $V_4(R)$-ல் $B = \{(1, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 3), (0, 0, 4, 0), (0, 0, 0, -1)\}$ என்ற தளத்தின் துணைத்தளம் $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ எனின், f_1, f_2, f_3, f_4 ஆகியவற்றை நிர்ணயிக்கவும். $Y = (2, -3, 4, 0), Z = (1, 0, -1, -1)$ எனின் $f_1(Y), f_1(Z),$

$f_2(Y)$, $f_2(Z)$, $f_3(Y)$, $f_3(Z)$, $f_4(Y)$, $f_4(Z)$ ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

2. $V_4(R)$-ல் $B = \{(0,1,-1,0),\ (1,0,3,0)\}$ என்ற கணத்தால் உருவாக்கப்படும் உள்ளடங்கு வெளி S-ன் பூச்சியமாக்கியைக் காண்க.

3. $V_3(R)$-ன் மீதமையும் ஒருபடிச்சார்புகளுக்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகள் தருக.

4. F என்ற களத்தின் மீதமைந்த ஓர் அருபவெக்டர் வெளி V-ல், S, T என்பவை உள்ளடங்கு கணங்களாகும். $S \subseteq T \Longrightarrow T^{\circ} \subset S^{\circ}$ என நிறுவுக.

5. $V_3(R)$-ல் $X=(x_1,x_2,x_3)$ என்பது எந்த ஒரு வெக்டரையும் குறித்தால், $f: X=(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow x_1+x_2+x_3 \in R$ என்பது $V_3(R)$-ன் மீதமைந்த ஒருபடிச்சார்பு என நிறுவுக.

6. $V_3(R)$-ல் $X=(x_1, x_2, x_3)$ என்பது எந்த ஒரு வெக்டராக இருந்தாலும், பின்வருவனவை $V_3(R)$-ன் மீது ஒருபடிச் சார்புகளா என ஆராயவும்.

(i) $f: X=(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow x_1-x_2$

(ii) $f: X=(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow x_1-1$

(iii) $f: X=(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow x_1-3x_2+4x_3$

(iv) $f: X=(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow x_1^2$

7. F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-ன் மீதமைந்த ஒருபடிச்சார்புகள் f_1, f_2 ஆகும். $\forall\ X \in V, f_2(X)=0 \Longrightarrow f_1(X)=0$ எனின் $f_1=\alpha f_2$ $[\alpha \in F]$ என நிறுவுக.

8. உள்ளடங்கு வெளிகளின் மேலும் சில பண்புகள்

(Further Properties of Subspaces)

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளியில், M என்ற வெறுமையற்ற உள்ளடங்கு கணம், உள்ளடங்கு வெளியாவதற்குத் தேவையான, போதுமான விதி, அக்கணம் V-ல் வரையறுக்கப்பட்டக் கூட்டலின் கீழும், F-ல் உள்ள எண்ணிகளின் பெருக்குதலுக்கும் அடைப்புள்ளதாயிருக்க வேண்டும் என்பதாகும், என ஏற்கனவே அறிந்துள்ளோம். இப்பகுதியில் உள்ளடங்கு வெளிகளுக்கிடையே வரையறுக்கப் படும் சில செயல்களைப் (operations) பற்றியும், அவற்றின் பண்புகளைப் பற்றியும் விரிவாகக் காண்போம்.

§ 8·1. உள்ளடங்கு வெளிகளின் வெட்டுகள் (Intersection of Subspaces)

A, B என்பன F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-ல் உள்ளடங்கு வெளிகளாகும். A, B க்களுக்குப் பொதுவான [(அ-து) இரு கணங்களிலும் உள்ள] உறுப்புகளைக் கொண்ட கணம் $A \cap B$ [(அ-து) A, B-க்களின் வெட்டு] என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$\therefore \quad A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$ ஆகும். $A \cap B \subset A, A \cap B \subset B$ என்பது வெளிப்படை, இவ்வரையறையை பல உள்ளடங்கு வெளிகளுக்கும் விரிவுபடுத்தலாம். $\{M_1, M_2, \ldots\}$ என்பது பல உள்ளடங்கு வெளிகளைக் கொண்ட வெறுமையற்ற கணமாக இருக்கட்டும். இக்கணத்திலுள்ள எல்லா உள்ளடங்கு வெளிகளுக்கும் பொதுவான உறுப்புகளைக் கொண்டமைந்த கணத்தை $\cap M_r$ எனக் குறிக்கின்றோம். $\cap M_r \subset M_r$ என்பது தெளிவு.

குறிப்பு: பூச்சிய உறுப்பு எல்லா உள்ளடங்கு வெளிகளிலும் இருக்குமாதலால் $A \cap B \neq \Phi$ என்பது தெளிவு.

§ **8·2.** **தேற்றம் :**

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அரூபவெக்டர் வெளி V-ல் A, B என்பன இரு உள்ளடங்கு வெளியாக இருந்தால், $A \cap B$ யும், V-ல் ஓர் உள்ளடங்கு வெளியாகும். மேலும் A-யிலும் B-யிலும் உள்ளடங்கு கணங்களாக இருக்கும் V-ன் உள்ளடங்கு வெளிகளில் மிகப் பெரியது $A \cap B$ ஆகும்.

நிரூபணம் :

A, B என்பன V-ன் உள்ளடங்கு வெளிகளாதலால், இரண்டிலும், $A \cap B$-யிலும் V-ன் பூச்சிய உறுப்பு இருக்கும். $\therefore \quad A \cap B \neq \Phi$.

A, B க்களில் 0 மட்டும் பொதுவாக இருந்தால் $A \cap B = \{0\}$ ஆதலால், இது V-ன் வெளிப்படை உள்ளடங்கு வெளியாகும். இவ்வாறின்றி, வேறு சில உறுப்புகளும் இவற்றிற்கும் பொதுவாக இருக்கட்டும்.

X, Y என்பன $A \cap B$-ல் யாதானுமிரு உறுப்புகளாகவும், λ என்பது F-ல் உள்ள யாதானுமொரு எண்ணியாகவும் இருக்கட்டும்.

$$X \in A \cap B \ ; \ Y \in A \cap B$$

$$\therefore \quad X \in A, \ X \in B \ ; \ Y \in A, \ Y \in B$$

$\therefore \quad X + Y \in A, \ X + Y \in B$, எனவே, $X + Y \in A \cap B$... (1)

$X \in A, \ X \in B$ ஆதலால், $\lambda X \in A, \quad \lambda X \in B$. எனவே $\lambda X \in A \cap B$ ....(2)

$\therefore \quad A \cap B$ ஆனது V-ல் ஓர் உள்ளடங்கு வெளியாகும்.

மேலும் S என்பது V-ன் ஓர் உள்ளடங்கு வெளியாக இருந்து, $S \subset A, S \subset B$ என்றால், $S \subset A \cap B$. $A \cap B \subset A, \ A \cap B \subset B$ ஆதலால் முடிவு வெளிப்படையாகும்.

குறிப்பு: மேற்கூறிய முடிவை விரிவுபடுத்தி, $\{M_1, M_2 \ldots\}$ என்பது V-ன் பல உள்ளடங்கு வெளிகளைக் கொண்ட வெறுமையற்ற கணமானால், $\cap M_r$-ம் V-ன் உள்ளடங்கு வெளியாகும்.

§ 8·3. ஓர் அருபவெக்டர் வெளியில் உள்ளடங்கு கணத்தால் உருவாக்கப்பட்ட உள்ளடங்கு வெளி (Subspace generated by a subset of an abstract vector space)

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-ல் S என்பது ஓர் உள்ளடங்கு கணமாக இருக்கட்டும். S ஐ உள்ளடக்கும் V-ன் எல்லா உள்ளடங்கு வெளிகளின் வெட்டுக்கணம் (the set intersection of all subspaces of V containing S) V-ல் ஓர் உள்ளடங்கு வெளியாகும். இவ்வெளியே S-ஆல் உருவாக்கப்படும் உள்ளடங்கு வெளி எனப்படும்.

குறிப்பு: S ஐ உள்ளடக்கும் V-ன் எல்லா உள்ளடங்கு வெளிகளையும் கொண்ட கணம் வெறுமையல்ல.

மேலும் V-ல் உள்ள யாதானுமொரு உள்ளடங்கு வெளி M' என்பது S ஐ உள்ளடக்குவதாகக் கொள்வோம். வரையறையின்படி S-ஆல் உருவாக்கப்படும் உள்ளடங்கு வெளி M என்பது, M' போன்ற V-ல் உள்ள உள்ளடங்கு வெளிகளின் வெட்டுக்கணமாதலால் $M \subset M'$. ஆதலால், M என்பது S ஐ உள்ளடக்கும் V-ன் மிகச் சிறிய உள்ளடங்கு வெளியாகும்.

§ 8·4. தேற்றம்:

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-ல் S என்பது ஓர் உள்ளடங்கு கணமாகும். S-ஆல் உருவாக்கப்படும் உள்ளடங்கு வெளியை M என்றும், S-ல் உள்ள உறுப்புகளின் எல்லா ஒருபடிச்சேர்வுகளையும் கொண்டமைந்த V-ன் உள்ளடங்கு வெளியை M' என்றும் குறித்தால் $M' = M$ ஆகும்.

நிருபணம்:

M ஆனது S ஐ உள்ளடக்குவதாலும் M உள்ளடங்கு வெளியாக இருப்பதாலும், S-ல் உள்ள உறுப்புகளின் எல்லா ஒருபடிச்சேர்வுகளும் M'-ல் இருக்கும். $\therefore \quad M' \subset M$ ....(1)

M' என்பது S-ல் உள்ள உறுப்புகளின் எல்லா ஒருபடிச் சேர்வுகளையும் கொண்டுள்ளதால் $S \subset M'$. மேலும் M' உள்ளடங்கு வெளியாதலால் (§ 6·3. குறிப்பு) $M \subset M'$......(2)

(1), (2) லிருந்து $M = M'$ ஆகும்.

குறிப்பு: அத் II, பகுதி 3-ல், V-ல் உள்ள உள்ளடங்கு கணம் S-ல் இருக்கும் உறுப்புகளின் எல்லா ஒருபடிச்சேர்வுகளையும் கொண்ட ஒரு கணம், V-ல் ஓர் உள்ளடங்கு வெளியாகுமென

நிறுவி அவ்வெளியே S ஆல் உருவாக்கப்படும் உள்ளடங்கு வெளி என வரையறுத்துள்ளோம். மேலே உள்ள தேற்றத்தின்படி அவ்வரையறையும் § 6·3. வரையறையும் சரிநிகர் (equivalent) என அறிகிறோம்.

§ 8·5. இரு உள்ளடங்கு வெளிகளின் ஒருபடிக்கூட்டல் (Linear Sum of Two Subspaces)

களம் F-ன் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-ல் S, T என்பன யாதானுமிரு உள்ளடங்கு வெளிகளாக இருக்கட்டும். S-ல் எந்த Xஐயும், T-ல் எந்த உறுப்பு Yஐயும் எடுத்துக்கொண்டு அமைக்கப்பட்ட $X+Y$ போன்ற உறுப்புகளைக் கொண்ட கணம் S, T-க்களின் ஒருபடிக்கூட்டல் என வரையறுக்கப்படுகிறது. இதனை $S+T$ என்று குறிப்போம்.

$$\therefore\ S+T=\{X+Y \mid X\in S, Y\in T\}$$

குறிப்பு: X என்பது S-ல் யாதானுமொரு உறுப்பாக இருக்கட்டும். T-ல் பூச்சிய உறுப்பு 0வை எடுத்துக் கொண்டால், $X+0\in S+T$ ie $X\in S+T$. $\therefore\ S\subset S+T$ இதுபோல் $T\subset S+T$ என நிறுவலாம். எனவே, $S\cup T\subset S+T$

§ 8·6. தேற்றம் :

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-ல் S, T என்பன உள்ளடங்கு வெளிகளாகும் என்ருல் $S+T$-யும் V-ன் உள்ளடங்கு வெளியாகும்.

நிரூபணம் :

$S=\{0\}$, $T=\{0\}$ என்ருல், $S+T=\{0\}$ ஆனது V-ன் வெளிப்படை உள்ளடங்கு வெளியாகின்றது. இவ்வாறில்லாவிடில் $S+T$ ல் குறைந்தது இரு உறுப்புகளாவது இருக்கும்.

X, Y என்பன $S+T$ ல் யாதானுமிரு உறுப்புகளாகவும், λ எண்ணியாகவுமிருந்தால்,

$X\in S+T$ ஆதலால், $X=X_1+Y_1$; $X_1\in S, Y_1\in T$
$Y\in S+T$ ஆதலால், $Y=X_2+Y_2$; $X_2\in S, Y_2\in T$ ஆகும்.

$$\therefore\ X+Y=(X_1+Y_1)+(X_2+Y_2)=X_1+(Y_1+X_2)+Y_2$$
$$=X_1+(X_2+Y_1)+Y_2=(X_1+X_2)+(Y_1+Y_2)$$

$\therefore\ X+Y\in S+T\ [\because X_1+X_2\in S, Y_1+Y_2\in T]$ ......(1)

மேலும், $\lambda X=\lambda(X_1+Y_1)=\lambda X_1+\lambda Y_1\ \ \therefore \lambda X\in S+T$...(2)

(1), (2) லிருந்து, $S+T$ என்ற கணம், V-ல் உள்ளடங்கு வெளியாகும்.

§ 8·7. தேற்றம்:

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-ல் S, T என்பன யாதானுமிரு உள்ளடங்கு வெளிகளாகுமென்றால் $S+T$ என்ற உள்ளடங்கு வெளி $S \cup T$ என்ற கணத்தால் உருவாக்கப்படுகிறது.

நிரூபணம்:

$S \cup T$-ஆல் உருவாக்கப்படும் உள்ளடங்கு வெளியை M என்போம்.

$\therefore\ S \cup T \subset M, S \subset S \cup T, T \subset S \cup T$ ஆதலால், $S \subset M$, $T \subset M$, $S+T$ என்ற உள்ளடங்கு வெளியில் யாதானுமொரு உறுப்பு α ஐ எடுத்துக்கொள்வோம்.

$\therefore\ \alpha \in S+T \quad \therefore\ \alpha = X+Y,\ X \in S,\ Y \in T$

$\because\ S \subset M, T \subset M, \quad \therefore\ X \in M, Y \in M$

$\therefore\ X+Y \in M$ [$\because$ M என்பது ஓர் உள்ளடங்கு வெளி]

$\therefore\ \alpha \in M$ எனவே, $S+T \subset M$ ....(1)

$S \cup T \subset S+T$ ஆதலால், $S \cup T$ என்ற கணத்தை $S+T$ என்ற உள்ளடங்கு வெளி, உள்ளடங்கு கணமாகக் கொண்டுள்ளது.

$\therefore$ § 8·3. குறிப்பின்படி, $M \subset S+T$ ....(2)

(1), (2) லிருந்து $M = S+T$ ஆகும்.

குறிப்பு 1: ஓர் அருபவெக்டர் வெளியில் உள்ள இரு உள்ளடங்கு வெளிகளின் ஒருபடிக் கூட்டலை, அவ்வெளிகளை இரு கணங்களாகக் கருதி, அக்கணங்களின் இணைப்புக் கணத்தினால் (set union) உருவாக்கப்படும் உள்ளடங்கு வெளி என வரையறுக்கலாமென § 8·7 லிருந்து அறிகிறோம்.

குறிப்பு 2: தற்செயலாக (incidentally) S, T என்ற உள்ளடங்கு வெளிகளில் உள்ளடங்கு கணங்களாகக் கொண்ட ஓர் உள்ளடங்கு வெளியிருந்தால், அவ்வெளியில் $S+T$-யும் ஓர்

உள்ளடங்கு கணமாகுமென § 8·7-ன் முதற்பகுதியில் நிறுவியுள்ளோம்.

§ **8·8.** F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-ல் S, T என்பன உள்ளடங்கு வெளிகளென்றால், $S \cup T$ என்ற கணம் உள்ளடங்கு வெளியாக இருக்கத்தேவையில்லை. எடுத்துக் காட்டாக,

$V_3(F)$-ல் S, T என்பன $S = \left\{ (\lambda, 0, 0) \mid \lambda \in F \right\}$,

$T = \left\{ (0, 0, \mu) \mid \mu \in F \right\}$ என்று வரையறுக்கப்பட்டால்,

$S \cup T = \left\{ (\lambda, 0, 0), (0, 0, \mu) \mid \lambda, \mu \in F \right\}$

இதில் யாதானுமிரு வெக்டர்களைக் கூட்டினால் $(\lambda, 0, \mu)$ என்று கிடைக்கும். ஆனால், $(\lambda, 0, \mu) \notin S \cup T$. எனவே, $S \cup T$ ஓர் உள்ளடங்கு வெளியல்ல.

§ 8·9. உள்ளடங்கு வெளிகளின் பரிமாணங்கள் (Dimensions of Subspaces)

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த வெறுமையற்ற, முடிவுள்ள பரிமாணங்கொண்ட அருபவெக்டர் வெளி V-ல் ஒவ்வொரு உள்ளடங்கு வெளியும், முடிவுள்ள பரிமாணம் கொண்டதெனவும்; $d(V) = n$ ஆகவும், M என்பது V-ல் யாதானுமொரு உள்ளடங்கு வெளியாகவுமிருந்தால் $d(M) \leqslant n$ எனவும் முன்பே அறிந்துள்ளோம்.

V-ல் S, T என்பன உள்ளடங்கு வெளிகளாக இருந்தால் $S \subset S + T, T \subset S + T$ ஆதலால், $d(S) \leqslant d(S + T)$, $d(T) \leqslant d(S+T)$ ஆகும். $S, T, S + T, S \cap T$ ஆகிய உள்ளடங்கு வெளிகளின் பரிமாணங்களுக்கிடையே உள்ள தொடர்பை பின்வரும் தேற்றம் கூறுகிறது.

§ 8·10. தேற்றம் :

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த வெறுமையற்ற முடிவுள்ள பரிமாணங்கொண்ட அருபவெக்டர் வெளி V-ல் S, T என்பன யாதானுமிரு உள்ளடங்கு வெளிகளென்றால், $d(S) + d(T) = d(S + T) + d(S \cap T)$

நிரூபணம் :

வகை. 1: (Case-1) V-ல் உள்ள பூச்சிய உறுப்பு 0 என்போம். $S = \{0\}$ அல்லது $T = \{0\}$

என்றால் $d(S) = 0$, $d(S \cap T) = 0$, $S + T = T$ அல்லது $d(T) = 0, d(S \cap T) = 0, S + T = S$ ஆகும்.

$\therefore$ $d(S) + d(T) = d(T)$ அல்லது $d(S)$ ஆகும்.
$d(S+T) + d(S \cap T) = d(T)$ அல்லது $d(S)$

$\therefore$ $d(S) + d(T) = d(S + T) + d(S \cap T)$

வகை 2: S, T என்பன வெளிப்படையல்லாத உள்ளடங்கு வெளியெனவும் $S \cap T = 0$ எனவும், $d(S) = s$, $d(T) = t$ எனவும் கொள்வோம். அப்படியானால், § 5·8-ன்படி, S-ல் s உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு தளமும், T-ல் t உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு தளமும் இருக்கும். அவற்றை முறையே

$B_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_s\}$, $B_2 = \{y_1, y_2 \ldots, y_t\}$ என்போம்.

$B_3 = \{x_1, x_2, \ldots, x_s, y_1, y_2, \ldots, y_t\}$ ஆனது $S + T$-ல் ஒரு தளம் என நிரூபிக்கலாம்.

$S \cap T = 0$ ஆதலாலும், B_1, B_2 என்பன தளங்களாதலாலும், B_3-ல் திரும்பவரும் உறுப்புகள் (repeated elements) கிடையாது.

$S \subset S + T, T \subset S+T$ ஆதலால் $B_3 \subset S+T$ ஆகும்...... (1)

$S + T$-யில் யாதானுமொரு உறுப்பு α ஐ எடுத்துக் கொள்வோம்.

$\therefore$ $\alpha = x + y,\ x \in S,\ y \in T$

$= \sum_{i=1}^{s} \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{t} \lambda_j y_j$ ($\because$ B_1, B_2, என்பன S, T-க்களின் தளங்கள்; $\lambda_i, \mu_j \in F$)

$\therefore$ α என்பது $x_1, x_2, \ldots, x_s$, $y_1, y_2, \ldots, y_t$-க்களின் ஒருபடிச்சேர்வாகும். எனவே B_3 என்ற $S+T$-ன் உள்ளடங்கு கணம் $S+T$-யை உருவாக்குகிறது ....(2)

a_i, b_j என்பன $\begin{pmatrix} i=1, \ldots, s \\ j=1, \ldots, t \end{pmatrix}$ எண்ணிகளாகவும் $\sum_{i=1}^{s} a_i x_i + \sum_{j=1}^{t} b_j y_j = 0$ என்றும் இருந்தால், $\sum_{i=1}^{s} a_i x_i = \sum_{j=1}^{t} (-b_j) y_j$ ஆகும்.

இடப்பக்கத்திலுள்ள உறுப்பு S-லும், வலப்பக்கத்திலுள்ள உறுப்பு T-யிலும் ($\because$ B_1, B_2 என்பன S, T-ன் தளங்கள்) உள்ளது. இரு பக்கமும் சமமாதலால், எந்தப்பக்கத்திலுள்ள உறுப்பும் S, T என்ற இரு உள்ளடங்கு வெளிகளிலும், (அ-து) $S \cap T$-ல் உள்ளது. ஆனால், தரவின்படி $S \cap T = 0$.

$$\therefore \sum_{i=1}^{s} a_i x_i = 0 ; \sum_{j=1}^{t} (-b_j) y_j = 0$$

B_1, B_2 தளங்களாதலால் $a_1 = 0 = \ldots = a_s$; $b_1 = 0 = \ldots = b_t$ ஆகும்.

$$\text{எனவே, } \sum_{i=1}^{s} a_i x_i + \sum_{j=1}^{t} b_j x_j = 0 \Longrightarrow a_i = 0, b_i = 0.$$

$\therefore$ B_3 என்ற $S+T$-ன் உள்ளடங்கு கணம் $S+T$-ல் ஒருபடிச்சாராதுள்ளது ....(3)

(1), (2), (3) இவற்றிலிருந்து, B_3 என்ற கணம் $S+T$-ன் ஒரு தளமாகும். மேலும், B_3-ல் $s+t$ தனித்தனி உறுப்புகளாக உள்ளதால், $d(S+T) = s+t$

$\because$ $S \cap T = 0$, $d(S \cap T) = 0$ ஆகும்.
எனவே, $d(S) + d(T) = s+t = (s+t)+0 = d(S+T) + d(S \cap T)$

வகை 3: $S, T, S \cap T$ என்ற மூன்று உள்ளடங்கு வெளிகளும், வெளிப்படையல்லாத உள்ளடங்கு வெளிகள் எனக்கொள்வோம்.

$d(S \cap T) = k$ என்க. அப்படியானால், $S \cap T$-ல் k உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு தளமுண்டு. அதனை $B_1 = \{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$ என்க. $S \cap T \subset S$, $S \cap T \subset T$ ஆதலால், $B_1 \subset S$, $B_1 \subset T$ ஆகும்.

$\therefore$ § 5·13-ன்படி B_1 என்பது ஒருபடிச்சாராக் கணமாதலால் இதிலிருந்து S-ல் ஒரு தளத்தையும், T-ல் ஒரு தளத்தையும் அமைக்கலாம். அவற்றை முறையே $B_2 = \{z_1, z_2, \ldots, z_k, x_1 \ldots, x_s\}$ $(x_1, x_2, \ldots, x_s \in S)$

$B_3 = \{z_1, z_2 \ldots, z_k, y_1, y_2, \ldots, y_t\}$ (y-க்கள் $\in T$) என்றும் குறிப்போம். $d(S) = k+s$, $d(T) = k+t$ ஆகும் ....(1)

$B_4 = \{z_1, z_2 \ldots, z_k, \; x_1, \ldots, x_s, \; y_1, \ldots, y_t\}$ என்ற கணம் $S + T$-ல் ஒரு தளம் என நிரூபிப்போம்.

$S \subset S+T, \; T \subset S+T$ ஆதலால், $B_4 \subset S+T$ ஆகும்......(2)

$S + T$-ல் யாதானுமொரு உறுப்பு α-வை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad \alpha = X+Y, X \in S, Y \in T,$$

$$\therefore \quad \alpha = \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i z_i + \sum_{j=1}^{s} \mu_j x_j \right) + \left(\sum_{i=1}^{k} a_i z_i + \sum_{p=1}^{t} b_p y_p \right)$$

$$(\lambda_i, \mu_j, a_i, b_p \in F)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + a_i) \, z_i + \sum_{j=1}^{s} \mu_j x_j + \sum_{p=1}^{t} b_p y_p$$

$\therefore$ α என்பது $z_1, z_2, \ldots, z_k, \; x_1, \ldots, x_s, \; y_1, \ldots, y_t$-க்களின் ஒருபடிச்சேர்வாகும். எனவே B_4 என்ற $S+T$-ன் உள்ளடங்கு கணம் $S+T$-யை உருவாக்குகிறது ....(3)

$\alpha_i, \beta_j, \gamma_p \in F \; (i=1, \ldots, k, \; j=1, \ldots, s, \; p=1, \ldots, t)$

$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i z_i + \sum_{j=1}^{s} \beta_j x_j + \sum_{p=1}^{t} \gamma_p y_p = 0$ எனின் ....(4)

$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i z_i + \sum_{j=1}^{s} \beta_j x_j = \sum_{p=1}^{t} (-\gamma_p) \, y_p$ ஆகும்.

இடப்பக்கத்திலுள்ள உறுப்பு $z_1, z_2, \ldots, z_k, x_1, \ldots, x_s$ என்பனவற்றின் ஒருபடிச்சேர்வாக உள்ளதால் S-லும், வலப்பக்கத்திலுள்ள $y_1, y_2 \ldots y_t$-க்களின் ஒருபடிச்சேர்வாதலால் T-யிலும் உள்ளது. இருபக்கமும் சமமாதலால், இரு பக்கத்திலுள்ள உறுப்பும் S, T என்ற இரு உள்ளடங்கு வெளிகளிலுமுள்ளது, (அ-து) $S \cap T$-ல் உள்ளது.

$$\therefore \quad \sum_{p=1}^{t} (-\gamma_p) \, y_p \in S \cap T$$

$\{ z_1, z_2 \ldots, z_k \}$ என்ற கணம் $S \cap T$-ல் ஒருதளமாதலால்,

$$\sum_{p=1}^{t} (-\gamma_p) \, y_p = \sum_{i=1}^{k} \delta_i z_i \; [\delta_i \in F]$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{k} \delta_i z_i + \sum_{p=1}^{t} \gamma_p y_p = 0$$

$$\therefore \quad \delta_i = 0, \ \gamma_p = 0 \begin{pmatrix} i=1, \ldots k \\ p=1, \ldots t \end{pmatrix}$$

[$\because$ $\{z_1, z_2 \ldots z_k, y_1, \ldots y_t\}$ ஆனது V-ல் ஒருபடிச்சாராதது]

$\gamma_p = 0$ $(p=1,\ldots t)$ என்று (4) ல் பிரதியிட

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i z_i + \sum_{j=1}^{s} \beta_j x_j = 0.$$

எனவே, $\alpha_i = 0$, $\beta_j = 0 \begin{pmatrix} i=1, \ldots k \\ j=1, \ldots s \end{pmatrix}$

$$\therefore \sum_{i=1}^{k} \alpha_i z_i + \sum_{j=1}^{s} \beta_j x_j + \sum_{p=1}^{t} \gamma_p y_p = 0 \Longrightarrow$$

$\alpha_i = 0$, $\beta_j = 0$, $\gamma_p = 0$ $(i=1, \ldots k, \ j=1, \ldots s, \ p=1, \ldots t,)$

$\therefore$ B_4 என்ற $S+T$-ன் உள்ளடங்கு கணம் ஒருபடிச் சாராதுள்ளது. ....(5)

(2), (3), (5) இவற்றிலிருந்து, B_4 என்ற கணம் $S+T$-ல் ஒரு தளமாகும்.

B_4-ல் $k+s+t$ தனித்தனி உறுப்புகளாக உள்ளதால் $d(S+T) = k+s+t$ (§ 5·8).

(1) லிருந்து $d(S) = k+s$, $d(T) = k+t$

$$\therefore \ d(S) + d(T) = k+s + k+t = (k+s+t) + k$$
$$= d(S+T) + d(S \cap T)$$

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. $V_3(F)$ ல் $S = \left\{ (a, 0, 0) \,\middle|\, a \in F \right\}$,

$T = \left\{ (0, b, 0) \,\middle|\, b \in F \right\}$ என்பன இரு உள்ளடங்கு வெளிகளாகும். $U = \left\{ (\lambda, \mu, 0) \,\middle|\, \lambda, \mu \in F \right\}$ என்பது S, T-ன் ஒருபடிக்கூட்டலாகும். மேலும், S-ன் ஒரு தளம் $\{(1, 0, 0)\}$

ஆகும். $\{(0,1,0)\}$ என்பது T-ல் ஒருதளமாகும். $\{(1,0,0), (0,1,0)\}$ என்ற கணம் $S+T$-ல் ஒருதளமாகும். $d(S)=1$, $d(T)=1$, $d(S+T)=2$, $d(S\cap T)=0$ $(\because\ S\cap T=0)$

2. $V_4(F)$ ல் $S=\left\{(a,b,c,0)\ \middle|\ a,b,c\in F\right\}$

$T=\left\{(0,\lambda,\mu,0)\ \middle|\ \lambda,\mu\in F\right\}$ என்பன இரு உள்ளடங்கு வெளிகளாகும். $U=\left\{(\alpha,\beta,\gamma,0)\ \middle|\ \alpha,\beta,\gamma\in F\right\}$ என்ற V-ன் உள்ளடங்கு வெளி S, T-ன் ஒருபடிக்கூட்டலாகும். $\{(1,0,0,0), (0,1,0,0)\}$, $\{(0,1,0,0), (0,0,1,0)\}$, $\{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0)\}$ என்ற கணங்கள் முறையே S, T, $S+T$-க்களின் தளங்களாகும்.

$S\cap T=\left\{(0,\delta,0,0)\ \middle|\ \delta\in F\right\}$ என்பது $\{(0,1,0,0\}$ என்ற தளத்தைக் கொண்டுள்ளது.

$\therefore\ d(S\cap T)=1,\quad d(S)=2,\quad d(T)=2,\quad d(S+T)=2$
$d(S+T)+d(S\cap T)=d(S)+d(T)$ என்பது வெளிப்படை.

§ 8·11. ஒருபடிக்கூட்டலின் வடிவகணித முறை விளக்கம். (Geometrical interpretation of linear sum)

$V_3(R)$ ல் உள்ள ஒவ்வொரு வெக்டரையும் கனபரிமாண வெளியிலுள்ள ஒரு புள்ளியால் குறிக்கலாமென்றும், கனபரிமாண வெளியிலுள்ள ஒவ்வொரு வெக்டரையும் ஒரு வெக்டரால் குறிக்கலாமென அறிவோம்.

$V_3(R)$ ல் உள்ள பரிமாணம் 1 கொண்ட ஒவ்வொரு உள்ளடங்கு வெளியும் கனபரிமாண வெளியில் ஆதிவெளிச் செல்லும் ஒரு நேர்கோடாகும். பரிமாணம் 1 கொண்ட யாதானுமிரு உள்ளடங்கு வெளிகளின் வெட்டுக்கணம், $V_3(R)$ ல் பூச்சிய வெக்டரை மட்டுங்கொண்ட வெளிப்படை உள்ளடங்கு வெளியாகும். இதுவே கனபரிமாண வெளியில் ஆதிவழிச் செல்லும் இரு நேர்கோடுகளின் வெட்டும் புள்ளியான ஆதியாகும்.

$V_3(R)$ ல் பரிமாணம் 1 கொண்ட இரு உள்ளடங்கு வெளிகளின் ஒருபடிக்கூட்டல் (linear sum), பரிமாணம் 2 கொண்ட உள்ளடங்கு வெளியாகும். இதனை வடிவகணிதத்தில்

விளக்கும்பொழுது, ஆய ஆதிவழிச் செல்லுமிரு நேர்கோடுகளின் ஒருபடிக்கூட்டல், அவ்விரு நேர்கோடுகள் அமைக்கும் தளம் எனலாம்.

$V_3 (R)$ ல் பரிமாணம் 2 கொண்ட ஒவ்வொரு உள்ளடங்கு வெளியும் கனபரிமாண வெளியில் ஆய ஆதிவழிச் செல்லுமொரு தளமாகும். பரிமாணம் 2 கொண்ட யாதானுமிரு உள்ளடங்கு வெளிகளின் வெட்டுக்கணம் $V_3 (R)$ ல் பரிமாணம் 1 கொண்ட உள்ளடங்கு வெளியாகுமாதலால், இது வடிவகணிதத்தில் ஆய ஆதிவழிச் செல்லுமிரு தளங்கள் வெட்டுமொரு நேர்கோடாகும்.

$V_3 (R)$ ல் பரிமாணம் 2 கொண்ட யாதானுமிரு உள்ளடங்கு வெளிகளின் ஒருபடிக்கூட்டல் $V_3 (R)$ ஆதலால், வடிவகணிதத்தில் இதை விளக்கும்பொழுது, ஆய ஆதிவழிச் செல்லுமிரு தளங்களின் கூட்டல் கனபரிமாணவெளி என்போம்.

§ 8·12. ஒருபடிக்கூட்டலைப் பல உள்ளடங்கு வெளிகளுக்கு விரிவுபடுத்துதல் : (Extension of the theory of linear sum to many subspaces)

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த வெறுமையற்ற அருபவெக்டர் வெளி V-ல் $S_1, S_2, \ldots, S_r$ என்பன உள்ளடங்கு வெளிகளாக இருக்கட்டும். இவற்றின் ஒருபடிக்கூட்டலை,

$$S_1+S_2+\ldots+S_r = \left\{ x_1+x_2+\ldots+x_r \;\middle|\; X_i \in S_i,\ i=1, \ldots r \right\}$$ என்று

வரையறுப்போம். $S_i \,(1 \leqslant i \leqslant r)$ என்ற ஒவ்வொரு உள்ளடங்கு வெளியும் $S_1+S_2+\ldots+S_r$ என்ற கணத்தின் உள்ளடங்கு கணம் என்பதும், $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_r \subset S_1+S_2+\ldots+S_r$ என்பதும் வெளிப்படை. மேலும், $S_1+S_2+\ldots+S_r$ என்பது V-ல் ஓர் உள்ளடங்கு வெளி எனவும் அவ்வெளி $S_1 \cup S_2 \ldots \cup S_r$ என்ற கணத்தால் உருவாக்கப்படுகிறது எனவும் நிறுவலாம்.

$$d(S_1)+d(S_2)+\ldots+d(S_r)=d(S_1+S_2+\ldots+S_r) + \sum_{i=2}^{r} (-1)^{r}\, p_i.$$

இங்கு p_i என்பது $S_1, \ldots, S_r$-க்களில் யாதானும் i வெளிகளை எடுத்து அமைக்கப்பட்ட வெட்டுக்கணங்களின் பரிமாணங்களின் கூட்டலாகும்.

§ 8·13. நிரப்பு உள்ளடங்கு வெளிகள்: (Complementary Subspaces)

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த, வெறுமையற்ற அருபவெக்டர் வெளி *V*-ல் உள்ள எந்த உறுப்பையும், *S*, *T* என்ற *V*-ன் இரு உள்ளடங்கு வெளிகளில் முறையே ஒவ்வொரு உறுப்பை எடுத்துக் கொண்டு, அவற்றின் கூட்டலாக ஒரே ஒரு வழியில் தான் கூறமுடியுமானல், *S*, *T* என்பன *V*-ன் **நிரப்பு உள்ளடங்கு** வெளிகளென அழைக்கப்படும். ஒன்றை மற்றதன் **நிரப்பி** (complement) என்றழைப்பது வழக்கம்.

(அ-து) $X \in V$ எனின் $X = U + V$ $(U \in S,\ V \in T)$ என்றும் $X = U' + V'$ $(U' \in S,\ V' \in T) \implies U = U',\ V = V'$ என்றும் இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே *S*, *T* என்பன *V*-ன் நிரப்பு உள்ளடங்கு வெளிகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. $V_3(R)$-ல் $S = \left\{ (\lambda, \mu, 0) \;\middle|\; \lambda, \mu \in R \right\}$,

$T = \left\{ (0, 0, a) \;\middle|\; a \in R \right\}$ என்பன நிரப்பு உள்ளடங்கு வெளிகளாகும்.

2. $\{0\}$ என்ற வெளிப்படை வெக்டர் வெளியின் நிரப்பி *V* ஆகும்.

3. $V_3(C)$ ல் $S = \left\{ \lambda x^2 \;\middle|\; \lambda \in R \right\}$,

$T = \left\{ a + \mu x \;\middle|\; a, \mu \in R \right\}$ என்பன நிரப்புகளாகும்.

§ 8·14. இரு அருபவெக்டர் வெளிகளின் நேரிடைக்கூட்டல் (Direct sum of two abstract vector spaces)

S, *T* என்பன ஒரே களம் *F*-ன் மீதமைந்த இரு அருபவெக்டர் வெளிகளாகட்டும். *S*-ல் யாதானுமொரு உறுப்பு *x*-யையும் *T*-ல் யாதொனுமொரு உறுப்பு *y*-ஐயும் எடுத்துக்கொண்டு அமைக்கப்பட்ட வரிசையிட்ட (x, y) என்பனவற்றைக் கொண்ட கணத்தை *V* என்போம்.

(அ-து) $V = \{$வரிசையிட்ட ஜோடி $(x, y) \mid x \in S, y \in T\}$

$[(x, y)\ (x', y') \in V,\ (x, y) = (x', y') \Longleftrightarrow x = x',\ y = y']$
V-ல் கூட்டல் எனும் ஈருறுப்புச்செயலை, $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V$ எனின் $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ என்று வரையறுப்போம். $x_1, x_2 \in S \Longrightarrow x_1 + x_2 \in S$; $y_1, y_2 \in T \Longrightarrow y_1 + y_2 \in T$ ஆதலால், V-ல் கூட்டல் நன்கு வரையறுக்கப்பட்டதாகும். மேலும், இக்கூட்டலின்கீழ் V அடைப்புள்ளது. இக்கூட்டல் சேர்ப்பு விதிக்குட்பட்டது எனவும் நிறுவலாம்.

$0, 0'$ என்பன முறையே S, T ஆகியவற்றின் பூச்சிய உறுப்புகளைக் குறித்தால், $(0,0') \in V$ ஆனது V-ல் கூட்டல் அலகு எனவும், $-x, -y$ என்பன முறையே S, T-க்களிலுள்ள x, y-க்களின் கூட்டல் எதிர்மறை எனின் $(-x, -y) \in V$ ஆனது (x, y)-ன் கூட்டல் எதிர்மறை எனவும் நிறுவலாம். ஆதலால் V-ல் வரையறுக்கப்பட்ட இக்கூட்டலின்கீழ் V ஒரு பரிமாற்றுக்குழு ஆகும்.

λ ஆனது F-ல் ஓர் எண்ணியாகவும், $\alpha = (x, y) \in V$ ஆகவும் இருக்கட்டும்.

$\lambda\alpha = (\lambda x, \lambda y)$ என வரையறுப்போம். $\lambda x \in S,\ \lambda y \in T$ ஆதலால், எண்ணியால் V-ல் உள்ள உறுப்புகளைப் பெருக்குதல் எனும் இச்செயல் V-ல் நன்கு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. மேலும், இச்செயலின்கீழ் V அடைப்புள்ளதாகும்.

$\alpha, \beta \in V,\ \lambda, \mu \in F$ என்றால், $\lambda(\alpha \oplus \beta) = \lambda\alpha \oplus \lambda\beta$; $(\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha \oplus \mu\alpha$; $(\lambda\mu)\alpha = \lambda(\mu\alpha)$, $1 \cdot \alpha = \alpha$ என்பனவற்றை எளிதில் நிறுவலாம். ஆதலால், V-ல் வரையறுக்கப்பட்ட கூட்டல், எண்ணியால் பெருக்கல் என்ற செயல்களின்கீழ் V ஆனது F-ன் மீது ஓர் அருபவெக்டர் வெளியை அமைக்கின்றது. இவ்வெளியை S, T-க்களின் நேரிடைக் கூட்டலெனப்படும். இதை $S \oplus T$ என்று குறிப்போம்.

$S' = \left\{ (x, 0') \mid x \in S \right\},\ T' = \left\{ (0, y) \mid y \in T \right\}$ என்ற V-ன் இரு உள்ளடங்கு கணங்களும், V-ல் இரு உள்ளடங்கு வெளிகளாகுமென எளிதில் நிறுவலாம். மேலும், $x \in S$ என்றால், $f: x \longrightarrow (x, 0)$ என்ற S-லிருந்து S'-ற்குச் செல்லும் அமைப்புமாற்றம் (mapping) ஓர் ஓரினச்சார்பு (Isomorphism) ஆகும் எனவும் நிறுவலாம். இதேபோன்று $y \in T$ எனின் $g: y \longrightarrow (0, y)$ என்ற T-யிலிருந்து T'-ற்குச்செல்லும் அமைப்புமாற்றம் ஓர் ஓரினச்சார்பு எனவும் நிறுவலாம்.

(அ-து) $S \cong S'$, $T \cong T'$ ஆகும். (x, y) என்பது V-ல் யாதானுமொரு உறுப்பு என்றால் $(x, y) = (x, 0') \oplus (0, y) = U \oplus V$, $[U \in S', V \in T']$ $(x, y) = U' + V'$, $U' = (x', 0') \in S'$; $V' = (0, y') \in T'$ என்றால் $(x, y) = (x' 0') \oplus (0', y') = (x' y')$ $\therefore$ $x = x'$, $y = y'$. $\therefore$ $U = U'$, $V = V'$. ஆதலால், V-ல் உள்ள எந்தவொரு உறுப்பு (x, y)-ஐயும் S', T' ஆகியவற்றில் முறையே ஒவ்வொரு உறுப்பை எடுத்துக்கொண்டு அவற்றின் கூட்டலாக ஒரே ஒரு வழியில்தான் எழுதமுடியும்.

$\therefore$ S', T' என்ற V-ன் உள்ளடங்கு வெளிகள் V-ன் நிரப்பு உள்ளடங்கு வெளிகளாகும்.

குறிப்பு: $S \cong S'$ $T \cong T'$ ஆதலால் S, T ஆகியவற்றை $S \oplus T$-யின் நிரப்பு உள்ளடங்கு வெளிகளாகக் கருதலாம்.

§ 8·15. நிரப்பு உள்ளடங்கு வெளிகளும் நேரிடைக்கூட்டலும்: (Complementary Subspaces and Direct Sum)

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த வெறுமையற்ற அருபவெக்டர் வெளி V-ல் S, T என்பன நிரப்பு உள்ளடங்கு வெளிகளாக இருக்கட்டும். $F : x + y \longrightarrow (x, y)$ என்ற V-யிலிருந்து $S + T$க்குச் செல்லும் அமைப்புமாற்றம் ஒரு முழு ஓரினச்சார்பென நிறுவலாம் (onto Isomorphism). $\therefore$ $V \cong S \oplus T$ ஆதலால், S, T என்பன V-ன் நிரப்பு உள்ளடங்கு வெளிகளானால் V-யை S, T ஆகியவற்றின் நேரிடைக்கூட்டலென அழைக்கின்றோம்.

குறிப்பு: $V \cong S \oplus T$ ஆதலால், V-யையும் $S \oplus T$-யையும் வேற்றுமைப்படுத்த V-யை S, T ஆகியவற்றின் உட்புற நேரிடைக் கூட்டல் (internal direct sum) என்றும் $S \oplus T$-யை S, T ஆகியவற்றின் வெளிப்புற (external) நேரிடைக்கூட்டலெனவும் அழைப்பது வழக்கம்.

§ 8·16. முடிவுள்ள பரிமாணங்கொண்ட அருபவெக்டர் வெளியில் ஓர் உள்ளடங்கு வெளிக்கு நிரப்பி உண்டு என்று கூறும் தேற்றம்: (Existence theorem for complements in a finite dimensional abstract vector space)

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த வெளிப்படையல்லாத, முடிவுள்ள n பரிமாணங்கொண்ட V-ல் உள்ள, r பரிமாணங் கொண்ட நிரப்பி ஒன்றுவது உண்டு.

நிரூபணம் :

தரவின்படி $d(V)=n$ ஆகும்.

வகை **1** : $r=0$ என்போம். $S=\{0\}$ ஆகும். $\therefore$ S-ன் நிரப்பி, V என்பது வெளிப்படை [$\because X \in V \Longrightarrow X=0+X, 0 \in S, X \in V$] இங்கு நிரப்பியின் பரிமாணம் $n=n-0$ ஆகும். $r=n$ என்றால், $S=V$ ஆகும். $\therefore$ $\{0\}$ என்ற வெளிப்படை உள்ளடங்கு வெளி S-ன் நிரப்பியாகும். நிரப்பியின் பரிமாணம் $0=n-n$ ஆகும்.

வகை **2** : $0<d(S)=r<n$ ஆக இருக்கட்டும். அப்படியானால், $B=\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ என்ற r உறுப்புகளைக் கொண்ட தளம் ஒன்று S-ல் உள்ளது. இது V-ல் ஒருபடிச்சாராததால் இதனை விரிவுபடுத்தி $B_1=\{x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1} \ldots, x_n\}$ என்ற n உறுப்புகளைக் கொண்ட தளத்தை V-ல் அமைக்கலாம். $\{x_{r+1}, \ldots, x_n\}$ என்ற $(n-r)$ உறுப்புகளைக் கொண்ட கணத்தால் உருவாக்கப்பட்ட V-ன் உள்ளடங்கு வெளியை T என்போம். T ஆனது ஒருபடிச் சாராதுள்ளதால் இது T-ல் ஒரு தளமாகும்.

$$\therefore \quad d(T)=n-r \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$\alpha \in V$ என்போம். $\therefore$ $\alpha=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \quad [\lambda_i \in F]$

$$\therefore \quad \alpha=\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i+\sum_{j=r+1}^{n} \lambda_j x_j=X+Y, [X \in S, Y \in T] \ldots (2)$$

$\alpha=X'+Y' \quad [X' \in S, Y' \in T]$ என்றால்,

$$\alpha=\sum_{i=1}^{r} \mu_i x_i+\sum_{j=r+1}^{n} \mu_j x_j \quad [\mu_i, \mu_j \in F]$$

(1) லிருந்து, $X+Y=X'+Y' \quad \therefore X-X'+(Y-Y')=0$

$$\therefore \sum_{i=1}^{r} (\lambda_i-\mu_i) x_i+\sum_{j=r+1}^{n} (\lambda_j-\mu_j) x_j=0$$

$$\therefore \quad \lambda_i-\mu_i=0, \ \lambda_j-\mu_j=0 \quad [i=1, \ldots, j=r+1, \ldots, n]$$

[$\because$ B_1 ஒரு தளமாதலால், ஒரு படிச்சாராதுள்ளது]

$$\therefore \quad \lambda_i=\mu_i, \ \lambda_j=\mu_j \ \therefore \ X=X', Y=Y' \qquad \ldots\ldots\ldots(3)$$

(2), (3) லிருந்து, V-ல் உள்ள எந்த உறுப்பு α-வையும், S, T ஆகியவற்றில் முறையே ஒவ்வொரு உறுப்பை எடுத்துக் கொண்டு, அவற்றின் கூட்டலாக ஒரே ஒரு வழியில்தான் கூறமுடியும் என அறிகிறோம். எனவே T ஆனது V-ல் S-ன் நிரப்பியாகும். மேலும், $d(T) = n - r$ ஆகும்.

குறிப்பு: S-ல் உள்ள தளம் B-யை V-ன் தளமாகப் பல வழிகளிலும் விரிவுபடுத்த முடியுமாதலாலும், S-ல் பல தளங்கள் உள்ளதாலும், S-ன் நிரப்பி T ஆனது ஒற்றைத்தன்மை யுடையதல்ல. அதாவது S-ற்கு V-ல் பல நிரப்பிகள் இருக்கலாம். $S = \{0\}$ அல்லது $S = V$ என்று இருந்தால் மட்டுமே அதன் நிரப்பி ஒற்றைத் தன்மையுடையதாகும்.

§ 8·17. துணைக்கோட்பாடு : (Lemma)

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த வெறுமையற்ற அருபவெக்டர் வெளியில் S, T என்பன இரு உள்ளடங்கு வெளிகளாகும். மேலும், $S \cap T = 0$. $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ என்ற r தனித்தனியான உறுப்புகளைக் கொண்ட கணம் S-ல் ஒருபடிச்சாராமலும், $\{y_1, y_2, \ldots, y_s\}$ என்ற s தனித்தனியான உறுப்புகளைக் கொண்ட கணம் T-ல் ஒருபடிச்சாராதுமிருந்தால் $\{x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1, y_2, \ldots, y_s\}$ என்ற கணம் V-ல் தனித்தனியான $(r + s)$ உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒருபடிச்சாராக்கணமாக இருக்கும்.

நிரூபணம்:

$B_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$, $B_2 = \{y_1, y_2, \ldots, y_s\}$ $B_3 = \{x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s\}$ என்போம். தரவின்படி B_1, B_2-ல் முறையே r, s தனித்தனியான உறுப்புகளுள்ளன.

ஆதலால், B_3-ல் $X_i \neq X_j$ $[i \neq j, 1 \leqslant i, j \leqslant r]$, $Y_p \neq Y_q$ $[p \neq q, 1 \leqslant p, q \leqslant s]$ ஆனால் $X_i = Y_p$ என்றிருந்தால் $[1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant p \leqslant s]$ $X_i = Y_p \in S \cap T$ என்று கிடைக்கும். $[\because X_i \in S, Y_p \in T]$ $\therefore X_i = Y_p = 0$ $[\because S \cap T = 0]$ X_i, Y_p என்பன முறையே ஒருபடிச்சாராதிருப்பதால் இது ஒரு முரண்பாடாகும்.

$\therefore$ B_3-ல் $X_i \neq Y_p$ (எந்தவொரு i, p-க்கும்) எனவே, B_3-ல் $(r+s)$ தனித்தனியான உறுப்புகளுள்ளன ....(1)

$$\lambda_i, \mu_j \in F \ (i=1, \ldots r, \ j=1, \ldots s,), \ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i + \sum_{i=1}^{s} \mu_j Y_j = 0$$

என்ருல், $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i = \sum_{j=1}^{s} (-\mu_j) Y_j$ இடப்பக்கத்திலுள்ள உறுப்பு S-லும், வலப்பக்கத்திலுள்ள உறுப்பு T-யிலும்-இருப்பதால், இருபக்கத்திலுமுள்ள உறுப்பும் $S \cap T$-ல் உள்ளது. ஆனுல்

$$S \cap T = 0 \quad \therefore \quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i = 0 ; \ \sum_{j=1}^{s} (-\mu_j) Y_j = 0$$

$$\therefore \quad \lambda_1 = 0 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r, \ \mu_1 = 0 = \mu_2 = \ldots = \mu_s.$$

எனவே, $\{x_1, x_2, \ldots, x_r, \ y_1, \ldots, y_s\}$ ஆனது V-ல் ஒருபடிச் சாராதது ....(2)

(1), (2) லிருந்து தேவையான முடிவு கிடைக்கும்.

§ 8·18. தேற்றம்:

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த வெளிப்படையல்லாத முடிவுள்ள பரிமாணங்கொண்ட அருபவெக்டர் வெளி V-ல் S, T என்ற இரு உள்ளடங்கு வெளிகள், நிரப்பு உள்ளடங்கு வெளிகளாவதற்குத் தேவையான, போதுமான கட்டுப்பாடுகள்,

(i) $S \cap T = 0$ (ii) $d(S) + d(T) = d(V)$

நிருபணம்:

S, T என்பன, V-ல் நிரப்பு உள்ளடங்கு வெளிகளாகட்டும்.

$S = 0$ எனின் $T = V$ $\therefore$ $S \cap T = 0$ இதுபோல்,
$T = 0$ என்ருல் $S = V$ $\therefore$ $S \cap T = 0$
$S \neq 0$, $T \neq 0$ என்றிருக்கட்டும்.

$S \cap T$-யில் யாதானுமொரு உறுப்பு X ஐ எடுத்துக்கொள்வோம்.

அப்படியானுல், $X \in S \cap T$ ஆதலால், $X \in S$, $S \in T$

$$\therefore \quad X \in V, \quad X = X + 0 \quad [X \in S, \ 0 \in T]$$
$$X = 0 + X \quad [0 \in S, \ X \in T]$$

ஆனுல், S, T என்பன V-ல் நிரப்பு உள்ளடங்கு வெளிகளாதலால், V-ல் எந்தவொரு உறுப்பையும் S, T-ல் முறையே ஒவ்வொரு உறுப்பாக எடுத்துக்கொண்டு அவற்றின் கூட்டலாக ஒரே ஒரு வழியில்தான் எழுதமுடியும்.

$\therefore \quad X=0.$ (அ-து) $X \in S \cap T \Longrightarrow X=0$

$\therefore \quad S \cap T = 0$ ....(1)

அடுத்து, V முடிவுள்ள பரிமாணங்கொண்டுள்ளதாலும் S, T என்பன V-ல் உள்ளடங்கு வெளிகளாதலாலும், S, T என்பன முடிவுள்ள பரிமாணங்கொண்டுள்ளன.

$S=0$ எனின் $T=V \quad \therefore \quad d(S)+d(T)=0+d(V)=d(V)$ இதுபோல் $T=0$ என்றாலும் $d(S)+d(T)=d(V)$ ஆகும்.

$S \neq 0, T \neq 0$ என்றிருக்கட்டும். $d(S)=r, d(T)=s$ என்போம். அப்படியானால், S-ல் $B_1=\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ என்ற r உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு தளமும் உண்டு. (§ 5·8) $S \cap T=0$ ஆதலால், கிளைக்கோட்பாட்டின்படி (§ 6·17), $\{x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s\}$ என்ற கணம் V-ல் $(r+s)$ தனித்தனி உறுப்புகளைக் கொண்டு ஒருபடிச்சாராதுள்ளது ....(2)

$\alpha \in V$, என்றால் S, T-க்கள் V-ல் நிரப்பு உள்ளடங்கு வெளிகளாதலால்,

$$\alpha = X+Y = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i + \sum_{j=1}^{s} \mu_j Y_j \quad [X \in S, \quad Y \in T; \quad \lambda_i, \mu_j \in F]$$

$\therefore \quad \{x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s\}$ ஆனது V-யை உருவாக்குகிறது ....(3)

(2), (3)-லிருந்து, $\{x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1 \ldots, y_s\}$ ஆனது V-ல் ஒரு தளமெனவும், இதில் $(r+s)$ தனித்தனி உறுப்புகள் உள்ளன எனவும் அறிகிறோம். $\therefore \quad d(V)=r+s$ ....(4)

(1), (4)-லிருந்து, $S \cap T=0, d(S)+d(T)=d(V)$ ஆகும்.

அடுத்து, நிபந்தனை போதுமானதென நிறுவுவோம். S, T என்ற V-ன் உள்ளடங்கு வெளிகள் (i) $S \cap T=0$
(ii) $d(S)+d(T)=V$ என்றவாறு அமையட்டும்.

வகை. **1:** $S=0$ ஆனால் $d(S)=0. \quad \therefore \quad d(T)=d(V)$ ஆனால், T ஆனது V-ன் உள்ளடங்கு வெளியாதலால், $T=V$ ஆகும்.

எனவே, S, T என்பன V-ல் நிரப்பு உள்ளடங்கு வெளிகளாகும். இதுவே $T=0$ என்றாலும் பொருந்தும்.

வகை. 2: $S \neq 0$, $T \neq 0$ என்க. V முடிவுள்ள பரிமாணங் கொண்டுள்ளதால் S, T-க்களும் முடிவுள்ள பரிமாணங் கொண்டனவாகும். $d(S)=r$, $d(T)=s$ என்க. S-ல் $B_1=\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ என்ற தளமும், T-ல் $B_2=\{y_1, y_2, \ldots, y_s\}$ என்ற தளமும் உண்டு. $S \cap T=0'$ ஆதலால், § 6·17-ன்படி $B_3=\{x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s\}$ என்ற கணம் V-ல் $(r+s)$ தனித்தனி உறுப்புகளை கொண்டு ஒருபடிச்சாராதுள்ளது.

$d(V)=d(S)+d(T)=r+s$ ஆதலால், V-ல் B_3 ஆனது ஒரு தளமாகும். எனவே, $X \in V$, $\lambda_i, \mu_j \in F$ என்றால்,

$$X=\sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i+\sum_{j=1}^{s} \mu_j X_j=U+V\,[U \in S, V \in T] \quad \ldots(5)$$

$X=U'+V'$; $U' \in S$, $V' \in T$ என்றால் $U+V=U'+V'$; $\therefore$ $U-U'=V'-V$, $U-U' \in S$; $V'-V \in T$ ஆதலால், $U-U'=V-V' \in S \cap T$

ஆனால் $S \cap T=0$ $\therefore$ $U-U'=V-V'=0$ $\therefore$ $U=U'$, $V=V'$ ....(6)

$\therefore$ S, T என்பன V-ல் நிரப்பு உள்ளடங்கு வெளிகளாகும். § (6·13)

§ 8·19. கிளைத்தேற்றம்:

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த, வெளிப்படையல்லாத முடிவுள்ள பரிமாணங்கொண்ட அருபவெக்டர் வெளி V-ன் பரிமாணம், அதிலுள்ள S, T என்னும் இரு நிரப்பு உள்ளடங்கு வெளிகளின் பரிமாணங்களின் கூட்டுத்தொகையாகும்.

§ 8·20. தேற்றம்:

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த, வெளிப்படையல்லாத, முடிவுள்ள பரிமாணங்கொண்ட அருபவெக்டர் வெளி V-ல் உள்ள S, T எனும் உள்ளடங்கு வெளிகள், நிரப்பாவதற்குத் தேவையான, போதுமான விதி, S, T ஆகியவற்றில் முறையே உள்ள B_1, B_2 என்ற தளங்கள் (i) $B_1 \cap B_2$ வெறுமையற்றும் (ii) $B_1 \cup B_2$ ஆனது V-ல் ஒரு தளமாகவும் அமையுமாறு இருக்கவேண்டுமென்பதாகும்.

நிரூபணம்:

V-ல் S, T என்பன நிரப்பு உள்ளடங்கு வெளிகளாகட்டும். $S=0$ என்றால் $T=V$ எனவும், $T=0$ என்றால் $S=V$ என்றும்

கிடைக்கும். இருவகைகளிலும் ஒன்றின்தளம் வெறுமைக் கணமாகவும், மற்றதன்தளம் V-ல் ஒரு தளமாகவும் இருப்பதால் இவ்விரு தளங்களும் ஒன்றிலிருந்து, மற்றது பிரிந்திருப்பதோடு (disjoint), அவற்றின் இணைப்புக் (union) கணம் V-ன் தளமாக இருக்கின்றது.

$S \neq 0$, $T \neq 0$ என்க. S, T-க்கள் முடிவுள்ள பரிமாணங் கொண்டவை.

$d(S) = r$, $d(T) = s$ என்போம். $B_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$, $B_2 = \{y_1, \ldots, y_s\}$ என்பன முறையே S, T-க்களில் யாதானுமிரு தளங்களாக இருக்கட்டும்.

S, T நிரப்பு உள்ளடங்கு வெளிகளாதலால் $S \cap T = 0$ ஆகும்.

$\therefore$ B_1, B_2-க்களிடையே பொது உறுப்பு இருந்தால் அது 0-வாகத்தான் இருக்கமுடியும். ஆனல், இவை தளங்களாதலால் இவற்றில் 0 இருக்கமுடியாது.

$\therefore$ $B_1 \cap B_2 = \Phi$ மேலும் $S \cap T = 0$ ஆதலால், § 6·17-ன்படி $B_3 = \{x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s\}$ ஆனது V-ல் ஒருபுடிச்சாரா துள்ளது ....(1)

ஆனல் $B_1 \cap B_2 = \Phi$ ஆதலால் $B_3 = B_1 \cup B_2$ ஆகும்......(2)

$$\alpha \in V \text{ என்ருல், } \alpha = X + Y = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i + \sum_{j=1}^{s} \mu_j Y_j$$

$$[X \in S,\ Y \in T;\ \lambda_i,\ \mu_j \in F]$$

எனவே, B_3 ஆனது V-யை உருவாக்குகின்றது.

$\therefore$ (1), (2) இவற்றிலிருந்து $B_1 \cup B_2$ ஆனது V-ல் ஒரு தளமாகும். ($\therefore$ நிபந்தனை தேவையானது) அடுத்து, V-ல் S, T என்பன உள்ளடங்கு வெளிகளாகவும் இவற்றில் முறையே உள்ள தளங்கள் B_1, B_2 என்பன (i) $B_1 \cap B_2 = \Phi$ (ii) $B_1 \cup B_2$ என்பது V-ன் ஒருதளம், என்றவாறும் அமையட்டும்.

$S = 0$ என்ருல், $B_1 = \Phi$ $\therefore$ $B_1 \cup B_2 = B_2$ என்பது V-ன் தளமாகும்.

$\therefore$ $T = V$. எனவே, $S = 0$, $T = V$ என்பன V-ல் நிரப்பு உள்ளடங்கு வெளிகளாகும். இதுவே $T = 0$ என்ருலும் பொருந்தும்.

$S \neq 0$, $T \neq 0$ என்க. $d(S)=r$, $d(T)=s$ என்போம்.

$B_1=\{x_1, x_2, .., x_r\}$, $B_2=\{y_1, y_2, ..., y_s\}$ என்பன முறையே S, T-க்களில் தளமாகட்டும்.

$B_1 \cap B_2=\Phi$ ஆதலால், $B_1 \cup B_2=\{x_1, x_2, ..., x_r\ y_1, ..., y_s\}$ ஆகும். மேலும், தரவின்படி $B_1 \cup B_2$ ஆனது V-ல் ஒரு தளமாகும். $\therefore$ $\alpha \in V$ என்றால்,

$$\alpha = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i + \sum_{j=1}^{s} \mu_j Y_j = X+Y \qquad ....(3)$$

$$[\lambda_i, \mu_j \in F;\ X \in S,\ Y \in T]$$

$\alpha = X'+Y'$ என்றால் $[X' \in S,\ Y' \in T;\ X' = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i', Y_i,$

$$Y' = \sum_{j=1}^{s} \mu_j' X_j]$$

$X+Y=X'+Y'$, $\therefore$ $X-X'+Y-Y'=0$. அதாவது,

$$\sum_{i=1}^{r} (\lambda_i-\lambda_i') X_i + \sum_{j=1}^{s} (\mu_j-\mu_j')\ Y_j=0. \quad \therefore \ \lambda_i = \lambda_i',$$

$$\mu_j = \mu_j' \qquad \therefore \ X=X',\ Y=Y' \qquad ....(4)$$

(3), (4) லிருந்து S, T என்பன V-ல் நிரப்பு உள்ளடங்கு வெளிகளாகும்.

§ 8·21. கிளைத்தேற்றம் :

S, T என்பன V-ல் இரு உள்ளடங்கு வெளிகளாகும், B, B'; B_1, B_1' என்பன முறையே S, T-க்களில் தளங்களாகவும் $B_1 \cap B=\Phi$, $B \cup B_1$ ஆனது V-ல் ஒருதளம் என்றுமிருந்தால் $B' \cap B_1'=\Phi$ ஆகவும் $B' \cup B_1'$ என்பது V-ல் ஒருதளமாகவும் இருக்கும்.

நிரூபணம் :

$B \cap B_1=\Phi$, $B \cup B_1$ என்பது V-ல் ஒரு தளமாதலால் S, T என்பன V-ன் நிரப்பு உள்ளடங்கு வெளிகளாகும் (§ 8·20)

B', B_1' என்பன முறையே S, T-க்களில் தளங்களாதலால், $B' \cap B_1'=\Phi$ ஆகவும் $B' \cup B_1'$ என்பது V-ன் ஒரு தளமாகவும் இருக்கும். (§ 8·20)

§ **8·22.** தேற்றம் :

V-ல் (§ 8·20 பார்க்க) S, T என்பன நிரப்பு உள்ளடங்கு வெளிகள் ஆவதற்குத் தேவையான, போதுமான விதிகள் (i) $S+T=V$ (ii) $S \cap T=0$ என்பதாகும்.

நிரூபணம் :

V-ல் S, T என்பன நிரப்பு உள்ளடங்கு வெளிகளாக இருக்கட்டும். $S \cap T=0$ என்பது தெளிவு (§ 6·18. முற்பகுதி)

S, T என்பன V-ன் உள்ளடங்கு வெளிகளாதலால் $S+T \subset V$ ....(1)

மேலும், இவை நிரப்பாதலால், $\alpha \in V$ என்ருல் $\alpha=X+Y \in S+T\ (X \in S,\ Y \in T)$ $\therefore\ V \subset S+T$ ....(2)

(1), (2) லிருந்து $V=S+T$ ($\therefore$ நிபந்தனை தேவையானது)

அடுத்து V-யில் S, T என்ற இரு உள்ளடங்கு வெளிகள் $S+T=V, S \cap T=0$ என்றவாறு உள்ளன என்று கொள்வோம்.

$S+T=V$ ஆதலால், $\alpha \in V$ என்ருல், $\alpha \in S+T$

$\therefore\ \alpha=X+Y\ (X \in S,\ Y \in T)$ ....(3)

$\alpha=X'+Y'$ என்ருல் $(X' \in S,\ Y' \in T)$, $X+Y=X'+Y'$. $\therefore\ X-X'=Y'-Y$, $X-X' \in S$, $Y'-Y \in T$ ஆதலால், $X-X'=Y'-Y \in S \cap T=0$

$\therefore\ X-X'=Y'-Y=0$ எனவே $X=X'$, $Y=Y'$ ....(4)

(3), (4) லிருந்து, S, T என்பன V-ல் நிரப்பு உள்ளடங்கு வெளிகளாகும்.

§ **8·23.** குறிப்பு **1:** மேற்கூறிய தேற்றத்திலிருந்து, நிரப்பு உள்ளடங்கு வெளிகளைப் பின்வருமாறும் வரையறுக்கலாம்:— "V-ல் S, T என்ற உள்ளடங்கு வெளிகள் $S+T=V$, $S \cap T=0$ என்றவாறு அமைந்தால் அவை V-ன் நிரப்பு உள்ளடங்கு வெளிகளாகும்."

குறிப்பு **2:** $V=S \oplus T$ என்ருல் $V=S+T$ ஆகும். $\therefore\ S \oplus T=S+T$ ஆனல் $S+T=V$ என்ருல் $S+T$ என்பது $S \oplus T$ ஆக

இருக்கத்தேவையில்லை. $S+T=V$, $S \cap T = 0$ என்றால்தான் $S+T = S \oplus T$ ஆகும்.

§ 8·24. நிரப்பு உள்ளடங்கு வெளிக் கோட்பாட்டை விரிவு படுத்துதல் :

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-ல் (வெளிப்படையல்லாத, முடிவுள்ள பரிமாணங்கொண்டது) $u_1, u_2, \ldots, u_n$, என்பன உள்ளடங்கு வெளிகளாக இருக்கட்டும். V-ல் உள்ள எந்தவொரு உறுப்பையும் $u_1, u_2, \ldots, u_n$ களில் முறையே ஒவ்வொரு உறுப்பை எடுத்துக்கொண்டு அவைகளின் கூட்டலாக ஒரே ஒரு வழியில்தான் கூறமுடியுமானால் $u_1, u_2, \ldots, u_n$ என்பன V-ல் நிரப்பு உள்ளடங்கு வெளிகளெனப்படும். இங்கு u_r என்பது மற்ற உள்ளடங்கு வெளிகளின் நிரப்பி எனப்படும்.

(அ-து) $\alpha \in V$ என்றால் $\alpha = x_1 + x_2 + \ldots, + x_n$ $(x_t \in u_t)$ ஆகும். மேலும், $\alpha = x_1' + x_2' + \ldots, + x_n'$ $(x_t' \in u_t)$ என்றால் $x_i' = x_i$ ஆகும். இந்நிலையில் V ஆனது $u_1, u_2, \ldots, u_n$, களின் உட்புற நேரிடைக்கூட்டல் என அழைக்கலாம். இதனை $V = u_1 \oplus u_2 \oplus \ldots, \oplus u_n$ என்று குறிப்பது வழக்கம். மேலும், V-ல் இரு நிரப்பு உள்ளடங்கு வெளிகளைக் கொண்டு நிரூபித்த அத்தனை முடிவுகளையும் இங்கும் நிரூபிக்கலாம்.

§ 8·25. வடிவகணிதமுறையில் விளக்கம் :

$V_3(R)$ ல் பரிமாணம் 2 கொண்ட ஒவ்வொரு உள்ளடங்கு வெளியும் கனபரிமாண வெளியில் ஆதிவழிச் செல்லுமொரு தளமாகும் என அறிவோம்.

$V_3(R)$ ல் பரிமாணம் 2 கொண்ட ஓர் உள்ளடங்கு வெளியும், இவ்வெளியிலிருந்து பிரிந்துள்ள பரிமாணம் 1 கொண்ட எந்த ஓர் உள்ளடங்கு வெளியும், நிரப்பு உள்ளடங்கு வெளிகளாகும். இதையே வடிவகணிதத்தில், ஆய ஆதிவழிச் செல்லும் ஒரு தளம் P யும், அத்தளத்திலில்லாத, ஆதிவழிச் செல்லுமொரு நேர்கோடு L-ம் நிரப்பு உள்ளடங்கு வெளிகள் எனலாம். வெளியில் (space) உள்ள ஆய ஆதிவழிச் செல்லும் எந்த ஒரு வெக்டரையும் P, L ஆகியவற்றில் முறையே ஒவ்வொரு வெக்டரை எடுத்துக்கொண்டு, அவற்றின் கூட்டலாக ஒரே ஒரு வழியில் தான் சொல்லமுடியும். ஆதலால், கனபரிமாண வெளியானது P, L ஆகியவற்றின் நேரிடைக்கூட்டல் எனலாம்.

§ **8·26**. **அருபவெக்டர் வெளியின் ஈவுவெளி : (Quotient space of an abstract vector space)**

ஈவுக்குழு, ஈவுவளையம் போன்றவற்றை முன்னரே அறிந்திருக்கிறோம். இங்கு ஈவுவெளி எவ்வாறு வரையறுக்கப் படுகிறது எனக் காணலாம்.

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-ல் M என்ற உள்ளடங்கு வெளிக்குப் பல நிரப்பிகளுண்டு. அவற்றில் எந்த ஒன்றை விசேடமாகக் கருதுவது என்பதற்கு இயற்கை யான வழி ஒன்றும் கிடையாது. ஆனல் M, V-யிலிருந்து ஒரு புதிய அருபவெக்டர் வெளியை அமைத்து, அவ்வெளி M-ன் நிரப்பி போன்று செயல்படும் என்பதைப் பின்வரும் வரிகளில் பார்க்கலாம். இவ்வெளியே M ஐச் சார்ந்த V-ன் ஈவு வெளி எனப் படும். (Quotient space of V relative to M).

§ **8·27**. F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-ல் M என்பது ஓர் உள்ளடங்கு வெளியாகட்டும். $\alpha \in V$ என்றல், $M + \alpha = \{x + \alpha \mid x \in M\}$ என்ற V-ன் உள்ளடங்கு கணம் M-ன் **வலது உபகணம்** (right coset), $\alpha + M = \{\alpha + x \mid x \in M\}$ ஆனது M-ன் **இடது உபகணம்**(left coset) எனவும் வரையறுக்கப் படுகிறது.

குறிப்பு 1 : $\alpha \in M$ என்றல் $M + \alpha = M$ ஆகும். மேலும், $M + \alpha = \alpha + M$ ஆதலால், $M + \alpha$ வை M-ன் உபகணம் என்றே அழைக்கலாம்.

மேலும், $M + \alpha = M + \beta$ என்பன M-ன் யாதானுமிரு உபகணங்களாக இருந்தால், $M + \alpha = M + \beta$ அல்லது $M + \alpha \cap M + \beta = \Phi$ என்று நிரூபிக்கலாம். மேலும், $M + \alpha = M + \beta \iff \alpha - \beta \in M$ என்றும் எளிதாக நிறுவலாம்.

குறிப்பு 2 : K என்பது M-ன் உபகணம் என்றல், $K = M + \alpha$ என்ற வகையில் V-ல் ஓர் உறுப்பு α ஆக உள்ளது.

§ **8·28**. F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளியில் V-ல் M என்ற உள்ளடங்கு வெளியின் எல்லா உபகணங்களையும் கொண்ட கணத்தில் கூட்டலும், எண்ணியால் பெருக்கலும், பின் வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது. $M + \alpha$, $M + \beta$ என்பன M-ன் யாதானுமிரு உபகணங்களெனின்,

$$(M + \alpha) + (M + \beta) = M + (\alpha + \beta) \; [\alpha, \beta \in V]$$

மேலும், $\lambda \in F$ என்றல், $\lambda (M + \alpha) = M + \lambda \alpha$ ஆகும்.

குறிப்பு: இவ்விரு செயல்களும் நன்கு வரையறுக்கப்பட்டதாகும். ஏனெனில் $M+\alpha = M+\alpha'$, $M+\beta = M+\beta'$ என்றால் $M+(\alpha+\beta) = M+(\alpha'+\beta')$ எனவும் $M+\lambda\,\alpha = M+\lambda\,\alpha'$ எனவும் எளிதாக நிரூபிக்கலாம்.

§ 8.29. தேற்றம்:

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த வெளிப்படையல்லாத அருபவெக்டர் வெளி V-ல் உள்ள M என்ற உள்ளடங்கு கணத்தின் எல்லா உபகணங்களையும் கொண்ட கணம் § 6·28-ல் வரையறுக்கப்பட்ட கூட்டல், எண்ணியால் பெருக்கல் ஆகிய செயல்களின்கீழ் F-ன் மீது ஓர் அருபவெக்டர் வெளியை அமைக்கின்றது.

நிரூபணம்:

M-ன் உள்ளடங்கு கணத்தின் எல்லா உபகணங்களையும் கொண்ட கணத்தை V' என்று குறிப்போம். V'-ல் $M+\alpha$, $M+\beta$ என்பன யாதானுமிரு உறுப்புகளெனின் $(\alpha, \beta \in V)$ $(M+\alpha)+(M+\beta) = M+(\alpha+\beta) \in V'$

$$\lambda\,(M+\alpha) = M+\lambda\,\alpha \in V' \quad [\because \ \alpha+\beta,\ \lambda\,\alpha \in V,\ \lambda \in F]$$

$\therefore$ V'-ல் வரையறுக்கப்பட்ட கூட்டல், எண்ணியால் பெருக்கல் ஆகிய செயல்களின்கீழ் V அடைப்புள்ளது.

மேலும், $[(M+\alpha) + (M+\beta)] + (M+\gamma)$

$$\begin{aligned} &= [M + (\alpha+\beta)] + (M+\gamma) \ [\alpha, \beta, \gamma \in V] \\ &= M + (\alpha+\beta+\gamma) = (M+\alpha) + [M + (\beta+\gamma)] \\ &= (M+\alpha) + [(M+\beta) + (M+\gamma)] \end{aligned}$$

ஆதலால் V'-ல் கூட்டல் சேர்ப்பு விதிக்குட்பட்டது.

$(M+\alpha) + (M+\beta) = M+(\alpha+\beta) = M+(\beta+\alpha) = (M+\beta) + (M+\alpha)$ [பரிமாற்று விதி]

0 என்பது V-ல் பூச்சிய உறுப்பைக் குறித்தால், $M+0 = M$ ஆனது V'-ல் கூட்டல் அலகாகும். $M+(-\alpha)$ ஆனது V'-ல் $M+\alpha$-ன் கூட்டல் எதிர்மறை. ஆதலால், V' ஆனது அக்கணத்தில் வரையறுக்கப்பட்ட கூட்டலின்கீழ் ஒரு பரிமாற்றுக்குழுவை அமைக்கின்றது.

$$\lambda, \mu \in F \text{ என்றால், } \lambda[\mu(M+\alpha)] = \lambda[M+\mu\alpha] = M+(\lambda\mu)\alpha$$
$$= \lambda\mu(M+\alpha)$$

$$\lambda[(M+\alpha)+(M+\beta)] = \lambda[M+(\alpha+\beta)] = M+\lambda(\alpha+\beta)$$
$$= M+\lambda\alpha+\lambda\beta$$
$$= (M+\lambda\alpha)+(M+\lambda\beta) = \lambda[M+\alpha]+\lambda[M+\beta]$$

$$(\lambda+\mu)[M+\alpha] = M+(\lambda+\mu)\alpha = M+(\lambda\alpha+\mu\alpha)$$
$$= (M+\lambda\alpha)+(M+\mu\alpha)$$
$$= \lambda(M+\alpha)+\mu(M+\alpha)$$

V-ன் பெருக்கல் அலகை 1 என்று குறித்தால், $1\cdot(M+\alpha) = M+1\cdot\alpha = M+\alpha$. எனவே, V' என்ற கணம் அதில் வரையறுக்கப் பட்ட கூட்டல், எண்ணியால் பெருக்கல் எனுஞ்செயல்களின்கீழ் F-ன் மீது ஓர் அருபவெக்டர் வெளியாகும்.

§ 8·30. ஈவுவெளி :

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த வெளிப்படையல்லாத அருபவெக்டர் வெளி V-ல் உள்ள உள்ளடங்கு வெளி M-ன் எல்லா உபகணங்களையும் கொண்ட கணம் F-ன் மீதமைக்கும் அருபவெக்டர் வெளியே M ஐச் சார்ந்த V-ன் ஈவுவெளி எனப்படும். இதனை $\frac{V}{M}$ என்று குறிப்போம்.

§ 8·31. தேற்றம் :

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த வெளிப்படையல்லாத அருபவெக்டர் வெளி V-ல் M என்ற உள்ளடங்கு வெளியின் எந்த ஒரு நிரப்பியும் $\frac{V}{M}$-க்கு ஓரினச்சார்பில் (Isomorphic) உள்ளதாகும்.

நிருபணம் :

N என்பது M-ன் யாதானுமொரு நிரப்பியாகட்டும். $x \in N$, $f: x \longrightarrow M+x$ என்ற, N-லிருந்து $\frac{V}{M}$-ற்குச் செல்லும் அமைப்பு மாற்றத்தை (mapping) எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$x_1, x_2 \in N,\ f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow M+x_1 = M+x_2$$
$$\Longrightarrow x_1 - x_2 \in M$$

$$\Longrightarrow x_1 - x_2 \in M \cap N \quad [\because \; x_1 - x_2 \in N]$$

$\Longrightarrow x_1 - x_2 = 0$ [$\because$ M, N நிரப்பு உள்ளடங்கு வெளிகளாதலால் $M \cap N = 0$]

$$\Longrightarrow x_1 = x_2$$

$\therefore$ f ஆனது ஒன்றுக்கொன்று அமைப்புமாற்றமாகும் (one to one mapping) ....(1)

$M+z$ என்பது $\frac{V}{M}$-ல் யாதானுமொரு உறுப்பாக இருக்கட்டும். $\therefore$ $z \in V$ ஆகும்.

எனவே $z = x+y$, $x \in M$, $y \in N$ ($\because$ M, N என்பன V-ல் நிரப்பு உள்ளடங்கு வெளிகள்)

$\therefore$ $x = z-y \in M$ $\quad$ $\therefore$ $y-z \in M$

$\therefore$ $M+y = M+z$ $\quad$ $\therefore$ $F(y) \in N$, $f: y \longrightarrow M+y = M+z \in \frac{V}{M}$

$\therefore$ f என்பது முழு அமைப்புமாற்றமாகும் (onto mapping) ....(2)

மேலும், $x_1, x_2 \in N$ என்றால்
$$f(x_1+x_2) = M+(x_1+x_2) = (M+x_1)+(M+x_2) = f(x_1)+f(x_2)$$

$\lambda \in F$ என்றால், $f(\lambda\, x_1) = M+\lambda\, x_1 = \lambda\,(M+x_1) = \lambda\, f(x_1)$

$\therefore$ f என்ற அமைப்புமாற்றம் N, $\frac{V}{M}$ ஆகியவற்றில் வரையறுக்கப்பட்ட ஒத்த செயல்களை (respective operations) பாதுகாக்கின்றது. (preserves) ....(3)

ஆதலால், (1), (2), (3) லிருந்து f என்பது N-லிருந்து $\frac{V}{M}$-ற்கு ஓரினச்சார்பாகும். (Isomorphism)

குறிப்பு: M-ன் நிரப்பியான $N \cong \frac{V}{M}$ ஆதலால், $\frac{V}{M}$ என்ற M ஐச் சார்ந்த V-யின் ஈவுவெளி M-ன் நிரப்பி போன்று செயல் படுகின்றது எனக்கூறலாம்.

§ **8·32.** ஈவுவெளியின் பரிமாணம் :

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த, வெளிப்படையல்லாத முடிவுள்ள பரிமாணங்கொண்ட அருபவெக்டர் வெளி V-ல் M என்பது ஓர் உள்ளடங்கு வெளியாயின் $d\left(\frac{V}{M}\right) = d(V) - d(M)$ ஆகும்.

நிரூபணம் :

M என்ற V-ன் உள்ளடங்கு வெளியினுக்கு $\{d(V) - d(M)\}$ பரிமாணம் கொண்ட ஒரு நிரப்பியாவது உண்டு (§ 6·16). அதனை N என்போம்.

§ 6·31-ன்படி $N \cong \frac{V}{M}$ ஆதலால், $d\left(\frac{V}{M}\right) = d(N) = d(V) - d(M)$ ஆகும்.

குறிப்பு : இத்தேற்றத்திற்குரிய நேரிடை நிரூபணம், மாணவர்களுக்குப் பயிற்சியாக விடப்பட்டுள்ளது.

எ-கா. 1 : $V_4(R)$-ல் S, T என்ற உள்ளடங்கு வெளிகள் முறையே $B_1 = \{(1, 0, 2-1), (2, 3, -4, 0), (7, 6, -2, -3)\}$ $B_2 = \{(0, 3, -1, 0), (1, 0, 0, -7\}$ என்ற கணங்களால் உருவாக்கப்படுகின்றன. $S+T$, $S \cap T$ இவற்றில் எந்தெந்த வெக்டர்கள் உள்ளன? $S \cap T$, $S+T$, S, T ஆகியவற்றின் பரிமாணங்களைக் கணக்கிட்டு, $d(S)+d(T) = d(S \cap T)+d(S+T)$ என்ற முடிவைச் சரிபார்க்கவும்.

நிரூபணம் :

B_1-ல் $(2, 3, -4, 0)$ ஐ $(1, 0, 2, -1)$ என்ற வெக்டரின் ஒருபடிச்சேர்வாக எழுத முடியாது. ஆனால், $(7, 6, -2, -3) = 3(1, 0, 2, -1) + 2(2, 3, -4, 0)$

$\therefore$ $B_1 = \{(1, 0, 2, -1), (2, 3, -4, 0)\}$ ஒருபடிச் சாராதுள்ளது; S ஐயும் உருவாக்குகிறது.

எனவே B_1 ஆனது S-ல் ஒரு தளமாகும். $\therefore$ $d(S) = 2$

இதுபோல் B_2 ஆனது T-ல் ஒரு தளமாகும். $\therefore$ $d(T) = 2$

$X \in S \cap T$ என்போம். $X \in S$, $X \in T$ ஆதலால்,

$$X = \lambda_1(1, 0, 2, -1) + \lambda_2(2, 3, -4, 0)$$
$$= \mu_1(0, 3, -1, 0) + \mu_2(1, 0, 0, -7) \quad [\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in F]$$

$$\therefore \quad X = (\lambda_1 + \lambda_2, 3\lambda_2, 2\lambda_1 - 4\lambda_2, -\lambda_1) = (\mu_2, 3\mu_1, -\mu_1, -7\mu_2)$$

$\therefore \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \mu_2; \; 3\lambda_2 = 3\mu_1; \; 2\lambda_1 - 4\lambda_2 = -\mu_1; -\lambda_1 = -7\mu_2$ இவற்றிலிருந்து $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0$ என்று கிடைக்கும். $\therefore \quad S \cap T = 0$ ஆகும்.

$$S + T = \left\{ X + Y \;\middle|\; X \in S, \; Y \in T \right\} B_1 \subset S + T, \; B_2 \subset S + T$$

$\therefore \quad B_1 \cup B_2 \subset S + T \qquad B_1 \cup B_2 = \{(1, 0, 2, -1), (2, 3, -4, 0), (0, 3, -1, 0), (1, 0, 0, -7)\}$

இக்கணம் $S + T$-ல் ஒருபடிச்சாராதுள்ளதால், $d(S + T) = 4$ ஆகும்.

$$d(S) + d(T) = 2 + 2 = 4; \quad d(S \cap T) + d(S + T) = 0 + 4 = 4$$

$$\therefore \quad d(S) + d(T) = d(S \cap T) + d(S + T)$$

எ-கா. **2** : $V_4(R)$ ல் S என்ற உள்ளடங்கு வெளி, $B = \{(1, 2, -1, 3), \; (2, 4, -2, 6), \; (-1, 2, 0, -3), (0, 1, -1, 0)\}$ என்ற கணத்தால் உருவாக்கப்படுமானல் $V_4(R)$ ல் S-ன் யாதானுமிரு நிரப்பிகளைக் காண்க.

$B_1 = \{(1, 2, -1, 3), (-1, 2, 0, -3), (0, 1, -1, 0)\}$ ஆனது S-ன் ஒரு தளமாகும் என எளிதில் அறியலாம். $\therefore d(S) = 3$ ஆகும். $X \in S$ என்றல், $X = \lambda_1 \; (1, 2, -1, 3) + \lambda_2 \; (-1, 2, 0, -3) + \lambda_3(0, 1, -1, 0)$ ஆகும். (λ-க்கள் $\in R$)

$$= (\lambda_1 - \lambda_2, \; 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3, \; -\lambda_1 - \lambda_3, \; 3\lambda_1 - 3\lambda_2)$$

S-ல் இல்லாத, V-ல் உள்ள யாதானுமிரு உறுப்புகள் $X_1 = (1, 0, 1, -1), \quad X_2 = (2, -2, 1, 0)$-க்களை எடுத்துக் கொள்வோம். $\{X_1\}, \{X_2\}$-க்களால் உருவாக்கப்பட்ட V-ன் உள்ளடங்கு வெளிகளை முறையே T_1, T_2 என்போம்.

$$T_1 = \left\{ \lambda(1, 0, 1, -1) \;\middle|\; \lambda \in R \right\},$$

$$T_2 = \left\{ \mu(2, -2, 1, 0) \;\middle|\; \mu \in R \right\}$$ என்ற இரு

உள்ளடங்கு வெளிகளும் பரிமாணம் 1 கொண்டது.

$\therefore\ d(S)+d(T_1)=4=d\,[V_4(R)];\ d(S)+d(T_2)=4=d\,[V_4(R)]$ மேலும், $S\cap T_1,=0,\ S\cap T_2=0$ என்பது தெளிவு.

எனவே T_1, T_2 என்பன $V_4(R)$-ல் S-ன் இருநிரப்பிகளாகும்.

குறிப்பு: $V=S\oplus T_1 \quad V=S\oplus T_2$ என எழுதலாம். (*ie.* $S\oplus T_1=S\oplus T_2$) ஆனால், $T_1\neq T_2$ எனவே நேரிடைக் கூட்டல், நீக்கல் விதியை நிறைவு செய்யாது.

எ-கா. 3: $V_4(R)$-ல் M என்ற உள்ளடங்கு வெளி $\{(1,2,3,0),(-1,0,-2,1)\}$ என்ற கணத்தால் உருவாக்கப்படுகிறது. $\frac{V_4}{M}$ என்ற அருபவெக்டர் வெளியை விவரிக்கவும். இதன் பரிமாணம் என்ன?

$B_1=\{(1,2,3,0),(-1,0,-2,1,\}$ ஆனது M-ல் ஒரு தளமென எளிதில் அறியலாம்.

$\therefore\ d(M)=2$

$B_2=\{(0,-1,4,0),(1,-1,0,3)\}$ ஆல் உருவாக்கப் பட்ட V-ன் உள்ளடங்கு வெளி Nஐ எடுத்துக்கொள்வோம். $B_1\cap B_2=\Phi$, $B_1\cup B_2$ என்பது V-ல் ஒரு தளம், ஆதலால், M, N என்பன நிரப்பு உள்ளடங்கு வெளிகளாகும்.

$N\cong\frac{V_4}{M}$ ஆதலால், $\frac{V_4}{M}$-ல் $B_1=\{M+x_1,\ M+x_2\}$

$$\begin{pmatrix}x_1=(0,-1,4,0)\\ x_2=(1,-1,0,3)\end{pmatrix}$$

என்ற கணம் ஒரு தளமாகும்.

$$\therefore\ \frac{V_4}{M}=\left\{\lambda_1(M+x_1)+\lambda_2(M+x_2)\ \middle|\ \lambda_1,\lambda_2\in R\right\}$$

$$=\{(M+\lambda_1x_1)+(M+\lambda_2x_2)\}=\{M+(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\}$$

$$=\left\{M+(\lambda_2,-\lambda_1,-\lambda_2,4\lambda_1,3\lambda_2)\ \middle|\ \lambda_1,\lambda_2\in R\right\}$$

$$d\left(\frac{V_4}{M}\right)=d(V_4)-d(M)=4-2=2$$

ஒருபடி நிலைமாற்றத்தின் அளவையும், பூச்சிய பரிமாணமும் (Rank and nullity of a linear transformation)

§ **8·33.** **வரையறை:**

f என்பது, F என்ற களத்தின் மீதமைந்த, முடிவுள்ள பரிமாணங்கொண்ட அருபவெக்டர் வெளி V-யிலிருந்து, அதே களத்தின் மீதமைந்த முடிவுள்ள பரிமாணங்கொண்ட அருபவெக்டர் வெளி W-விற்கு, ஓர், ஒருபடி மாற்றமாக இருக்கட்டும்.

$f(V) = \left\{ f(x) \in W \;\middle|\; X \in V \right\}$ என்ற W-ன் உள்ளடங்கு வெளியின் பரிமாணம், ஒருபடி நிலைமாற்றம் f-ன் அளவை (Rank) எனப்படும். இதனை $r(f)$ என்று குறிப்போம்.

$V' = \{X \in V \mid f(x) = 0'\}$ என்ற V-ன் கெர்னலின் பரிமாணம், f-ன் **பூச்சிய பரிமாணம்** (Nullity) எனப்படும். இதனை $n(f)$ என்று குறிப்போம்.

குறிப்பு: f என்பது V-யிலிருந்து W-விற்கு ஒருமையில் ஒருபடிமாற்றம் ஆவதற்குத் தேவையான, போதுமான விதி $n(f)=0$ ஆக இருக்கவேண்டும் என்பது தெளிவு.

§ **8·34.** **தேற்றம்:**

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த வெளிப்படையல்லாத, முடிவுள்ள பரிமாணங்கொண்ட அருபவெக்டர் வெளி V-ல், M என்பது யாதானுமொரு உள்ளடங்கு வெளியெனின்,

$\forall X \in V,\ f: X \longrightarrow M+X \in \frac{V}{M}$ என்ற V-யிலிருந்து, $\frac{V}{M}$-க்கு அமையும் அமைப்புமாற்றம், ஒரு முழு ஒருபடிமாற்றமாகும்.

நிருபணம்:

$$\begin{aligned} \forall X, Y \in V,\quad f(x+y) &= M + (x+y) \\ &= (M+x) + (M+y) \\ &= f(x) + f(y) \qquad \ldots\ldots\ldots(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in F,\ f(\lambda x) = M + \lambda x &= \lambda(M+x) \\ &= \lambda f(x) \qquad \ldots\ldots\ldots(2) \end{aligned}$$

$\frac{V}{M}$ ல் $M+z$ என்பது யாதானுமொரு உறுப்பாக இருந்தால்,

$(z \in V),\ F\ (z) \in V,\ f:\ z \longrightarrow M+z \in \frac{V}{M}$

$\therefore$ f என்பது முழு அமைப்பு மாற்றமாகும் ....(3)

(1), (2), (3)-லிருந்து f என்பது V-யிலிருந்து $\frac{V}{M}$-ற்கு ஒரு முழு ஒருபடிமாற்றமாகும்.

§ 8.35. தேற்றம்:

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த வெளிப்படையல்லாத, முடிவுள்ள பரிமாணங்கொண்ட அருபவெக்டர் வெளி V-யிலிருந்து, அதே களத்தின் மீதமைந்த வெளிப்படையல்லாத, முடிவுள்ள பரிமாணங்கொண்ட அருபவெக்டர் வெளி W-விற்கு f என்பது ஒரு முழு ஒருபடிமாற்றமாக இருக்கட்டும். f-ன் கெர்னலை M என்று குறித்தால் $\frac{V}{M} \cong W$ ஆகும்.

நிரூபணம்:

f-ன் கெர்னல் $M = \left\{ X \in V \,\middle|\, f(X) = 0' \right\}$

$\forall\ X \in V,\ f: X \in V \longrightarrow f(X) \in W$ எனின்,

$\Phi:\ M+X \in \frac{V}{M} \longrightarrow f(X) \in W$ என்ற $\frac{V}{M}$-லிருந்து, W-விற்குச்செல்லும் அமைப்புமாற்றத்தை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$M+X, M+Y$ என்பன $\frac{V}{M}$ ல் யாதானுமிரு உறுப்புகளாயின்,

$$\begin{aligned} \Phi\ (M+X) = \Phi\ (M+Y) &\Longrightarrow f(X) = f(Y) \\ &\Longrightarrow f(X) - f(Y) = 0' \\ &\Longrightarrow f(X-Y) = 0' \\ &\Longrightarrow X-Y \in M \\ &\Longrightarrow M+X = M+Y \end{aligned}$$

$\therefore$ Φ என்பது ஒன்றுக்கொன்று அமைப்பு மாற்றமாகும் ...(1)

W-வில் Y என்பது யாதானுமொரு உறுப்பாக இருக்கட்டும்.

f என்பது V-யிலிருந்து W-விற்கு ஒரு முழு ஒருபடிமாற்றம்.

ஆதலால், $F(X) \in V,\ f: X \longrightarrow Y = f(X) \in W$

$\therefore\ \Phi : M+X \in \frac{V}{M} \longrightarrow f(X) = Y \in W$

$\therefore$ Φ என்பது முழு அமைப்புமாற்றமாகும் (onto mapping) ......(2)

$\forall\, M+X, M+Y \in \frac{V}{M}, \Phi\,[(M+X) + (M+Y)] = \Phi[M + (X+Y)]$

$= f(X+Y) = f(X) + f(Y) = \Phi\,(M+X) + \Phi\,(M+Y)$.....(3)

$\forall\, \lambda \in F, \Phi\,[\lambda\,(M+X)] = \Phi\,[M+\lambda X] = f(\lambda X)$

$= \lambda f(X) = \lambda\, \Phi\,(M+X)$ ....(4)

(1)—(4)-லிருந்து,

Φ என்பது $\frac{V}{M}$ -லிருந்து W-விற்கு ஓர் ஓரினச்சார்பாகும்.

$\therefore\ \frac{V}{M} \cong W$ ஆகும்.

குறிப்பு: ஓரினச்சார்பு பரிமாணங்களைப் பாதுகாப்பதால், $d\left(\frac{V}{M}\right) = d(W)$. (அ-து) $d(V) - d(M) = d(W)$

§ 8·36. தேற்றம்:

V-யிலிருந்து W-விற்கு (§ 6·35 பார்க்க) F என்பது ஓர், ஒருபடிமாற்றமெனின், $n(f) + r(f) = d(V)$ ஆகும்.

நிரூபணம்:

$f(V) = \left\{ f(x) \in W \;\middle|\; x \in V \right\}$ என்றால்,

$f: V \longrightarrow f(V)$ என்பது ஒருபடி முழுமாற்றமாகும்.

$\therefore$ § 6·35-ன்படி, M என்பது f-ன் கெர்னலைக் குறித்தால் $\frac{V}{M} \cong f(V)$ ஆகும்.

$$\therefore \quad d\left(\frac{V}{M}\right) = d[f(V)]$$

(அ-து) $d(V) - d(M) = d[f(V)]$

(அ-து) $d(V) = d(M) + d[f(V)]$

(அ-து) $d(V) = n(f) + r(f)$

பயிற்சி 9

1. $V_4(R)$ ல் S, T என்ற உள்ளடங்கு வெளிகள் முறையே,

$B_1 = \{(1,1,0,0), (0,0,2,3), (2,2,4,4), (0,2,3,0)\}$

$B_2 = \{(1,1,0,2), (1,-1,2,0), (0,0,0,1), (2,0,2,3)\}$

என்ற கணங்களால் உருவாக்கப்படுகின்றன. $S \cap T$, $S+T$ ஆகியவற்றில் எந்தெந்த உறுப்புகள் உள்ளன? $d(S), d(T), d(S+T)$, $d(S \cap T)$ ஆகியவற்றைக் கணக்கிட்டு $d(S) + d(T) = d(S+T)$, $d(S \cap T)$ என்பதைச் சோதித்துப் பார்க்கவும்.

2. $V_4(R)$ ல் பின்வருபனவற்றைச் சரிபார்க்கவும்.

(i) S என்ற உள்ளடங்கு வெளி $\{(1,1,0,0), (0,0,1,1)\}$ ஆலும் T என்ற உள்ளடங்கு வெளி $\{(0,1,0,1), (1,0,1,0)\}$ ஆலும் உருவாக்கப்படுகின்றன. S, T என்பன நிரப்பு உள்ளடங்கு வெளிகளாக அமையுமா?

(ii) A என்ற உள்ளடங்கு வெளி $\{(0,3,4,1), (3,0,2,1)\}$ ஆலும் B என்ற உள்ளடங்கு வெளி $\{(2,1,0,4), (1,1,1,0)\}$ ஆலும் உருவாக்கப்பட்டால் A, B என்பன நிரப்பு உள்ளடங்கு வெளிகளாக அமையுமா?

3. F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V-ல் A, B, C என்பன உள்ளடங்கு வெளிகளாகும்.

(i) $A \cap (B+C) = (A \cap B) + (A \cap C)$

(ii) $A \cap [B+(A \cap C)] = (A \cap B) + (A \cap C)$

என்பன உண்மையா? விடையை விமர்சனம் செய்யவும்.

4. $V_n(F)$ ல் $M = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, 0, \ldots, 0\}$; $N = \{0, \ldots, 0, \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n\}$ $(r < n)$ என்பன நிரப்பு உள்ளடங்கு வெளிகளென நிறுவுக.

5. $V_4(R)$ ல் $\{(1,2,1,1), (0,1,0,1)\}$ என்ற கணத்தால் உருவாக்கப்படும் உள்ளடங்கு வெளியினுக்கு, $V_4(R)$ ல் மூன்று வெவ்வேறு நிரப்பிகளைக் காண்க.

6. $V_4(R)$ ல் பின்வரும் உள்ளடங்கு வெளிகளின் ஈவு வெளிகளை விவரித்து, பரிமாணங்களை கணக்கிடவும்,

(a) $\{(1, 2, 3, 0), (0, 4, 7, 1), (4, 1, 0, 8)\}$ ஆல் உருவாக்கப்படும் உள்ளடங்கு வெளி

(b) $\{(1, 0, 1, 0)\}$,, ,, ,,

(c) $\{(1, 4, 0, -1), (3, 0, 2, -3)\}$,, ,, ,,

(d) $\{(1, -1, -2, 0,), (-3, 0, -1, 0), (0, 0, 4, 7), (3, 2, 0, 1)\}$,, ,, ,,

7. $V_n(F)$–ல் S, T எனும் மாறும் உள்ளடங்கு வெளிகள் (variable subspaces) முறையே நிலையான r, s என்ற பரிமாணங்களைக் கொண்டுள்ளன. $S+T$–ன் அதிகபட்ச பரிமாணத்தையும் $S \cap T$–ன் குறைந்தபட்ச பரிமாணத்தையும் கணக்கிடுக.

8. F என்ற களத்தின் மீதமைந்த, வெளிப்படையல்லாத, முடிவுள்ள பரிமாணங்கொண்ட அருபவெக்டர் வெளி V–ல் S, T என்பன இரு உள்ளடங்கு வெளிகளாகும். T' என்பது V–ல் T–ன் ஒரு நிரப்பியாகும். $T \subset S$, $S \cap T' = 0$ எனின் $S = T$ என நிறுவுக.

9. (8–ல் உள்ள) V–ல் S, T என்ற உள்ளடங்கு வெளிகள் V–ல் நிரப்பு உள்ளடங்கு வெளிகளாவதற்குத் தேவையான, போதுமான விதிகள்

(i) $S \cap T = 0$

(ii) $\alpha \in V$ என்றால் $\alpha = X + Y\ (X \in S,\ Y \in T)$

என நிறுவுக.

10. (8–ல் உள்ள) V–ல் உள்ள எந்த உறுப்பு α–வையும் $u_1, u_2, \ldots, u_k$ என்ற V–ன் உள்ளடங்கு வெளிகளிலிருந்து, முறையே ஒவ்வொரு உறுப்பை எடுத்துக்கொண்டு அவற்றின் கூட்டலாகக் கூறலாமென்றால், $u_1, u_2, \ldots, u_k$ என்ற உள்ளடங்கு

வெளிகளிலிருந்து, உறுப்புகளை எடுத்துக்கொண்டு V-ல் ஒரு தளத்தை அமைக்கலாமென நிறுவுக. இதிலிருந்து,

$d(u_1) + d(u_2) + \ldots + d(u_k) \geqslant d(V)$ என்று நிரூபிக்கவும்.

11. F என்ற களத்தின் மீதமைந்த வெளிப்படையல்லாத அருபவெக்டர் வெளி V-ல் S, T, U என்பன உள்ளடங்கு வெளிகளாகும். மேலும் $S \cap T = S \cap U$, $S+T = S+U$, $T \subset U$ என்றால் $T = U$ என்று நிறுவுக.

12. V-ல் A, B, C என்ற உள்ளடங்கு வெளிகள் $A \cap (B+C) = 0$, $B \cap (C+A) = 0$, $C \cap (A+B) = 0$ என்றவாறு அமைந்தால், அவை ஒன்றுக்கொன்று சாராதவை எனப்படும். A, B, C-க்கள் V-ல் நிரப்பு உள்ளடங்கு வெளிகளாவதற்குத் தேவையான, போதுமான விதிகள் (i) இவை ஒன்றுக்கொன்று சாராதவையாகவும் (ii) $V = A+B+C$ என்றும் இருக்க வேண்டியதாகும் என நிறுவுக.

13. முடிவுள்ள பரிமாணங்கொண்ட அருபவெக்டர் வெளி V-ல் A, B, C என்ற உள்ளடங்கு வெளிகள் ஒன்றுக்கொன்று சாராதவையாக இருப்பதற்குத் தேவையான, போதுமான விதி $d(A+B+C) = d(A) + d(B) + d(C)$ ஆகுமென நிறுவுக.

14. முடிவுள்ள பரிமாணங்கொண்ட அருபவெக்டர் வெளி V-ல் S, T என்ற உள்ளடங்கு வெளிகள் $S \cap T = 0$ என்றவாறு அமைந்துள்ளன. $d(S+T) = d(S) + d(T)$ என நிறுவுக. $d(S+T) = d(S) + d(T)$ ஆக இருந்தால் $S \cap T = 0$ ஆக இருக்குமா? விமர்சிக்க

15. R-ன் மீதமைந்த எல்லா 2×2 அணிகளையும் கொண்ட அருபவெக்டர் வெளி $M_2(R)$ ல்

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} o & a \\ b & o \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in R \right\}, \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ o & \gamma \end{pmatrix} \middle| \; \alpha, \beta, \gamma \in R \right\}$$

என்ற கணங்கள் உள்ளடங்கு வெளிகளை அமைக்குமென நிரூபி,

$$d(M), d(N), d(M+N), d(M \cap N), d\left(M_2(R) \big/ M \right),$$

$d\left(M_2(R) \big/ N \right)$ ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக. M, N ஆகிய ஒவ்வொன்றிற்கும் இருநிரப்பிகளைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

16. ஓர் அருபவெக்டர் வெளி V-ல், பின்வரும் நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்யும் A, B, C என்ற மூன்று உள்ளடங்கு வெளிகள் இருக்குமா எனப்பார்க்கவும்.

(i) $A + B + C = V$

(ii) $A \cap B = 0, B \cap C = 0, C \cap A = 0$

(iii) A, B, C என்பன ஒன்றுக்கொன்று சாராதவை.

17. $P_3(C)$ என்ற அருபவெக்டர் வெளியில் (§ 1.3, எ-கா. 6) $\{x^2, x + 1\}$ என்ற கணத்தால் உருவாக்கப்பட்ட உள்ளடங்கு வெளி M-ன் பரிமாணம் என்ன? அதற்கு ஒரு நிரப்பியை $P_3(C)$ல் காண்க. N என்ற உள்ளடங்கு வெளி $\{1, x\}$ என்ற கணத்தால் உருவாக்கப்பட்டால், $d(N)$, $d(M + N)$, $d(M \cap N)$,

$d\left(\frac{P_3}{M}\right)$, $d\left(\frac{P_3}{N}\right)$ ஆகியவற்றினைக் கணக்கிடுக.

18. F என்ற களத்தின் மீதமைந்த வெளிப்படையல்லாத முடிவுள்ள பரிமாணம் கொண்ட அருபவெக்டர் வெளி V-ல், M, N என்பவை யாதானுமிரு உள்ளடங்கு வெளிகளெனின், $(M + N)^\circ = M^\circ \cap N^\circ$, $(M \cap N)^\circ = M^\circ + N^\circ$ ஆகுமென நிறுவுக. [S என்பது V-ல் ஓர் உள்ளடங்கு வெளி எனின் S° என்பது S-ன் பூச்சியமாக்கியைக் (Annihilator) குறிக்கும்.

9. உட்பெருக்கல் வெளிகள்

[Inner Product Spaces]

9·1. அறிமுகம்: [Introduction]

அரூபவெக்டர் வெளிகளில், ஒருபடித்தன்மைக் கொள்கைகளைப் பற்றியும் அதன் விளைவாக வரும் பல முடிவுகளைப் பற்றியும் இதுவரை விரிவாகப் பார்த்தோம். ஆனால் வடிவக் கணிதத்தில் முக்கியமான நீளம், கோணம் ஆகிய கொள்கைகளை விரிவுபடுத்தவோ அரூபப்படுத்தவோ செய்யவில்லை. இக்குறையை இங்கு நிறைவுசெய்யும் வகையில் நீளம், கோணம் ஆகியவற்றுடன் தொடர்புகொண்ட எண் சார்புகளை (numerical functions) வரையறுத்து, எண்சார்புகளுடன் கூடிய அரூபவெக்டர் வெளியைப் பற்றிக் காண்போம். இவ்வழியில் வந்தவையே உட்பெருக்கல் வெளிகளாகும் (Inner product spaces)

ஆயவடிவக் கணிதத்தில், ஒருதளத்தில் (in a plane) $P(x_1, y_1)$, $Q\ (x_2, y_2)$ என்பவை இருபுள்ளிகள் எனின் $PQ = +\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ என்பது, P, Q என்ற புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தூரத்தைக் கொடுக்கின்றது. O என்பது ஆய ஆதியைக் குறித்தால், $OP = +\sqrt{x_1^2+y_1^2}$ ஆகும். $V_2(R)$ ல் இவற்றைக் கூறும்பொழுது, $x = (x_1, y_1)$, $y = (x_2, y_2)$ என்ற இரு வெக்டர்கள், வடிவக் கணிதத்தில் தளத்திலுள்ள P, Q என்ற புள்ளிகளைக் குறித்தால், P, Q என்ற புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தூரம், x, y என்ற வெக்டர்களுக்கிடையே உள்ள தூரமெனப்படுகிறது. இதனை $\|x-y\|$ என்று குறிப்பது வழக்கம்.

$$\therefore\quad \|x-y\| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \text{ ஆகும்.}$$

$O = (0, 0)$ என்பது $V_2(R)$ ல் பூச்சிய உறுப்பைக் குறித்தால், 0, x என்ற இரு வெக்டர்களுக்கிடையே உள்ள தூரத்தை $\|x\|$ என்று குறிப்பது வழக்கம். $\therefore\quad \|x\| = \sqrt{x_1^2+y_1^2}$ ஆகும்.

α, β என்பவை முறையே OP, OQ என்ற கோடுகள் X அச்சுடன் அமைக்கும் நேர்க்கோணத்தைக் (positive angle) குறித்தால், $\alpha-\beta$ என்பது OP, OQ என்ற கோடுகளுக்கிடையே உள்ள கோணமாகும். மேலும்,

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{OP\cdot OQ}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{||x||\cdot||y||}$$

என நிரூபிக்கலாம். $\alpha-\beta$ என்ற கோணத்தை, x, y என்ற வெக்டர்களுக்கிடையே உள்ள கோணம் எனக்கூறலாம்.

மேற்கூறியவற்றிலிருந்து $x_1x_2+y_1y_2$ என்ற கோவையைக் கொண்டு, x, y என்ற வெக்டர்களுக்கிடையே உள்ள தூரத்தையும், அவைகளுக்கிடையே உள்ள கோணத்தையும் கணக்கிடலாம் என்பது தெளிவாகும். [ஏனெனில், $x=y$ எனின் $x_1x_2+y_1y_2=x_1^2+y_1^2=||x||^2$ $\therefore$ $||x||=+\sqrt{x_1^2+y_1^2}$ ஆகும். $x_1x_2+y_1y_2$ ஐ (x, y) என்று குறித்தால் $||x||=+\sqrt{(x,x)}$ ஆகும். $||x-y||^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=(x-y, x-y)$

$\therefore$ $||x-y||=+\sqrt{(x-y,\ x-y)}$ ஆகும். x, y இவற்றிற்கிடையே உள்ள கோணம் α எனின் $\cos\alpha=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{||x||\cdot||y||}$

$$=\frac{(x,y)}{+\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}}$$ ஆகும்.

இவ்வகையில் மிகவும் பயன்படும் கோவை $x_1x_2+y_1y_2=(x, y)$ என்பது x, y என்ற வெக்டர்களின் உட்பெருக்கல் (Inner product) எனப்படுகிறது. $(x, y)\in R$ ஆகையால் x, y-ன் உட்பெருக்கல் ஓர் எண்ணியாகும். ஆகையால் எந்த இரு வரிசையிட்ட வெக்டர்கள் x, y-க்கும் (ordered pair of vectors) (x, y) என்ற R-ல் உள்ள எண்ணி தொடர்புபடுத்துகிறது என்று கூறலாம்.

§ 9·2. $V_n(R)$-ல் உட்பெருக்கலை வரையறுத்தல்:

$V_n(R)$-ல் $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ என்பவை யாதானுமிரு வெக்டர்களாயின், $x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$ என்ற எண்ணி, X, Y என்ற வெக்டர்களின் உட்பெருக்கல் என வரையறுக்கப்படுகிறது. இதனை (x, y) என்று குறிப்பது வழக்கம்.

§ 9·3. $V_n(R)$-ல் உட்பெருக்கல் எனும் எண்சார்பு (numerical function) பின்வருவனவற்றை நிறைவு செய்கிறது என நிறுவலாம்.

$\forall\ X, Y, Z \in V_n(R), \lambda \in R,$ (i) $(x, y) = (y, x)$

(ii) $(x+z, y) = (x, y) + (z, y)$

$(x, y+z) = (x, y) + (x, z)$

$(cx, y) = c\,(x, y), (x, cy) = c\,(x, y)$

(iii) $(x, x) \geqslant 0, (x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

முதல் பகுதியிலிருந்து உட்பெருக்கல் சமச்சீருடையது என்றும், இரண்டாவது பகுதியிலிருந்து உட்பெருக்கல் இருபுற ஒருபடித்தானது (bilinear) என்றும், மூன்ருவது பகுதியிலிருந்து உட்பெருக்கல் மிகையெண் என்றும் தெரிகிறது. ஆகையால் உட்பெருக்கல் என்பது சமச்சீருடைய இருபுற ஒருபடித்தான மிகை எண் சார்பாகும். [symmetric, bilinear and positive numerical function]

§ 9·4. $V_n(R)$-ல் ஒரு வெக்டரின் நீளத்தை வரையறுத்தல் :

X என்பது $V_n(R)$-ல் யாதானுமொரு வெக்டராயின், $+\sqrt{(x,x)}$ என்பது X-ன் நீளம் (length of the vector x) என வரையறுக்கப் படுகிறது. இதனை $\|x\|$ என்று குறிப்பது வழக்கம்.

X, Y என்பவை $V_n(R)$-ல் யாதானுமிரு வெக்டர்களாயின், $+\sqrt{(x-y, x-y)}$ என்பது X, Y என்ற வெக்டர்களுக்கிடையே உள்ள தூரம் என வரையறுக்கப்படுகிறது. இதனை X, Y என்ற வெக்டர்களுக்கிடையே உள்ள பிரிவு (seperation of the vectors x and y) எனவும் கூறலாம். இதை $\|x-y\|$ என்று குறிப்பது வழக்கம்.

9·5. $V_n(R)$-ல் பூச்சியமல்லாத இரு வெக்டர்களுக்கிடையே உள்ள கோணத்தை வரையறுத்தல் :

X, Y என்பவை $V_n(R)$-ல் யாதானுமிரு பூச்சியமல்லாத வெக்டர்களாக இருக்கட்டும். $-1 \leqslant \dfrac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \leqslant +1$ என

நிரூபிக்கலாம். ஆகையால், $\dfrac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$ என்பது $0°$-விலிருந்து $180°$ முடிய உள்ள இடைவெளியில் இருக்கும் ஒரே ஒரு கோணத் தின் கிடைக்கை (cosine) யாகும். இக்கோணம் x, y என்ற வெக்டர்

களுக்கிடையே உள்ள கோணம் என வரையறுக்கப்படுகிறது. இக் கோணத்தினை α என்று குறித்தால் $\cos \alpha = \dfrac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$

$$(0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ)$$

யூக்ளிட் வெக்டர் வெளி : (Euclidean Vector Spaces)

$V_n(R)$-ல் உட்பெருக்கலை வரையறுத்தது போன்று, மெய்யெண்களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளியில் எவ்வாறு உட்பெருக்கலை வரையறுப்பது என்பதைப் பார்போம்.

9·6. ஓர் அருபவெக்டர் வெளியில் உட்பெருக்கல் சார்பு : (Inner product function in an abstract vector space)

வரையறை :

மெய்யெண்களும் R-ன் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளி E-ல் உள்ள x, y போன்ற வரிசையிட்ட ஜோடி உறுப்புகளை (ordered pair of elements) R-ல் உள்ள எண்ணிகளோடு தொடர்பு படுத்தும் ஓர் எண்சார்பு (numerical function) சமச்சீருடையதாகவும், (symmetric) இருபுற ஒருபடித்தாகவும் (bilinear), மிகையெண்ணுகவும் (positive) இருந்தால், அச்சார்பு E-ன் மெய்யெண் உட்பெருக்கல் சார்பு (Real inner product function in E) என வரையறுக்கப்படுகிறது.

(அ-து) x, y என்ற வரிசையிட்ட ஜோடியோடு தொடர்புடைய எண்ணியை (x, y) என்று குறித்தால் [(அ-து) x, y ஆகியவற்றின் உட்பெருக்கலை (x, y) என்று குறித்தால்]

(i) $(x, y) = (y, x)$

(ii) $(x + z, y) = (x, y) + (z, y)$, $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$

(iii) $(x, x) \geqslant 0$, $(x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

$$[x, y, z \in E, \lambda \in R].$$

§ 9·7. மெய்யெண் களத்தின் மீதமைந்த உட்பெருக்கல் வெளிகள். யூக்ளிட் வெக்டர் வெளி : (Euclidean Vector Space)

வரையறை :

மெய்யெண்களம் R-ன் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளி E-ல், மேற்கூறிய முறையில் உட்பெருக்கல் சார்பு வரையறுக்கப்பட்டால், அந்த உட்பெருக்கலுடன் கூடிய அருபவெக்டர் வெளி E, ஒரு யூக்ளிட் வெக்டர் வெளி அல்லது மெய்யெண் உட்பெருக்கல் வெளி (Euclidean vector space or real inner product space) என வரையறுக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு :

9·2-ல் வரையறுக்கப்பட்ட உட்பெருக்கலுடன் கூடிய வெக்டர் வெளி $V_n(R)$ ஒரு யூக்ளிட் வெக்டர் வெளியாகும்.

§ 9·8. யூக்ளிட் வெக்டர் வெளியில் ஓர் உறுப்பின் (வெக்டரின்) நீளத்தை வரையறுத்தல்:

யூக்ளிட் வெக்டர் வெளி E-ல் X என்பது எந்த ஓர் உறுப்பாகவும் இருக்கட்டும். $+\sqrt{(X, X)}$ என்பது X-ன் நீளம் என வரையறுக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு **1 :** (X, X) என்பது மிகை மெய்யெண் ஆதலால், R-ல் அதற்கு வர்க்க மூலமுண்டு.

குறிப்பு **2 :** இனிவரும் பகுதிகளில் யூக்ளிட் வெக்டர் வெளியில் உள்ள உறுப்புகளை வெக்டர்கள் என்று அழைப்போம்.

§ 9·9. தேற்றம் :

E என்பது ஒரு யூக்ளிட் வெக்டர் வெளியாக இருக்கட்டும்.

$\forall X, Y \in E, \lambda \in R.$ 1. $\|\lambda X\| = |\lambda|\ \|X\|$

2. $X \neq 0$ எனின் $\|X\| > 0$

3. $\|0\| = 0$

4. $|(X, Y)| \leqslant \|X\| \cdot \|Y\|$

[சுவார்ச்சின் சமனிலி]
[Schwarz inequality]

5. $\|X+Y\| \leqslant \|X\| + \|Y\|$

[முக்கோண சமனிலி]
[The triangle inequality]

நிருபணம் :

1. $\|\lambda X\|^2 = (\lambda X, \lambda X) = \lambda^2(X, X) = \lambda^2 \|X\|^2$ இருபுறமும் மிகை வர்க்கமூலம் எடுக்க, $\|\lambda X\| = |\lambda|\ \|X\|$ ஆகும்.

2. $X \neq 0$ எனின் 9·6, (iii) ன்படி $(X, X) \neq 0$ ஆனால் $(X, X) \geqslant 0$ ஆதலால், [9·6, iii], $(X, X) > 0$ ஆகும். அதாவது $\|X\|^2 > 0 \quad \therefore \quad \|X\| > 0$

3. $\|0\| = \|0 \cdot X\| = |0|\ \|X\| = 0$

4. சுவார்ச்சின் சமனிலி: $|(X, Y)| \leqslant \|X\| \cdot \|Y\|$

வகை 1: $X=0$ அல்லது $Y=0$ எனின்,

$$(X, Y)=0, \ \|X\|=0, \ \|Y\|=0$$

$$\therefore \ |(X, Y)|=0=\|X\| \cdot \|Y\|$$

வகை 2: $X \neq 0, Y \neq 0$ என்க. $\lambda, \mu \in R$ எனின்,

$$0 \leqslant (\lambda X+\mu Y, \lambda X+\mu Y) \ [9{\cdot}6, \text{iii}]$$
$$\leqslant (\lambda X, \lambda X)+(\lambda X+\mu Y)+(\pm\mu Y, \lambda X)+(+\mu Y. \pm\mu Y)$$
$$\leqslant \lambda^2 (X, X) \pm 2\lambda\mu (X, Y)+\mu^2 (Y, Y) \ [9{\cdot}6, \text{i, ii}]$$

$\lambda=\|Y\|$ எனவும், $\mu=\|X\|$ எனவும் கொள்வோம்.

$$\therefore \ 0 \leqslant \|Y\|^2 (X, X) \pm 2\|X\| \cdot \|y\| (X, Y)+\|X\|^2 (Y, Y)$$

$$\therefore \ \mp 2\|X\| \cdot \|Y\| (X, Y) \leqslant \|Y\|^2 \|X\|^2 + \|X\|^2 \|Y\|^2$$
$$\leqslant 2\|X\|^2 \|Y\|^2$$

$X \neq 0, Y \neq 0$ ஆதலால், 9·9. (2)-ன்படி, $\|x\|$, $\|y\|$ ஆகியவை பூச்சியத்தைவிடப் பெரிய எண்களாகும். இருபுறமும் $2\|X\| \cdot \|Y\|$-ஆல் வகுக்க,

$$\mp \ (X, Y) \leqslant \|X\| \cdot \|Y\| \quad \text{.........}(A)$$

$(X, Y)>0$ எனின் $|(X, Y)|=(X, Y)$

$(X, Y)<0$ எனின் $|(X, Y)|=-(X, Y)$

இவ்விரு நிலையிலும் (A) யிலிருந்து $|(X, Y)| \leqslant \|X\| \cdot \|Y\|$ எனக்கிடைக்கிறது.

5. முக்கோண சமனிலி: $\|X+Y\| \leqslant \|X\| \cdot \|Y\|$

$$\|X+Y\|^2=(X+Y, X+Y)=(X, X)+(X, Y)+(Y, X)+(Y, Y) \quad [9{\cdot}6, \text{i, ii}]$$

$$=\|X\|^2+2(X, Y)+\|Y\|^2 \quad [\because (X, Y)=(Y, X)]$$
$$\leqslant \|X\|^2+2\|X\| \cdot \|Y\|+\|Y\|^2 \quad [\text{சுவார்ச்சு சமனிலியின் படி}]$$
$$\leqslant [\|X\|+\|Y\|]^2$$

இருபுறமும் மிகை வர்க்கமூலம் எடுக்க, $\|X+Y\| \leqslant \|X\|+\|Y\|$ ஆகும்.

§ **9·10.** வரையறை :

யூக்ளிட் வெக்டர் வெளி E-ல், X, Y என்பவை யாதானுமிரு வெக்டர்களாயின் $+\sqrt{(X-Y, X-Y)}$ என்பது X, Y என்ற வெக்டர்களுக்கிடையே உள்ள தூரம் [distance between the two vectors) என வரையறுக்கப்படுகிறது. இதனை $\|X-Y\|$ எனக் குறிப்பது வழக்கம்.

§ **9·11.** இரு வெக்டர்களுக்கிடையே வரையறுக்கப்படும் தூரம் மெட்ரிக் பண்புகளைக் (metric properties) கொண்டுள்ளது.

(அ-து) (1) $\|X-X\|=0$ $X\neq Y$ எனின் $\|X-Y\|>0$

(2) $\|X-Y\|=\|Y-X\|$

(3) $\|X-Y\|+\|Y-Z\|\geqslant\|X-Z\|$

நிரூபணம் :

(1) $\|X-X\|=\|0\|=0$ [9·9, (3)]
$[X\neq Y$ எனின் $X-Y\neq 0$ $\therefore$ $\|X-Y\|>0$ [9·9, (2)]

(2) $\|X-Y\| = \|(-1)(Y-X)\| = |-1|\ \|Y-X\|$
$= \|Y-X\|$ [9·9, (1)]

(3) முக்கோண சமனிலியின்படி, $\|X-Y\|+\|Y-Z\|$
$\geqslant\|X-Y+(Y-Z)\| \geqslant \|X-Z\|$

குறிப்பு: X, Y என்ற இரு வெக்டர்களுக்கிடையே உள்ள தூரத்தை $d(X, Y)$ என்றும் குறிப்பது வழக்கம். $d(X, Y)$ ஓர் எண் சார்பாகும். (numerical function). மேற்கூறிய பண்புகளைப் பின்வருமாறும் கூறலாம்.

(1) $d(X, X)=0$, $X\neq Y$ எனின் $d(X, Y)>0$

(2) $d(X, Y)= d(Y, X)$

(3) $d(X, Z)\leqslant d(X, Z)+d(Y, Z)$

§ **9·12.** **யூக்ளிட் வெக்டர் வெளியில் பூச்சியமல்லாத இரு வெக்டர்களுக்கிடையே உள்ள கோணத்தை வரையறுத்தல்.**

வரையறை :

x, y என்பவை யூக்ளிட் வெக்டர் வெளி E-ல் யாதானுமிரு பூச்சியமல்லாத வெக்டர்களாக இருக்கட்டும்.

சுவார்ச்சின் சமனிலியின்படி, $|(x, y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$

$$\frac{|(x; y)|}{\|x\| \cdot \|y\|} \leqslant 1 \qquad \therefore -1 \leqslant \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \leqslant 1.$$

ஆதலால், $\dfrac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$ என்பது $0°$-லிருந்து $180°$ முடிய உள்ள இடைவெளியில் இருக்கும் ஒரே ஒரு கோணத்தின் கிடைக்கை (cosine) யாகும். இக்கோணத்தையே, x, y என்ற வெக்டர்களுக் கிடையே உள்ள கோணம் என்று வரையறுக்கிறோம். இக் கோணத்தினை α என்று குறித்தால்

$$\cos \alpha = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \quad (0° \leqslant \alpha \leqslant 180°) \text{ ஆகும்.}$$

$$\cos \alpha = 0 \Longleftrightarrow (x, y) = 0 \quad \therefore \alpha = 90° \Longleftrightarrow (x, y) = 0$$

இதிலிருந்து செங்குத்து வெக்டர்களை வரையறுக்கலாம்.

9·13. நீளச்சார்புள்ள வெக்டர் வெளி (Normed Vector Space)

ஓர் அரூபவெக்டர் வெளியில் ஒவ்வொரு உறுப்பிற்கும் அதன் நீளம் மட்டும் வரையறுக்கப்பட்டு, அது சில விதிகளை நிறைவு செய்தால் அவ்வெளி அரூபவெக்டர் வெளிக்கும், மெய்யெண் உட்பெருக்கல் வெளிக்கும் இடைப்பட்டதாக அமைகின்றது. [உட்பெருக்கல் வெளியில் ஒவ்வொரு உறுப்பிற்கும் நீளமும் வரையறுக்கப்படுகிறது. இரு உறுப்புகளுக்கிடையே உள்ள கோணமும், தூரமும் வரையறுக்கப்படுகிறது] இவ்வாறு அமைந்த வெளியையே நீளச்சார்புள்ள வெக்டர் வெளி என்கிறோம். [Normed Vector Space].

வரையறை :

மெய்யெண் களத்தின் மீதமைந்த அரூபவெக்டர் வெளி V-ல், ஒவ்வொரு உறுப்பு X ஐயும், ஒரே ஒரு மெய்யெண் $\|X\|$ உடன் தொடர்புபடுத்தும் ஒரு மெய்யெண் சார்பு (real function) வரையறுக்கப்பட்டு, அச்சார்பு பின்வரும் விதிகளை நிறைவு செய்தால், அச்சார்புடன் கூடிய வெக்டர் வெளி V நீளச்சார்புள்ள வெக்டர் வெளி என வரையறுக்கப்படுகிறது.

(i) $\|X\| \geqslant 0, \; \|X\| = 0 \Longleftrightarrow X = 0$

(ii) $\|X+Y\| \leqslant \|X\| + \|Y\|$

(iii) $\|\alpha X\| = |\alpha| \; \|X\| \; [\alpha \in R]$

குறிப்பு : ஒவ்வொரு யூக்ளிட் வெக்டர் வெளியும் ஒரு நீளச் சார்புள்ள வெக்டர் வெளியாகும். இதன் மறுதலை பொதுவாக உண்மையாக இருக்காது.

9·14. யூக்ளிட் வெக்டர் வெளியில் செங்குத்து வெக்டர்கள் : (Orthogonal vectors)

ஒரு யூக்ளிட் வெக்டர் வெளியில் x, y என்ற யாதானுமிரு வெக்டர்கள் $(x, y) = 0$ என்றவாறு இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே, அவை செங்குத்து வெக்டர்கள் (orthogonal vectors) எனப்படும். இதனைக் குறிக்க, $x \perp y$ என்று எழுதுவோம். $\therefore \quad x \perp y \Longleftrightarrow (x, y) = 0$

பண்புகள் : (Properties) (i) யூக்ளிட் வெக்டர் வெளி E-ல் உள்ள பூச்சியவெக்டர் 0 அவ்வெளியில் உள்ள எந்த ஒரு வெக்டருக்கும் செங்குத்தாக இருக்கும். [ஏனெனில் $(x, 0) = (x, 0 \cdot y) = 0 \cdot (x, y) = 0 \quad [y \in E, \ y \neq 0]$

(ii) E-ல் உள்ள பூச்சியவெக்டர் மட்டுமே அதற்கே செங்குத்தாக இருக்கும். ஏனெனில் $(0, 0) = 0$ மேலும் $(x, x) = 0$ எனின் $x = 0$

(iii) செங்குத்துத்தன்மை சமச்சீருடையதாகும். (symmetric) (அ-து) $x \perp y \Longrightarrow y \perp x$

$$\text{ஏனெனில்} \quad x \perp y \Longrightarrow (x, y) = 0 \Longrightarrow (y, x) = 0 \quad [\because \ (x, y) = (y, x)]$$
$$\Longrightarrow y \perp x.$$

(iv) E-ல் $x \perp y$ எனின் $x \perp \lambda y$ ஆகும் $(\forall \ \lambda \in R)$

$$x \perp y \Longrightarrow (x, y) = 0 \Longrightarrow \lambda (x, y) = 0 \quad (\lambda \in R)$$
$$\Longrightarrow (x, \lambda y) = 0 \Longrightarrow x \perp \lambda y.$$

§ 9·15. தேற்றம் :

ஒரு யூக்ளிட் வெக்டர் வெளி E-ல், X என்ற வெக்டர் $x_1, x_2, \ldots x_r$ என்ற வெக்டர்கள் ஒவ்வொன்றிற்கும் செங்குத்தாக இருந்தால் அது $\{x_1, x_2, \ldots x_r\}$ என்ற கணத்தால் உருவாக்கப்பட்ட உள்ளடங்கு வெளியிலுள்ள ஒவ்வொரு வெக்டருக்கும் செங்குத்தாக இருக்கும்.

நிரூபணம் :

$\{x_1, x_2, \ldots x_r\}$ என்ற கணத்தால் உருவாக்கப்பட்ட உள்ளடங்கு வெளியில் Y என்பது யாதானுமொரு வெக்டராக இருக்கட்டும்.

$\therefore \quad Y=\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ldots+\lambda_r x_r \quad [\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r \in R]$ ஆகும்.

$$(X, Y)=(x, \lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ldots+\lambda_r x_r)$$
$$=\lambda_1 (x, x_1)+\lambda_2 (x, x_2)+\ldots+\lambda_r (x, x_r)$$
$$=0 \quad [\because x \perp x_i \quad 1 \leqslant i \leqslant r]$$

$\therefore \quad X \perp Y \quad \therefore X$ என்பது $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ என்ற கணத்தால் உருவாக்கப்படும் உள்ளடங்கு வெளியிலுள்ள ஒவ்வொரு வெக்டருக்கும் செங்குத்தாக இருக்கும்.

§ 9·16. செங்குத்து வெக்டர் கணங்கள் (Orthogonal Set of Vectors)

வரையறை: யூக்ளிட் வெக்டர் வெளியிலுள்ள குறைந்த பட்சம் இரு வெக்டர்களை எடுத்துக்கொண்டாலும், அவை செங்குத்தாக இருந்தால், அக்கணம் செங்குத்து வெக்டர் கணம் (orthogonal set of vector) என அழைக்கப்படுகிறது.

§ 9·17. அலகு வெக்டர்கள் (Unit vectors)

ஒரு யூக்ளிட் வெக்டர் வெளி E-ல் ஒரு வெக்டரின் நீளம் ஓர் அலகானால் $[\| X \|=1$ எனின்] அது அலகு வெக்டர் (unit vector) எனப்படுகிறது.

E-ல் Y என்பது ஒரு பூச்சியமல்லாத வெக்டராக இருந்தால், அதிலிருந்து ஓர் அலகு வெக்டரை அமைக்கலாம். [ஏனெனில் $\| Y \|^{-1} Y$ என்பது E-ல் ஓர் அலகு வெக்டராகும்]. இவ்வாறு அலகு வெக்டரை அமைக்கும் முறை அலகுபடுத்தும்முறை (normalisation) எனப்படுகிறது.

§ 9·18. அலகு செங்குத்து வெக்டர் கணங்கள்: (Orthonormal Set of Vectors)

ஒரு யூக்ளிட் வெக்டர் வெளியில் $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ என்ற கணத்தில் $(n \leqslant 2)$ உள்ள வெக்டர்கள் அனைத்தும் அலகு வெக்டர்களாக இருந்து, எந்த இரு வெவ்வேறு வெக்டர்களை எடுத்துக் கொண்டாலும் அவை செங்குத்தாக இருந்தால் அக்கணம் அலகு செங்குத்து வெக்டர் கணம் (orthonormal set of vector) என வரையறுக்கப்படுகிறது.

(அ-து) $\| x_i \|=1, (x_i, x_j)=0 \; (i \neq j) \quad [1 \leqslant i, j \leqslant n]$
$(x_i, x_i)=\| x_i \|^2 \quad \therefore (x_i, x_i)=1$ ஆகும். $[1 \leqslant i \leqslant n]$

$\therefore \quad (x_i, x_i)=\delta_{ij} \quad [i=j$ எனின், $\delta_{ij}=1$,
$i \neq j$ எனின், $\delta_{ij}=0$ ஆகும்.]

குறிப்பு : வசதியின் பொருட்டு, $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ என்ற கணம் செங்குத்து வெக்டர் கணமானல் $x_1, x_2, \ldots x_n$ என்பவை செங்குத்து வெக்டர்கள் என்றும் $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ என்ற கணம் அலகு செங்குத்து வெக்டர் கணமானல் $x_1, x_2, \ldots x_n$ என்பவை அலகு செங்குத்து வெக்டர்கள் என்றும் அழைப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு :

உட்பெருக்கலுடன் கூடிய யூக்ளிட் வெக்டர் வெளி $V_n(R)$-ல் $E_1 = (1,0, \ldots 0)$, $E_2 = (0,1, \ldots 0), \ldots \ldots E_n = (0,0, \ldots 1)$ என்பவை அலகு செங்குத்து வெக்டர்களாகும்.

§ **9·19.** ஒரு யூக்ளிட் வெக்டர் வெளியில் பூச்சிய உறுப்பைக் கொண்டிராத ஒரு செங்குத்து வெக்டர் கணத்தைக்கொடுத்தால், அக்கணத்திலிருந்து ஓர் அலகு செங்குத்து வெக்டர் கணத்தை அமைக்கலாம். ஏனெனில், $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ என்ற கணம் பூச்சிய உறுப்பைக் கொண்டிராத செங்குத்து வெக்டர் கணமானல் $\{\|x_1\|^{-1}x_1, \ldots \|x_n\|^{-1}x_n\}$ என்ற கணம் அலகு செங்குத்து வெக்டர் கணமாகும்.

குறிப்பு: ஒரே ஒரு அலகு வெக்டரை மட்டுங்கொண்ட ஓருறுப்புக்கணம் அலகு செங்குத்து வெக்டர் கணம் எனக் கொள்ளப்படுகிறது.

§ **9·20. தேற்றம் :**

யூக்ளிட் வெக்டர் வெளி E-ல், பூச்சிய உறுப்பைக் கொண்டிராத எந்த ஒரு செங்குத்து வெக்டர் கணமும், ஒருபடிச்சாரா நிலையிலிருக்கும்.

நிரூபணம் :

E-ல் $[x_1, x_2, \ldots x_n]$ என்பது பூச்சிய உறுப்பைக் கொண்டிராத யாதானுமொரு செங்குத்து வெக்டர் கணமாக இருக்கட்டும். $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \in R$, $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$ எனின்

$$(x_i, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n) = (x_i, 0) = 0 \quad [1 \leqslant i \leqslant n]$$

$$\Longrightarrow \lambda_1 (x_i, x_1) + \lambda_2 (x_i, x_2) + \ldots + \lambda_i (x_i, x_i) + \ldots + \lambda_n (x_i, x_n) = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda_i (x_i, x_i) = 0 \; [\therefore x_i \perp x_j, i \neq j \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n]$$

$$\Longrightarrow \lambda_i = 0 \quad [\because x_i \neq 0 \text{ ஆதலால், } (x_i, x_i) = \|x_i\|^2 \neq 0]$$

i-க்கு 1 முதல் n முடிய மதிப்புகளைக்கொடுக்க, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0 \ldots \lambda_n = 0$ எனக் கிடைக்கும்.

$\therefore\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \in R\ \ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0 \ldots \lambda_n = 0$

$\therefore \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ என்ற கணம் E-ல் ஒருபடிச்சாரா நிலையில் உள்ளது.

கிளைத்தேற்றம் 1:

ஒரு யூக்ளிட் வெக்டர் வெளியிலுள்ள எந்த ஓர் அலகு செங்குத்துக் கணத்திலும் பூச்சிய உறுப்பு இருக்காது ஆதலாலும், அக்கணம் செங்குத்துக் கணமாக இருப்பதாலும், அது ஒருபடிச் சாரா நிலையிலுள்ள கணமாகும்.

கிளைத்தேற்றம் 2:

ஒரு யூக்ளிட் வெக்டர் வெளியை அதிலுள்ள ஓர் அலகு செங்குத்து வெக்டர் கணம் உருவாக்கினால் அக்கணம் அவ்வெளியில் ஒரு தளமாகும், [கிளைத்தேற்றம் 1.]

கிளைத்தேற்றம் 3:

n- பரிமாணம் கொண்ட யூக்ளிட் வெக்டர் வெளி E-ல் (n என்பது முடிவுள்ள பாசிட்டிவ் முழு எண் $n > 0$) n வெக்டர்களைக் கொண்ட எந்த ஓர் அலகு செங்குத்து வெக்டர் கணமும் ஒரு தளமாகும் [தேற்றம் 5·8, *ii*]

கிளைத்தேற்றம் 4:

முடிவுள்ள பரிமாணம் கொண்ட வெளிப்புடையல்லாத யூக்ளிட் வெக்டர் வெளியில் எந்த ஓர் அலகு செங்குத்துக் கணமும் ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ளதால், அக்கணம் முடிவுள்ள கணமாகும். (finite set)

9·21. வரையறை: ஒரு யூக்ளிட் வெக்டர் வெளியில் செங்குத்து அலகு செங்குத்துத் தளத்தை வரையறுத்தல்:

யூக்ளிட் வெக்டர் வெளியில் E-ல் உள்ள ஒரு தளம் ஒரு செங்குத்து வெக்டர் கணமாக இருந்தால், (orthogonal set of vectors) இத்தளம் அவ்வெளியில் ஒரு செங்குத்துத் தளமென (orthogonal basis) வரையறுக்கப்படுகிறது. மேலும், E-ல் உள்ள ஒருதளம், ஓர் அலகு செங்குத்து வெக்டர் கணமானால் (orthonormal set) அத்தளம் E-ல் ஓர் அலகு செங்குத்துத் தளமென (orthonormal basis) வரையறுக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு :

உட்பெருக்கலுடன் கூடிய யூக்ளிட் வெக்டர் வெளி $V_n(R)$-ல் $E_1=(1, 0, \ldots 0)$, $E_2=(0, 1, \ldots 0)$ $E_n=(0, 0, \ldots 1)$ என்ற வெக்டர்களைக் கொண்ட கணம் ஓர் அலகு செங்குத்துத் தளமாகும்.

குறிப்பு : ஒரு யூக்ளிட் வெக்டர் வெளியில் செங்குத்துத்தளம் ஒன்றைக் கொடுத்தால், அதிலுள்ள வெக்டர்களை அலகு படுத்துவதன் மூலம், அவ்வெளியில் ஓர் அலகு செங்குத்துத்தளம் அமைக்கலாம்.

9·22. கிராம்-சுமிது செங்குத்தாக்கும் முறை : [Gram - Schmidt Orthogonalisation Process]

முடிவுள்ள பரிமாணம் கொண்ட யூக்ளிட் வெக்டர் வெளியில் [அவ்வெளி ஓர் அரூபவெக்டர் வெளியாதலால்] ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ள எந்த ஒரு கணத்திலிருந்தும் ஒரு தளத்தை அமைக்கமுடியும். ஆனால், அவ்வெளியில் ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ள கணத்திலிருந்து ஓர் அலகு செங்குத்துத்தளத்தை அமைக்க முடியுமா? என்பது ஒரு பிரச்சினையாக இருந்தது. இப்பிரச்சினை, கிராம்-சுமிது செங்குத்தாக்கும் முறையால் தீர்க்கப்பட்டது.

தேற்றம் :

முடிவுள்ள பரிமாணம் கொண்ட வெளிப்புடையல்லாத யூக்ளிட் வெக்டர் வெளி E-ல் $\{x_1, x_2, \ldots x_n)$ என்ற $[n \geqslant 2]$ ஒருபடிச் சாரா நிலையிலுள்ள கணத்திலிருந்து, பூச்சிய உறுப்பைக் கொண்டிராத, கீழ்க்குறிப்பிட்ட முறையிலமைந்த $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ என்ற செங்குத்து வெக்டர் கணத்தைக் காணலாம். மேலும், $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்ற கணம் E-ல் உருவாக்கும் உள்ளடங்கு வெளியையே $\{y_1, y_2, \ldots y_n)$ என்ற கணம் உருவாக்குகிறது.

$$y_1=x_1,\ y_2=x_2-\lambda_{21}\,x_1,\ \ y_3=x_3-\lambda_{31}\,x_1-\lambda_{32}\,x_2$$

$$\ldots\ldots\ldots y_i=x_i-\sum_{k=1}^{i-1}\lambda_{ik}\,x_k\ldots\ldots\ldots$$

$$y_n=x_n-\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_{nk}\,x_k\ldots\ldots\ldots$$

நிரூபணம் :

$x_1, x_2, \ldots x_n$ என்ற கொடுக்கப்பட்ட n வெக்டர்களிலிருந்து $y_1, y_2, \ldots y_n$ என்ற வெக்டர்களைப் பின்வரும் முறையில் எடுத்துக் கொள்ளவும்.

$$\left.\begin{aligned}
y_1 &= x_1 \\
y_2 &= x_2 - \frac{(y_1, x_2)}{(y_1, y_1)}\, y_1 \\
y_3 &= x_3 - \frac{(y_1, x_3)}{(y_1, y_1)}\, y_1 - \frac{(y_2, x_3)}{(y_2, y_2)}\, y_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_n &= x_n - \frac{(y_1, x_n)}{(y_1, y_1)}\, y_1 - \frac{(y_2, x_n)}{(y_2, y_2)}\, y_2 \cdots - \frac{(y_{n-1}, x_n)}{(y_{n-1}, y_{n-1})}\, y_{n-1}
\end{aligned}\right\} (1)$$

முதலில் $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ என்ற கணம் பூச்சிய உறுப்பைக் கொண்டிராத கணம் என்று நிறுவுவோம். இதற்கு தொகுப்பாய்வு முறை கடைபிடிக்கப்படுகிறது. (Induction process)

தொகுப்பாய்வுக் கொள்கை : (Induction Hypothesis)

$\{y_1, y_2, \ldots y_{k-1}\}$ $(2 \leqslant k \leqslant n)$ என்ற கணம் பூச்சிய உறுப்பைக் கொண்டிராத கணமாக இருக்கட்டும்.

நி-வே : $\{y_1, y_2, \ldots y_{k-1}, y_k\}$ என்ற கணம் பூச்சிய உறுப்பைக் கொண்டிராது.

நிரூபணம் :

$\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ என்ற கணம் ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ளதால், $x_k \neq 0$ ஆதலாலும், தொகுப்பாய்வுக் கொள்கையின்படி $y_1 \neq 0$, $y_{k-1} \neq 0$ ஆதலாலும்,

$$y_k = x_k - \frac{(y_1, x_k)}{(y_1, y_1)}\, y_1 - \frac{(y_2, x_k)}{(y_2, y_2)}\, y_2 \cdots \frac{(y_{k-1}, x_k)}{(y_{k-1}, y_{k-1})}\, y_{k-1}$$

என்ற வெக்டர் நன்கு அமைக்கப்பட்டதாகும். (well defined) $y_k \neq 0$ என்கின்றோம். இல்லாவிடில் $y_k = 0$ எனின்,

$$x_k - \frac{(y_1, x_k)}{(y_1, y_1)}\, y_1 - \cdots \frac{(y_{k-1}, x_k)}{(y_{k-1}, y_{k-1})}\, y_{k-1} = 0 \quad \text{எனக்கிடைக்கும்.} \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

(1) லிருந்து, $y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}$ என்ற உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றையும் $\{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\}$ என்ற கணத்திலுள்ள வெக்டர்களின் ஒருபடிச்சேர்வாக எழுதமுடியும் ஆதலால், (2) ன் இடப்புறம் $x_1, x_2, \ldots, x_k$ என்ற வெக்டர்களின் ஒருபடிச்சேர்வாகும். ஆனால், இதில் x_k-ன் குணகம் $=1 \neq 0$ ஆதலால், (2) லிருந்து $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ என்ற கணம் ஒருபடிச்சார்ந்த நிலையிலுள்ளது எனக்கிடைக்கும். $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ என்ற கணம் $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்ற ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ள கணத்தின் உள்ளடங்கு கணமாதலால், இது ஒரு முரண்பாடாகும். ஆகையால் $y_k = 0$ எனக்கொண்டது தவறு. $\therefore\ y_k \neq 0$

$\therefore\ \{y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}\}$ $(k \geqslant 2)$ என்ற கணம் பூச்சிய உறுப்பைக் கொண்டிராத கணமானால் $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ என்ற கணமும் பூச்சிய உறுப்பைக் கொண்டிராத கணமாகும் எனக்கிடைக்கிறது ....(3)

ஆனால், $y_1 = x_1 \neq 0$ [$\because$ $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்ற கணம் ஒருபடிச்சார நிலையிலுள்ளதால் $x_1 \neq 0$]

$\therefore$ $\{y_1\}$ என்ற கணம் பூச்சிய உறுப்பைக் கொண்டிராத கணமாகும் ....(4)

(3), (4) ஆகியவற்றிலிருந்து தொகுப்பாய்வுக் கோட்பாட்டிலிருந்து, (principle of induction) $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ என்ற கணம் பூச்சிய உறுப்பைக் கொண்டிராத கணமாகும் எனக்கிடைக்கிறது ....(5)

$\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ என்ற கணம் செங்குத்து வெக்டர் கணமென நிரூபிக்கவேண்டும்.

$\{y_1, y_2\}$ என்ற கணத்தை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\{y_1, y_2\} = \left(x_1,\ x_2 - \frac{(x_1,\ x_2)}{(y_1,\ y_1)}\, y_1\right) = (x_1,\ x_2) - \frac{(x_1,\ y_1)}{(y_1,\ y_1)}\,(x_1,\ y_1)$$

$$= (x_1, x_2) - \frac{(x_1, x_2)}{(x_1, x_1)}\ (x_1, x_1) \quad [\because\ \ y_1 = x_1]$$

$$= 0$$

$(y_2, y_1) = (y_1, y_2) = 0$ ஆகும்.

$\therefore$ $\{y_1, y_2\}$ என்ற கணம் செங்குத்து வெக்டர் கணமாகும். ....(6)

தொகுப்பாய்வுக் கொள்கை : (Induction hypothesis)

$\{y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}\}$ $(k \geqslant 3)$ என்ற கணம் செங்குத்து வெக்டர் கணமாக இருக்கட்டும்.

நி-வே : $\{y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, y_k\}$ என்ற கணம் செங்குத்து வெக்டர் கணமாகும்.

நிருபணம் :

(y_k, y_j) $[1 \leqslant j \leqslant k-1]$ என்ற உட்பெருக்கலை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$(y_k, y_j) = \left(x_k - \frac{(y_1, x_k)}{(y_1, y_1)} y_1 - \frac{(y_2, x_k)}{(y_2, y_2)} y_2 - \ldots - \frac{(y_{k-1}, x_k)}{(y_{k-1}, y_{k-1})} y_{k-1}, y_i\right)$$

$$= (x_k, y_j) - \frac{(y_1, x_k)}{(y_1, y_1)} (y_1, y_j) - \frac{(y_2, x_k)}{(y_2, y_2)} (y_2, y_j) \ldots\ldots\ldots$$

$$- \frac{(y_j, x_k)}{(y_j, y_j)} (y_j, y_j) - \ldots - \frac{(y_{k-1}, x_k)}{(y_{k-1}, y_{k-1})} (y_{k-1}, y_j)$$

$$= (x_k, y_j) - 0 - 0 - \ldots (y_j, x_k) - 0 \ldots - 0$$

[தொகுப்பாய்வுக் கொள்கையின்படி, $(y_i, y_j) = 0$, $1 \leqslant i, j \leqslant k-1$ $i \neq j$.]

$$= 0 \quad [\because \ (y_i, x_k) = (x_k, y_j)]$$

$\therefore$ $y_k \perp x_j$ $(1 \leqslant i \leqslant k-1)$

$\therefore$ $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ என்பது செங்குத்து வெக்டர் கணமாகும்.

$\therefore$ $\{y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}\}$ $(k \geqslant 3)$ என்ற கணம் செங்குத்து வெக்டர் கணமானல் $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ என்ற கணம் செங்குத்து வெக்டர் கணமாகும் எனக் கிடைக்கிறது ....(7)

(6), (7) ஆகியவற்றிலிருந்தும் தொகுப்பாய்வுக் கோட்பாட்டிலிருந்தும், (principle of induction) $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ என்ற கணம் செங்குத்து வெக்டர் கணமாகும் எனக் கிடைக்கிறது ....(8)

$\therefore$ (5), (8) ஆகியவற்றிலிருந்து $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ என்ற கணம் பூச்சிய உறுப்பைக் கொண்டிராத செங்குத்து வெக்டர் கணமாகும் என்பது தெளிவு.

மேலும், $y_1 = x_1$ $y_2 = x_2 - \frac{(y_1, x_2)}{(y_1, y_1)} y_1 = x_2 - \frac{(x_1, x_2)}{(x_1, x_1)} x_1$

$$= x_2 - \lambda_{21} x_1 \; [\lambda_{21} \in R]$$

$$y_3 = x_3 - \frac{(y_1, x_3)}{(y_1, y_1)} y_1 - \frac{(y_2, x_3)}{(y_2, y_2)} y_2$$

$$= x_3 - \frac{(x_1, x_3)}{(x_1, x_1)} x_1 - \mu (x_2 - \lambda_{21} x_1) \left[\frac{(y_2, x_3)}{(y_2, y_2)} = \mu \right.$$

எனக்கொள்வோம். $\mu \in R]$

$$= x_3 - \mu\, x_2 - \left(\frac{(x_1, x_3)}{(x_1, x_1)} x_1 - \lambda_{21} \mu x_1 \right)$$

$$= x_3 - \lambda_{31} x_1 - \lambda_{32} x_2 \quad \left(\mu = \lambda_{32}, \frac{(x_1, x_3)}{(x_1, x_1)} x_1 - \lambda_{21} \mu = \lambda_{31} \right.$$

எனக்கொள்வோம்.)

... ...

... ...

இதேபோன்று $y_n = x_n - \lambda_{n1} x_1 - \lambda_{n2} x_2 - \ldots - \lambda_{n,\, n-1} x_{n-1}$ என எழுதலாம். $\therefore$ $y_1, y_2, \ldots, y_n$ என்ற வெக்டர்கள் தேற்றத்தில் குறிப்பிட்டபடி அமைந்துள்ளது.

$S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $T = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ என்ற கணங்களால் உருவாக்கப்படும் E-ன் உள்ளடங்கு வெளிகளை (Subspaces of E) முறையே U, V என்று குறிப்போம்.

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ என்ற வெக்டர்கள் ஒவ்வொன்றும் $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்ற கணத்திலுள்ள வெக்டர்களின் ஒருபடிச்சேர்வாதலால், $T \subset U$ ஆகும் $\therefore$ $U \subset V$ எனக் கிடைக்கிறது ....(9)

S என்ற கணம் ஒருபடிச்சாரா நிலையிலிருந்து U-வை உருவாக்குவதால் $d(U) = n$ ஆகும். T என்ற கணம் பூச்சிய உறுப்பைக் கொண்டிராத செங்குத்து வெக்டர் கணமாதலால் தேற்றம் 9·20-ன்படி, T என்ற கணம் ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ளது. மேலும், T என்பது V-யை உருவாக்குவதால் $d(V) = n$ ஆகும். $\therefore$ $d(U) = d(V)$ ஆகும் ....(10)

(9), (10), ஆகியவற்றிலிருந்து, $U = V$ எனக்கிடைக்கிறது [தேற்றம் 5·17] ஆகையால், $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ என்ற கணம், $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்ற கணம் உருவாக்கும் உள்ளடங்கு வெளியையே உருவாக்குகின்றது.

கிளைத்தேற்றம் 1:

முடிவுள்ள பரிமாணம் கொண்ட, வெளிப்படையல்லாத ஒரு யூக்ளிட் வெக்டர் வெளி E-ல் உள்ள எந்த ஓர், ஒருபடிச்சாரா நிலைக்கணத்திலிருந்தும், E-ல் ஓர் அலகு செங்குத்துத் தளத்தை அமைக்கலாம்.

நிருபணம்:

$d(E) = n$ என்க. E-ல் $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ என்ற ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ள எந்த ஒரு கணத்திலிருந்தும் E-ல் ஒரு தளத்தினை அமைக்கலாம். அதனை $\{x_1, x_2, \ldots, x_r, \ldots, x_n\}$ எனக் கொள்வோம். இத்தளத்திலிருந்து E-ல் $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ என்ற பூச்சிய உறுப்பைக் கொண்டிராத, செங்குத்து வெக்டர் கணத்தை அமைக்கலாம் [தேற்றம் 9·22] இக்கணம் ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ளதாலும், n-உறுப்புகளைக் கொண்டு இருப்பதாலும், இக்கணம் E-ல் ஒரு தளமாகும் [தேற்றம் 5·8, ii]

$\therefore$ $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ என்ற கணம் E-ல் செங்குத்துத் தளமாகும். (orthogonal basis) இதிலுள்ள வெக்டர்களை அலகு படுத்துவதன் மூலம் கிடைக்கும் கணம் $\{\|y_1\|^{-1} y_1, \|y_2\|^{-1} y_2, \ldots, \|y_n\|^{-1} y_n\}$ E-ல் ஓர் அலகு செங்குத்துத்தளமாகும். ஆகையால், E-ல் உள்ள ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ள எந்த ஒரு கணத்திலிருந்தும், E-ல் ஓர் அலகு செங்குத்துத்தளத்தை அமைக்கலாம்.

கிளைத்தேற்றம் 2:

முடிவுள்ள கணத்தால் உருவாக்கப்படும் வெளிப்படையல்லாத எந்த ஒரு யூக்ளிட் வெக்டர் வெளி E லும், முடிவுள்ள அலகு செங்குத்துத்தளம் ஒன்றுண்டு. [Existence theorem for finite orthonormal basis in a finitely generated Euclidean Space)

நிருபணம்:

எந்த ஒரு யூக்ளிட் வெக்டர் வெளியும், மெய்யெண் களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளி ஆதலால், முடிவுள்ள கணத்தால் உருவாக்கப்படும் வெளிப்படையல்லாத எந்த ஒரு யூக்ளிட் வெக்டர் வெளியிலும் முடிவுள்ள தளம் (finite basis) ஒன்றுண்டு. [தேற்றம் 5·4]

இத்தளத்திலுள்ள வெக்டர்கள் ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ளதால், இதிலிருந்து E-ல் ஒரு முடிவுள்ள அலகு செங்குத்துத் தளத்தை (finite orthonormal basis) அமைக்கலாம். [கி-தே-1]

ஆகையால், முடிவுள்ள கணத்தால் உருவாக்கப்பட்ட, வெளிப்படையல்லாத எந்த ஒரு யூக்ளிட் வெக்டர் வெளியிலும் ஒரு முடிவுள்ள அலகு செங்குத்துத்தளம் ஒன்றுண்டு.

9.23. வரையறை:

முடிவுள்ள கணத்தால் உருவாக்கப்படும் வெளிப்படையல்லாத ஒரு யூக்ளிட் வெக்டர் வெளியில் எந்த ஓர் அலகு செங்குத்துத் தளத்திலுமுள்ள வெக்டர்களின் எண்ணிக்கையே அவ்வெளியின் செங்குத்துப் பரிமாணம் (orthogonal dimension) என வரையறுக்கப்படுகிறது.

[குறிப்பு : எல்லா அலகு செங்குத்துத் தளங்களிலும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை சமமாயிருக்கும்.]

5·5-ல் வரையறுக்கப்பட்ட ஓர் அருபவெக்டர் வெளியின் பரிமாணம் ஒருபடிப்பரிமாணமென [linear dimension] அழைக்கப்படுகிறது. முடிவுள்ள கணத்தால் உருவாக்கப்படும் வெளிப்படையல்லாத யூக்ளிட் வெக்டர் வெளியில், ஒருபடிப்பரிமாணமும், செங்குத்துப்பரிமாணமும் சமமென எளிதாக நிறுவலாம்.

குறிப்பு : பின்வரும் பகுதிகளில் பரிமாணம் என்று குறிப்பிடும்பொழுது, அது ஒருபடிப்பரிமாணத்தையே குறிக்கும்.

9.24. தேற்றம் :

வெளிப்படையல்லாத n-பரிமாணம் கொண்ட [n என்பது முடிவுள்ள மிகை முழு எண் $n>0$] ஒரு யூக்ளிட் வெக்டர் வெளி E-ல் வரையறுக்கப்பட்ட உட்பெருக்கல், E-ல் உள்ள எந்த ஓர் அலகு செங்குத்துத்தளத்தைச் சார்ந்தும் $V_n(R)$-ல் வரையறுக்கப்பட்ட உட்பெருக்கல் அமைப்பைப் பெறுகிறது. [Relative to any orthonormal basis, the abstract inner product defined in E assumes the concrete inner product defined in $V_n(R)$]

நிருபணம் :

$d(E) = n$ ஆதலால், E-ல் n வெக்டர்களைக் கொண்ட அலகு செங்குத்துத்தளம் ஒன்றுவது உண்டு [கி-தே 2, 9·22] அதனை $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ எனக் கொள்வோம். இத்தளத்தின் அடிப்படையாகக் கொண்டு E-லிருந்து $V_n(R)$ ற்கு, ஓர் ஓரினச்சார்பை வரையறுக்கலாம் [தேற்றம் 6·11]

(அ-து) X என்பது E-ல் யாதானுமொரு வெக்டராயின் $X = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$ என எழுதலாம். $f: X \in E \longrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in V_n(R)$ என்ற அமைப்புமாற்றம் E லிருந்து $V_n(R)$ ற்கு ஓர் ஓரினச்சார்பாகும்.

Y என்பது E-ல் மற்றொரு வெக்டராக இருக்கட்டும். $Y = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_n x_n$ எனக் கொள்வோம். $f: Y \longrightarrow (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) \in V_n(R)$ E-ல் X, Y என்ற வெக்டர்களின் உட்பெருக்கல் $= (X, Y)$

$$= (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n, \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_n x_n)$$

$$= \lambda_1 \mu_1 (x_1, x_1) + \lambda_1 \mu_2 (x_1, x_2) + \ldots + \lambda_1 \mu_n (x_1, x_n) +$$
$$\lambda_2 \mu_1 (x_2, x_1) + \lambda_2 \mu_2 (x_2, x_2) + \ldots + \lambda_2 \mu_n (x_2, x_n) +$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$+ \lambda_n \mu_1 (x_n, x_1) + \lambda_n \mu_2 (x_n, x_2) + \ldots + \lambda_n \mu_n (x_n, x_n)$$

$$= \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \ldots + \lambda_n \mu_n$$

{$\because$ $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்ற கணம் அலகு செங்குத்துத் தளமாதலால், $(x_i, x_j) = \delta_{ij}$
$= 1$ [$i = j$ எனின்]
$= 0$ [$i \neq j$] [$1 \leqslant i, j \leqslant n$]}

$$= (\lambda; \mu)$$

ஆதலால், E லிருந்து $V_n(R)$ ற்கு அமையும் ஓரினச்சார்பு f உட்பெருக்கலைப் பாதுகாக்கின்றது எனலாம். [preserves the inner product].

9.25. செங்குத்து நிரப்பிகள் : [Orthogonal Complements]

ஒரு யூக்ளிட் வெக்டர் வெளி E-ல் S என்பது ஓர் உள்ளடங்கு கணமாக இருக்கட்டும். S-ல் உள்ள ஒவ்வொரு வெக்டருக்கும் செங்குத்தாக அமைந்த, E-ல் உள்ள வெக்டர்களைக் கொண்டு அமைக்கப்பட்ட E-ன் உள்ளடங்கு கணம் T என்பது E-ல் ஓர் உள்ளடங்கு வெளியாகும்.

நிரூபணம் :

x என்பது S-ல் எந்த ஓர் உறுப்பாகவும் இருக்கட்டும்.

y_1, y_2 என்பவை T-ல் யாதானுமிரு உறுப்புகளாயின்,

$$(y_1 + y_2, x) = (y_1, x) + (y_2, x)$$
$$= 0 \quad [\because \; y_1 \perp x, \; y_2 \perp x]$$

$\therefore \quad y_1 + y_2 \perp x \quad \therefore \quad y_1 + y_2 \in T$ ....(1)

$\lambda \in R$ எனின் $(\lambda y_1, x) = \lambda (y_1, x) = \lambda \cdot 0 = 0 \quad [\because \quad y_1 \perp x]$

$\therefore \quad \lambda y_1 \perp x \quad \therefore \quad \lambda y_1 \in T$ ....(2)

(1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து T என்ற கணம் E-ல் ஓர் உள்ளடங்கு வெளியை அமைக்குமென்பது தெளிவு.

குறிப்பு 1: S என்பது E-ல் உள்ளடங்கு கணமாக இருந்து, உள்ளடங்கு வெளியாக இல்லாவிட்டாலும், T என்ற கணம் E-ல் உள்ளடங்கு வெளியாக இருக்கும்.

குறிப்பு 2: S-ல் உள்ள ஒவ்வொரு வெக்டருக்கும் செங்குத்தாக அமைந்த E-ல் உள்ள வெக்டர்களைக் கொண்டு அமைக்கப்பட்ட கணம் T என்பது, $S^{\perp}$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

9·26. வரையறை :

ஒரு யூக்ளிட் வெக்டர் வெளி E-ல் S என்பது உள்ளடங்கு வெளியாக இருக்கட்டும். S-ல் உள்ள ஒவ்வொரு வெக்டருக்கும் செங்குத்தாக அமைந்த E-ல் உள்ள வெக்டர்களைக் கொண்டு அமைக்கப்பட்ட கணம் E-ல் ஓர் உள்ளடங்கு வெளியை அமைக்கும். இவ்வெளி E-ல் S ன் செங்குத்து நிரப்பி (orthogonal complement of sin E) என வரையறுக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. எந்த ஒரு யூக்ளிட் வெக்டர் வெளி Eலும், E-ன் பூச்சிய உறுப்பை மட்டுங்கொண்ட கணம் $\{0\}$, E-ல், E-ன் செங்குத்து நிரப்பியாகும். E-ல் $\{0\}$ என்ற உள்ளடங்கு வெளியின் செங்குத்து நிரப்பி E ஆகும்.

2. $V_n(R)$ ல் $E_1, E_2, \ldots, E_n$ என்ற அலகு வெக்டர் ஓர் அலகு செங்குத்துத் தளத்தை அமைக்கும். $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ என்ற கணத்தால் உருவாக்கப்படும் உள்ளடங்கு வெளியின் செங்குத்து நிரப்பி, $\{E_{r+1}, \ldots, E_n\}$ என்ற கணத்தால் உருவாக்கப்படுகிறது.

9·27. முடிவுள்ள பரிமாணம் கொண்ட வெளிப்படையல்லாத யூக்ளிட் வெக்டர் வெளியில் ஓர் உள்ளடங்கு வெளியினுக்கு, செங்குத்து நிரப்பி இருக்கும் தேற்றம் [Existence theorem for orthogonal complements]

தேற்றம் :

வெளிப்படையல்லாத முடிவுள்ள n- பரிமாணங்கொண்ட யூக்ளிட் வெக்டர் வெளி E-ல் உள்ள பரிமாணம் r-கொண்ட உள்ளடங்கு வெளி S-ற்கு, E-ல் பரிமாணம் $(n-r)$ கொண்ட செங்குத்து நிரப்பி (orthogonal complement) உண்டு.

நிரூபணம் :

$d(E) = n$ என்பது தரவு. E-ன் பூச்சிய உறுப்பை 0 என்று குறிப்போம்.

வகை 1 : $r = 0$ எனின் $S = \{0\}$. $\therefore$ E-ல் S-ன் செங்குத்து நிரப்பி E ஆகும் என்பது வெளிப்படை. இங்கு செங்குத்து நிரப்பியின் பரிமாணம் $= n = n - 0 = n - r$ ஆகும்.

$r = n$ எனில், $S = E$ ஆகும் [தேற்றம் 5·17]

$\therefore$ $\{0\}$ என்ற E-ன் வெளிப்படை உள்ளடங்கு வெளி, S-ன் செங்குத்து நிரப்பியாகும். இங்கு செங்குத்து நிரப்பியின் பரிமாணம் $= 0 = n - n$ ஆகும்.

வகை 2 : S என்பது வெளிப்படை உள்ளடங்கு வெளியாக இல்லாமலும், E-ன் முழு உள்ளடங்கு வெளியாகவும் (proper subspace) இருக்கட்டும்.

(அ-து) $0 < d(S) = r < n$ என்று இருக்கட்டும்.

S என்பது E-ல் ஓர் உள்ளடங்கு வெளியாதலால். அது ஒரு யூக்ளிட் வெக்டர் வெளியாகும். $\therefore$ S-ல் $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ என்ற r உறுப்புகளைக் கொண்ட அலகு செங்குத்துத்தளம் ஒன்று இருக்கும். [கி-தே. 2, 9·22]

B என்ற கணம் E-ல் ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ள கணமாதலால், இக்கணத்திலிருந்து E-ல் அலகு செங்குத்துத் தளம் ஒன்றை அமைக்கலாம். அதனை $\{x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n\}$ எனக் கொள்வோம். $\{x_{r+1}, \ldots, x_n\}$ என்ற $(n-r)$ உறுப்புகளைக் கொண்ட கணத்தால், உருவாக்கப்பட்ட E-ன் உள்ளடங்கு வெளியை T எனக் குறிப்போம். இக்கணம் ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ளதால், இது T-ல் ஒரு தளமாகும்.

$\therefore$ $d(T) = n - r$ ....(1)

S-ல் உள்ள ஒவ்வொரு வெக்டருக்கும் செங்குத்தாக அமைந்த E-ல் உள்ள எந்த ஒரு வெக்டர் X-யும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

$X \in E$ ஆதலால், $X = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_r x_r + \lambda_{r+1} x_{r+1} + \ldots + \lambda_n x_n$ ஆகும்.

$[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in R]$

$[\because \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்பது E-ல் ஒரு தளமாகும்$]$

$1 \leqslant i \leqslant r$ எனின் $(x, x_i) = 0$ ஆகும். $[\because x_i \in S]$

$\therefore (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_i x_i + \ldots + \lambda_r x_r + \ldots + \lambda_n x_n, x_i) = 0$

$\therefore \lambda_i (x_i, x_i) = 0$ $\{\because \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்பது அலகு செங்குத்துத் தளமாகும்.$\}$

$\therefore \lambda_i \cdot 1 = 0$ $[\because (x_i, x_i) = 1]$ (அ-து). $\lambda_i = 0$

$\therefore \lambda_i = 0$ $[1 \leqslant i \leqslant r]$

$\therefore X = \lambda_{r+1} x_{r+1} + \ldots + \lambda_n x_n$ ஆகும். $\therefore X \in T$ ......(2)

Y என்பது T-ல் யாதானுமொரு வெக்டராக இருக்கட்டும்.

$Y = \mu_{r+1} x_{r+1} + \ldots + \mu_n x_n$ என எழுதலாம். $\{\because [x_{r+1}, \ldots, x_n]$ என்பது T-யை உருவாக்குகிறது.$\}$

X என்பது S-ல் யாதானுமொரு வெக்டராக இருக்கட்டும்.

$X = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_r x_r$ எனின்,

$$(Y, X) = (\mu_{r+1} x_{r+1} + \ldots + \mu_n x_n, \ \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_r x_r)$$
$$= \mu_{r+1} \mu_1 (x_{r+1}, x_1) + \mu_{r+1} \mu_2 (x_{r+1}, x_2) + \ldots + \mu_{r+1} \mu_r (x_{r+1}, x_r) + \ldots + \mu_n \mu_1 (x_n, x_1) + \mu_n \mu_2 (x_n, x_2) + \ldots + \mu_n \mu_r (x_n, x_r)$$
$$= 0 \quad [\because i \neq j \text{ எனின் } (x_i, x_j) = 0]$$
$$\therefore Y \perp X$$

$\therefore$ T-ல் உள்ள ஒவ்வொரு வெக்டரும், S-ல் உள்ள ஒவ்வொரு வெக்டருக்கும் செங்குத்தாக இருக்கும். ....(3)

(1), (2), (3) ஆகியவற்றிலிருந்து T என்பது E-ல் S-ன் செங்குத்து நிரப்பியாகுமெனவும், T-ன் பரிமாணம் $(n-r)$ என்றும் கிடைக்கிறது. ஆகையால், E-ல் பரிமாணம்

r கொண்ட S என்ற உள்ளடங்கு வெளி ஒன்று கொடுத்தால், அதற்கு E-ல் பரிமாணம் $(n-r)$ கொண்ட ஒரு செங்குத்து நிரப்பியைக் காணலாம்.

9.28. வீழல் தேற்றம் [Projection Theorem]

தேற்றம்:

முடிவுள்ள பரிமாணமுள்ள வெளிப்படையல்லாத யூக்ளிட் வெக்டர் வெளி E-ல் S என்பது யாதானுமொரு உள்ளடங்கு வெளியாக இருக்கட்டும். $S^{\perp}$ என்பது E-ன் S-ன் செங்குத்து நிரப்பியானால்,

(1) $S^{\perp}$ என்பது E-ல் ஓர் உள்ளடங்கு வெளியாகும்.

(2) $S^{\perp}$ என்பது E-ல் S-ன் நிரப்பி (complement) யாகும். [(அ-து) E என்பது, S, $S^{\perp}$ ஆகியவற்றின் உள் நேரிடைப் பெருக்கலாகும் (internal direct product)]

(3) E-ல், $S^{\perp}$ என்பதன் செங்குத்து நிரப்பி S ஆகும்.
{(அ-து) $(S^{\perp})^{\perp}=S$}

(4) $d(S)+d(S^{\perp})=d(E)$ ஆகும்.

நிருபணம்:

(1) தேற்றம் 9·25-லிருந்து, $S^{\perp}$ என்பது E-ல் ஓர் உள்ளடங்கு வெளி என்பது தெளிவு.

(2) $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ என்பது S-ல் ஓர் அலகு செங்குத்துத் தளமாகவும், $\{x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n\}$ என்பது E-ல் ஓர் அலகு செங்குத்துத் தளமாகவும் இருந்தால், $S^{\perp}$ என்ற S-ன் செங்குத்து நிரப்பி $\{x_{r+1}, \ldots, x_n\}$ என்ற ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ள கணத்தால் உருவாக்கப்படுகிறது. [தேற்றம் 9·27]

$\therefore$ E-ல் யாதானுமொரு உறுப்பு Xஐ எடுத்துக்கொண்டால்,

$$\begin{aligned}X&=\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ldots+\lambda_r x_r+\lambda_{r+1} x_{r+1}+\ldots+\lambda_n x_n\\&=(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ldots+\lambda_r x_r)+(\lambda_{r+1} x_{r+1}+\ldots+\lambda_n x_n)\\&=Y+Z,\quad [Y\in S,\ Z\in S^{\perp}] \quad \therefore X\in S+S^{\perp}\end{aligned}$$

$\therefore E\subset S+S^{\perp}$ ஆனால் $S+S^{\perp}$ என்பது E-ன் உள்ளடங்கு வெளியாகும்.

$\therefore \quad E=S+S^{\perp}$ ....(1)

α என்பது $S \cap S^{\perp}$-ல் யாதானுமொரு வெக்டராக இருக்கட்டும்.

$\therefore \quad \alpha \in S,\ \alpha \in S^{\perp} \quad \therefore \quad (\alpha, \alpha)=0 \quad \therefore \quad \alpha=0$

[வரையறை 9·6. iii]

$\therefore \quad S \cap S^{\perp} = 0$ ....(2)

(1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து, $S^{\perp}$ என்பது E-ல் S-ன் ஒரு நிரப்பியாகும். [$S^{\perp}$ is a complement of S in E] [தேற்றம் 6.22]

(3) β என்பது $(S^{\perp})^{\perp}$-ல் யாதானுமொரு வெக்டராக இருக்கட்டும்.

$\therefore \quad \beta \in E,\ [\forall\ Z \in S^{\perp}\ \beta \perp Z]$

$\beta \in E \Longrightarrow \beta=X+Y\ [X \in S,\ Y \in S^{\perp}]\ \{\because E=S+S^{\perp}\}$

$\therefore \quad (\beta, Y)=(x+y, y)=(x, y)+(y, y)=0+(y, y) \quad [\because\ x \perp y]$

$= (y, y)=0 \quad [\therefore\ \beta \perp Y]$

$\therefore \quad Y=0$ [வரையறை 9.6, iii]

$\therefore \quad \beta=X \in S \qquad \therefore \quad (S^{\perp})^{\perp} \subset S$ ....(3)

மேலும், S-ல் யாதானுமொரு உறுப்பு X ஐ எடுத்துக்கொள்வோம்.

$\therefore \quad \forall\ Y \in S^{\perp},\ (y, x)=0 \quad \therefore\ (x, y)=0 \quad \therefore\ X \perp Y \quad [\forall Y \in S]$

$\therefore \quad X \in (S^{\perp})^{\perp} \qquad \therefore \quad S \subset (S^{\perp})^{\perp}$ ....(4)

(3), (4) ஆகியவற்றிலிருந்து $S=(S^{\perp})^{\perp}$ ஆகும்.

(4) $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ என்பது S-ல் ஒருதளமாதலாலும், $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்பது $S^{\perp}$-ல் ஒருதளமாதலாலும், $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ என்பது E-ல் ஒருதளமாதலாலும், $d(S)=r,\ d(S^{\perp})=n-r$, $d(E)=n$ ஆகும்.

$\therefore \quad d(S)+d(S^{\perp})=d(E)$

குறிப்பு **1:** மேலே உள்ள தேற்றத்தில் மூன்றும் பகுதியிலிருந்து, S, $S^{\perp}$ என்ற E-ன் உள்ளடங்கு வெளிகள் ஒன்று மற்றதன் நிரப்பியாக அமைகின்றது.

குறிப்பு 2: Z என்பது E-ல் உள்ள S-ல் இல்லாத ஒரு வெக்டராக இருக்கட்டும். $Z \in E$ ஆதலால், $Z = X + Y$ $[X \in S, Y \in S^{\perp}]$ $\{\because \ E = S + S^{\perp}\}$. $Y \in S^{\perp}$ ஆதலால், Y என்பது S-ல் உள்ள ஒவ்வொரு வெக்டருக்கும் செங்குத்தாக இருக்கும். X என்ற S-ல் உள்ள வெக்டர் Z என்ற E-ல் உள்ள வெக்டரின் S-ன் மீதமையும் செங்குத்து வீழல் (orthogonal projection) என அழைக்கப்படுகிறது.

மேலும்,

$$(Z, X) = (X+Y, X) = (X, X) + (Y, X) = \| X \|^2 \quad [\because Y \perp X]$$
$$(Z, Y) = (X+Y, Y) = (X, Y) + (Y, Y) = \| Y \|^2 \quad [\because X \perp Y]$$
$$(Z, Z) = (Z, X+Y) = (Z, X) + (Z, Y) = \| X \|^2 + \| Y \|^2$$
$$\therefore \quad \| Z \|^2 = \| X \|^2 + \| Y \|^2$$

9·29. பெஸ்ஸலின் சமனிலி (Bessel's inequality)

தேற்றம்:

முடிவுள்ள பரிமாணங்கொண்ட, வெளிப்படையல்லாத யூக்ளிட் வெக்டர் வெளி E-ல் $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்பது ஓர் அலகு செங்குத்துத்தளமாகவும், X என்பது E-ல் யாதானுமொரு வெக்டராகவும் இருந்தால்,

$$\sum_{i=1}^{n} [\,(X, X_i)\,]^2 \leqslant \| X \|^2 \text{ ஆகும்.}$$

நிரூபணம்:

$$Y = X - \sum_{i=1}^{n} (X, X_i)\, X_i \text{ எனக் கொள்வோம்.}$$

$$0 \leqslant \| Y \|^2 = (Y, Y) = \left(X - \sum_{i=1}^{n} (X, X_i)\, X_i,\ X - \sum_{i=1}^{n} (X, X_i)\, X_i \right)$$
$$= (X, X) - \left(X,\ \sum_{i=1}^{n} (X, X_i)\, X_i \right)$$
$$- \left(\sum_{i=1}^{n} (X, X_i)\, X_i,\ X \right)$$
$$+ \left(\sum_{i=1}^{n} (X, X_i)\, X_i,\ \sum_{i=1}^{n} (X, X_i)\, X_i \right)$$

$$= (X, X) - 2 \sum_{i=1}^{n} (X, X_i)(X, X_i) + \sum_{i=1}^{n} (X, X_i) \left(\sum_{i=1}^{n} (X, X_i) X_i, X_i \right)$$

$$= (X, X) - 2 \sum_{i=1}^{n} (X, X_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} (X, X_i)(X, X_i)$$

[$\because$ $(X_i, X_i) = 1$, $i \neq j$ எனின் $(X_i, X_j) = 0$]

$$= (X, X) - \sum_{i=1}^{n} (X, X_i)^2 = \| X \|^2 - \sum_{i=1}^{n} (X, X_i)^2$$

$$\therefore \quad 0 \leqslant \| X \|^2 - \sum_{i=1}^{n} (X, X_i)^2$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} (X, X_i)^2 \leqslant \| X \|^2$$

....

9·30. பார்சிவல்லின் முற்றொருமை : [Parseval's Identity]

முடிவுள்ள பரிமாணமுள்ள வெளிப்படையல்லாத அருபவெக்டர் வெளி E-ல் $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்பது ஓர் அலகு செங்குத்துத் தளமாகுமெனின் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

1. $X \in E, (X, X_i) = 0$ $[1 \leqslant i \leqslant n]$ எனின் $X = 0$

2. $X \in E$ எனின் $X = \sum_{i=1}^{n} (X, X_i) X_i$

3. $X, Y \in E$ எனின் $(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} (X, X_i)(X_i, Y)$

[பார்சிவல்லின் முற்றொருமை]

4. $X \in E$ எனின் $\| X \|^2 = \sum_{i=1}^{n} (X, X_i)^2$

நிருபணம் :

1. $X \in E, (X, X_i) = 0 \ (1 \leqslant i \leqslant n)$ என்பது தரவு.

$\therefore$ X என்பது B-யால் உருவாக்கப்படும் உள்ளடங்கு வெளியிலுள்ள எல்லா வெக்டர்களுக்கும் செங்குத்தாகும். [தேற்றம் 9·15]

B என்ற கணம் E-யை உருவாக்குவதால், X என்பது E-ல் உள்ள எல்லா வெக்டர்களுக்கும் செங்குத்தாகும். $\therefore$ $X \in E^{\perp}$ ஆனால், $E^{\perp} = \{0\}$ $\therefore$ $X = 0$ ஆகும்.

2. $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்ற கணம் E-ல் ஒருதளமாதலால், $X \in E$ எனின், $X = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$ ஆகும் $[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in R]$

$1 \leqslant i \leqslant n$ எனின், $(X, X_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i, X_i \right)$

$$= \lambda_1 (X_1, X_i) + \lambda_2 (X_2, X_i) + \ldots + \lambda_i (X_i, X_i) + \ldots + \lambda_n (X_n, X_i)$$

$$= \lambda_i \quad [\because \ (X_i, X_i) = 1, i \neq j \text{ எனின் } (X_j, X_i) = 0]$$

$\therefore$ $\lambda_i = (X, X_i) \ [1 \leqslant i \leqslant n]$

$$\therefore \quad X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i = \sum_{i=1}^{n} (X, X_i) X_i \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

3. $X, Y \in E$ எனின் (2) லிருந்து,

$X = \sum_{i=1}^{n} (X, X_i) X_i, Y = \sum_{i=1}^{n} (Y, X_i) X_i$ என்று கிடைக்கும்.

$$\therefore \quad (X, Y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (X, X_i) X_i, \ \sum_{i=1}^{n} (Y, X_i) X_i \right)$$

$$= [(X, X_1) X_1 + (X, X_2) X_2 + \ldots + (X, X_n) X_n, \ (Y, X_1) X_1 + (Y, X_2) X_2 + \ldots + (Y, X_n) X_n]$$

$$= (X, X_1) (Y, X_1) (X_1, X_1) + (X, X_1) (Y, X_2) (X_1, X_2) + \ldots + (X, X_1) (Y, X_n) (X_1, X_n) + \ldots + (X, X_n) (Y, X_1) (X_n, X_1) + (X, X_n) (Y, X_2) (X_n, X_2) + \ldots + (X, X_n) (Y, X_n) (X_n, X_n)$$

$$= (X, X_1) (Y, X_1) + (X, X_2) (Y, X_2) + \ldots + (X, X_n) (Y, X_n)$$

$[\because \ (X_i, X_i) = 1 \ \ (1 \leqslant i \leqslant n) \ \ i \neq j$ எனின் $(X_i, X_j) = 0]$

$$\therefore \ (X, Y) = \sum_{i=1}^{n} (X, X_i)(Y, X_i) = \sum_{i=1}^{n} (X, X_i)(X_i, Y)$$

4. $X \in E$ எனின் மூன்றும் பகுதியில் $Y = X$ என எடுத்துக் கொண்டால்,

$$(X, X) = \sum_{i=1}^{n} (X, X_i)(X_i, X) \text{ எனக்கிடைக்கும்.}$$

$$\therefore \ \| X \|^2 = \sum_{i=1}^{n} [(X, X_i)]^2 \text{ ஆகும்.}$$

§ 9.31. சிக்கலெண் களத்தின் மீதமைந்த உட்பெருக்கல் வெளிகள் : [Inner Product Spaces Over Complex Fields]

சிக்கலெண்களம் C-ன் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளி U-வில், உள்ள (X, Y) போன்ற வரிசையிட்ட ஜோடி உறுப்புகளை (ordered pairs of elements X and Y) C-ல் உள்ள சிக்கலெண்களோடு தொடர்புபடுத்தும் எண்சார்பு (numerical function) பின்வருவனவற்றை நிறைவு செய்தால் அச்சார்பு U-வின் சிக்கலெண் உட்பெருக்கல் சார்பு (complex inner product function) எனப்படுகிறது.

(i) $\forall X, Y \in U, \ (X, Y) = \overline{(Y, X)}$

(ii) $\forall X, Y, Z \in U, \lambda \in C, \quad (X+Z, Y) = (X, Y)+(Z, Y)$
$\qquad (\lambda X, Y) = \lambda (X, Y)$

(iii) $(X, X) \geqslant 0, (X, X) = 0 \Longleftrightarrow X = 0$

[குறிப்பு 1: X, Y என்ற வரிசையிட்ட ஜோடியோடு தொடர்பு படுத்தப்படும் C-ல் உள்ள எண்ணி (X, Y) என்று குறிக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு 2: $\alpha \in C$ எனின் $\overline{\alpha}$ என்பது α-வின் இணைச் சிக்கலெண் (complex conjugate) ஆகும்.]

§ 9.32. வரையறை: ஒன்றூடான வெளி (Unitary space)

சிக்கலெண் களம் C-ன் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளி U-வில், மேற்கூறிய முறையில் உட்பெருக்கல் சார்பு வரையறுக்கப்பட்டால், அந்த உட்பெருக்கலுடன் கூடிய

அருபவெக்டர் வெளி U, ஓர் ஒன்றூடான வெளி (unitary space) அல்லது சிக்கலெண் உட்பெருக்கல் வெளி (complex inner product space) என வரையறுக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு :

$V_n(C)$ ல் X, Y என்பவை எந்த இருவெக்டர்களையும் குறிக்கட்டும். $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ எனின், X, Y என்ற வரிசையிட்ட ஜோடியின் உட்பெருக்கல் சார்பு (X, Y) பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது. $(X, Y)=x_1\overline{y_1}+x_2\overline{y_2}+\ldots+x_n\overline{y_n}$ இம்முறையில் வரையறுக்கப்பட்டச் சார்பு 9·31-ல் உள்ள மூன்று விதிகளை நிறைவு செய்வதால், இச்சார்புடன் கூடிய $V_n(C)$ ஓர் ஒன்றூடான வெளியாகும்.

குறிப்பு: U என்பது ஓர் ஒன்றூடான வெக்டர் வெளியாக இருக்கட்டும்.

$$\forall X, Y, Z \in U, \lambda_1, \lambda_2 \in C, (X, \lambda_1 Y+\lambda_2 Z)=\overline{(\lambda_1 Y+\lambda_2 Z, X)} \quad [9\cdot31,\ i]$$

$$=\overline{(\lambda_1 Y, X)}+\overline{(\lambda_2 Z, X)} \quad [9\cdot31,\ ii]$$

$$=\overline{\lambda_1}\,\overline{(Y, X)}+\overline{\lambda_2}\,\overline{(Z, X)} \quad [9\cdot31,\ ii]$$

$$=\overline{\lambda_1}(X, Y)+\overline{\lambda_2}(X, Z) \quad [9\cdot31,\ i]$$

$$\therefore\ (X, \lambda_1 Y+\lambda_2 Z)=\overline{\lambda_1}(X, Y)+\overline{\lambda_2}(X, Z) \quad [9\cdot31,\ iv]$$

[குறிப்பாக $(X, \lambda Y)=\overline{\lambda}(X, Y)$ ஆகும்.]

குறிப்பு: 9·31. விதி (i)ஐ நிறைவு செய்வதால், சிக்கலெண் உட்பெருக்கல் சார்பு ஹெர்மீஷியன் சமச்சீர் (Hermitian symmetric) வாய்ந்தது எனவும், (ii), (iv) ஆகிய விதிகளை நிறைவு செய்வதால் அச்சார்பு இணை இருபுற ஒருபடித்தானது எனவும் (conjugate bilinear) (iii) ஐ நிறைவு செய்வதால் அச்சார்பு உறுதியான பாசிடிவ் (positive definite) ஆகுமென்வும் கூறலாம்.

§ 9·33. ஒன்றூடான வெளியில் ஓர் உறுப்பின் (வெக்டரின்) நீளத்தை வரையறுத்தல் :

ஒன்றூடான வெளி U-வில், X என்பது எந்த ஓர் உறுப்பாகவும் இருக்கட்டும். $+\sqrt{(X, X)}$ என்பது X-ன் நீளம் என வரையறுக்கப்படுகிறது. இதனை $\|X\|$ என்று குறிப்பது வழக்கம். இதனை X-ன் அளவை (norm) என்றும் கூறுவதுண்டு.

யூக்ளிட் வெக்டர் வெளியில் நிறுவிய முடிவுகள் அனைத்தையும், சில மாறுதல்களுடன் ஒன்றூடான வெளியிலும் நிறுவலாம்.

உதாரணமாக, $V_n(C)$-ல் சுவார்ச்சின் சமனிலி (Schwarz's inequality) பின்வருமாறு அமைகின்றது. $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ என்பவை $V_n(C)$-ல் யாதானுமிரு வெக்டர்களாயின், $|(X, Y)|^2 \leqslant \|X\|^2 \|Y\|^2$ ஆகும்.

$$(\text{அ-து}) \left| \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \right|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2$$

$$(\text{அ-து}) \; |(x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \ldots + x_n \overline{y_n})|^2 \leqslant (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2) \cdot (|y_1|^2 + |y_2|^2 + \ldots + |y_n|^2)$$

இதுவே கோசி-சுவார்ச்சு சமனிலியாகும். [Cauchy-Schwarz inequality]

மாதிரி 1: $V_3(R)$-ல் $X=(3, 0, 4)$, $Y=(1, 2, 2)$ என்பவை இரு வெக்டர்களெனில் (X, Y), $\|X\|$, $\|Y\|$ ஆகியவற்றின் மதிப்பு என்ன? இதனைக் கொண்டு, சுவார்ச்சின் சமனிலியையும், முக்கோண சமனிலியையும் சரி பார்.

நிரூபணம் :

$$(X, Y) = 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 11.$$

$$\|X\|^2 = (X, X) = 3 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + 4 \, 4 = 25$$

$$\therefore \|X\| = +\sqrt{25} = +5.$$

$$\|Y\|^2 = (Y, Y) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 9$$

$$\therefore \|Y\| = +\sqrt{9} = +3.$$

$$|(X, Y)| = |11| = 11 \quad \|X\| \cdot \|Y\| = 5 \times 3 = 15.$$

$\therefore |(X, Y)| < \|X\| \cdot \|Y\|$ ஆகையால், சுவார்ச்சின் சமனிலி உண்மை எனத் தெரிகிறது.

$$X + Y = (3, 0, 4) + (1, 2, 2) = (4, 2, 6)$$

$$\therefore \|X+Y\| = +\sqrt{4^2 + 2^2 + 6^2} = 2\sqrt{14} < 8.$$

$$\|X\| + \|Y\| = 5 + 3 = 8 \quad \therefore \|X+Y\| < \|X\| + \|Y\|$$

ஆகையால், முக்கோண சமனிலி உண்மை எனத் தெரிகிறது.

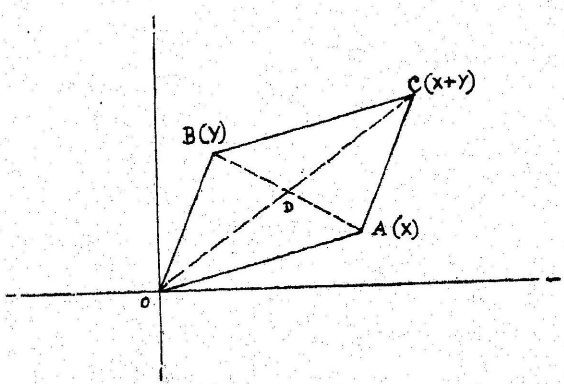
மாதிரி **2**: ஒரு யூக்ளிட் வெக்டர் வெளியில் X, Y என்பவை யாதானுமிரு உறுப்புகளாயின் $\| X-Y \|^2 + \| X+Y \|^2 = 2(\| X \|^2 + \| Y \|^2)$ என நிறுவுக. வடிவக் கணிதத்தில் இம் முடிவின் பொருளை விளக்குக.

நிரூபணம் :

$$\begin{aligned} \| X-Y \|^2 + \| X+Y \|^2 &= (X-Y, X-Y)+(X+Y, X+Y) \\ &= (X, X)+(X, -Y)+(-Y, X)+(-Y, -Y) \\ &\quad + (X, X)+(X, Y)+(Y, X)+(Y, Y) \\ &= (X, X)-2(X, Y)+(Y, Y)+(X, X) \\ &\quad +2(X, Y)+(Y, Y) \\ &= 2(\| X \|^2 + \| Y \|^2) \end{aligned}$$

$V_2(R)$-ல் X, Y என்பவை இரு வெக்டர்களாக இருக்கட்டும். $X \neq Y$, $X \neq 0$, $Y \neq 0$ எனின் இவ்விரு வெக்டர்களும், ஒரு தளத்தில் (in a plane) இரு வேறு புள்ளிகளின் இடம் குறிக்கும் வெக்டர்களைக் (position vectors) குறியீடு செய்யும். அப்புள்ளிகளை A, B எனக் கொள்வோம். இத்தளத்தில் இரு செங்குத்து நேர் கோடுகளை அச்சுகளாகவும் (axes) அவை வெட்டும்புள்ளி O வை ஆதியாகவும் (origin) கொள்வோம். இவற்றைச் சார்ந்து X, Y என்பவை, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ என்ற வெக்டர்களைக் குறியீடு செய்கின்றது.

OA, OB யை அண்டைப் பக்கங்களாகக் கொண்ட, $OACB$ என்ற இணைகரம் வரைவோம். C-ன் இடம் குறிக்கும் வெக்டர்



படம் 25

$\overrightarrow{OC}$, $V_2(R)$-ல் $X+Y$ என்ற வெக்டரால் குறியீடு செய்யப் படுகிறது. OC, AB என்பவை D-ல் வெட்டட்டும்.

$OA = \| X \|, \ OB = \| Y \|, \ OC = \| X + Y \|$

$AB = \| X - Y \|$ ஆகும்.

$\therefore \quad \| X - Y \|^2 + \| X + Y \|^2 = 2 (\| X \|^2 + \| Y \|^2)$

என்ற முடிவு, $AB^2 + OC^2 = 2 (OA^2 + OB^2)$
என்பதைக் கொடுக்கிறது.

$\therefore \quad 2 (OA^2 + OB^2) = (2\ AD)^2 + (2\ OD)^2 = 4\ AD^2 + 4\ OD^2$
[$\because$ D என்பது, AB, OC ஆகிய வற்றின் நடுப்புள்ளி]

$\therefore \quad OA^2 + OB^2 = 2\ OD^2 + 2\ AD^2$

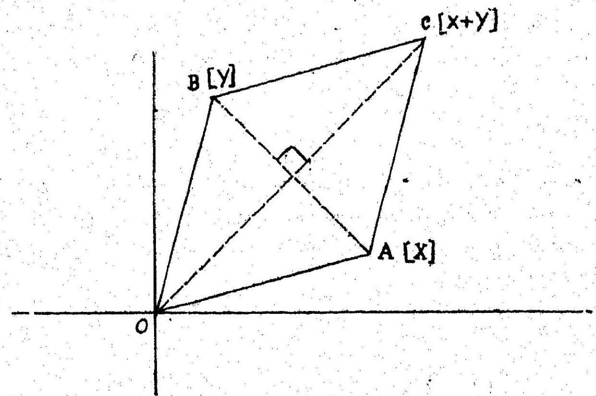
இதுவே $\triangle\ OAB$-ல் அபலோனியஸ் தேற்றமாகும்.

மாதிரி **3**: ஒரு யூக்ளிட் வெக்டர் வெளியில் X, Y என்ற இரு வெக்டர்கள் $\| X \| = \| Y \|$ என்றவாறு இருந்தால், $X - Y \perp X + Y$ என நிறுவுக. வடிவக் கணிதத்தில் இதன் பொருளை விளக்குக.

நிரூபணம்:

$$(X - Y, X + Y) = (X, X) + (X, Y) + (-Y, X) + (-Y, Y)$$
$$= \| X \|^2 + (X, Y) - (X, Y) - \| Y \|^2$$
$$= 0 \quad [\because \| X \| = \| Y \| \text{ என்பது தரவு}]$$

$\therefore \quad X - Y \perp X + Y.$



படம் 26.

மாதிரி 2-ல் உள்ளதுபோல் வரைமுறை செய்வோம்.

$\| X \| = \| Y \|$ ஆதலால், $OA = OB$ ஆகும். ஆகையால் $OACB$ என்பது ஒரு சாய்சதுரமாகும். (Rhombus) $X+Y$ என்ற வெக்டர் $\overrightarrow{OC}$ யைக் குறியீடு செய்வதாலும், $X-Y$ என்ற வெக்டர் $\overrightarrow{BA}$ யைக் குறியீடு செய்வதாலும், $X - Y \perp X + Y$ என்ற முடிவு $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{OC}$ என்பதைக் கொடுக்கிறது. அதாவது, ஒரு சாய் சதுரத்தில் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகும் என்று தெரிகிறது.

மாதிரி 4: யூக்ளிட்வெக்டர் வெளி $V_4(R)$ல் $\{(2,-1,0,1), (6,1,4,-5), (4,1,3,-4)\}$ என்ற கணத்தால் உருவாக்கப்பட்ட உள்ளடங்கு வெளியில் ஓர் அலகு செங்குத்துத் தளத்தை அமைக்கவும்.

நிரூபணம்:

$B_1 = \{X_1, X_2, X_3\}$, $X_1 = (2, -1, 0, 1)$, $X_2 = (6, 1, 4, -5)$, $X_3 = (4, 1, 3, -4)$ எனக் கொள்ளவும்.

B_1 லிருந்து ஓர், ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ள கணம் ஒன்றை அமைப்போம். X_2 என்பதை X_1-ன் எந்த ஓர் எண்ணியால் பெருக்கலாகவும் கூறமுடியாது. $X_3 = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ எனின் $\lambda_1 = -\frac{1}{4}$, $\lambda_2 = +\frac{3}{4}$ ஆகும். ஆகையால், X_3 என்பது X_1, X_2 என்ற வெக்டர்களின் வெளிப்படையல்லாத ஒருபடிச் சேர்வாகும். ஆதலால், X_3ஐ நீக்கி விடுவதால் கிடைக்கும் கணம் $B_2 = \{X_1, X_2\}$ ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ளதாகவும், B_1 உருவாக்கும் உள்ளடங்கு வெளியையே உருவாக்கும் கணமாகவும் உள்ளது. B_1 உருவாக்கும் உள்ளடங்கு வெளியை S எனக் குறித்தால் $B_2 = \{(2, -1, 0, 1), (6, 1, 4, -5)\}$ என்ற கணம் S-ல் ஒரு தளமாகும்.

ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ள கணம் B_2 லிருந்து S-ல் ஓர் அலகு செங்குத்துத்தளத்தை அமைக்க, கிராம் சுமிதின் செங்குத்தாக்கும் முறையைப் (Gram-Schmidt's orthogonalisation process) பின்பற்றுவோம்.

$Y_1 = X_1 = (2, -1, 0, 1)$ என்க.

$$Y_2 = X_2 - \frac{(Y_1, Y_2)}{(Y_1, Y_1)} Y_1 = (6, 1, 4, -5) - \tfrac{6}{6}(2, -1, 0, 1)$$
$$= (4, 2, 4, -6)$$

$\therefore \quad B_3=\{Y_1, Y_2\} = \{(2, -1, 0, 1), \ (4, 2, 4, -6)\}$ என்ற கணம் S-ல் ஒரு செங்குத்துத் தளமாகும். (orthogonal basis) B_3-ல் உள்ள வெக்டர்களை அலகு படுத்திக் கிடைக்கும் கணம்,

$$B_4 = \left\{ \frac{Y_1}{\| Y_1 \|}, \frac{Y_2}{\| Y_2 \|} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} (2, -1, 0, +1), \frac{1}{3\sqrt{2}} (2, 1, 2, -3) \right\}$$

என்பது S-ல் ஓர் அலகு செங்குத்துத்தளமாகும்.

மாதிரி **5** : யூக்ளிட் வெக்டர் வெளி $V_4(R)$-ல் $B_1 \{1, 0, -1, 2)$ $(-1, 1, 1, 0)\}$ என்ற கணம், S எனும் உள்ளடங்கு வெளியை உருவாக்குகிறது. $S^{\perp} = \{ (\alpha - 2\beta, -2\beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in R\}$ என நிறுவுக. $S^{\perp}$-ல் அலகு செங்குத்துத்தளம் ஒன்றை அமைக்கவும்.

நிரூபணம் :

$S^{\perp}$-ல் X என்பது எந்த ஓர் உறுப்பாகவும் இருக்கட்டும். $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ என்க. $X \in S^{\perp}$ ஆதலால், $\forall \ Y \in S, X \perp Y$ ஆகும்.

$$\therefore \quad X \perp (1, 0, -1, 2), \quad X \perp (-1, 1, 1, 0)$$

$$\therefore \quad x_1 - x_3 + 2x_4 = 0. \quad (\text{அ-து}) \ x_1 = x_3 - 2x_4 \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

(1) லிருந்து x_1-ன் மதிப்பை (2)-ல் பிரதியிட, $x_2 = -2x_4$ எனக் கிடைக்கும்.

$$\therefore \quad X = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3 - 2x_4, -2x_4, x_3, x_4)$$

$$= (\alpha - 2\beta, -2\beta, \alpha, \beta) \quad [\alpha = x_3, \quad \beta = x_4 \text{ எனக் கொள்ளவும்}]$$

$$[\therefore \alpha, \beta \in R]$$

$$\therefore \quad S^{\perp} = \{ (\alpha - 2\beta, -2\beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in R \}$$

$X \in S^{\perp}$ எனின்
$$X = (\alpha - 2\beta, -2\beta, \alpha, \beta)$$
$$= (\alpha, 0, \alpha, 0) + (-2\beta, -2\beta, 0, \beta)$$
$$= \alpha (1, 0, 1, 0) + \beta (-2, -2, 0, 1)$$

$\therefore \quad B_2 = \{ (1, 0, 1, 0), (-2, -2, 0, 1) \}$ என்ற கணம் $S^{\perp}$-ஐ உருவாக்குகிறது. மேலும், கணம் B_2 ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ளதாகும். ஆதலால், B_2 என்ற கணம், $S^{\perp}$-ல் ஒரு

தளமாகும். B_2-லிருந்து, அலகு செங்குத்துத் தளத்தை அமைக்க, கிராம் சுமிதின் செங்குத்தாக்கும் முறையைப் பின்பற்றுவோம். $Y_1 = (1, 0, 1, 0)$ என்க. $X_2 = (-2, -2, 0, 1)$ எனின்,

$$Y_2 = (-2,-2, 0, 1) - \frac{(Y_1, X_2)}{(Y_1, Y_1)} Y_1$$

$$= (-2,-2, 0, 1) - \frac{(-2)}{2} (1, 0, 1, 0) = (-1,-2, 1, 1)$$

$\therefore$ $B_3 = \{ (1, 0, 1, 0), (-1,-2, 1, 1) \}$ என்ற கணம் $S^{\perp}$-ல் ஒரு செங்குத்துத் தளமாகும். B_3-ல் உள்ள வெக்டர்களை அலகு படுத்திக் கிடைக்கும் கணம் $B_4 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{7}} (-1, -2, 1, 1) \right\}$ என்பது $S^{\perp}$-ல் ஓர் அலகு செங்குத்துத் தளமாகும்.

மாதிரி 6: யூக்ளிட் வெக்டர் வெளி E-ல் X, Y என்ற யாதானுமிரு வெக்டர்கள் செங்குத்தாக இருப்பதற்குத் தேவையான, போதுமான விதி $\| X-Y \|^2 = \| X \|^2 + \| Y \|^2$ என நிறுவுக. வடிவக் கணிதத்தில் இதன் விளக்கம் என்ன? ஒன்றூடான வெக்டர் வெளி U-வில் இது உண்மையாகுமா?

நிபந்தனை தேவையானது: $X, Y \in E$, $X \perp Y$ என்று இருக்கட்டும்.

$$\therefore (X, Y) = (Y, X) = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\| X-Y \|^2 = (X-Y, X-Y) = (X, X) - (X, Y) - (Y, X) + (Y, Y)$$
$$= \| X \|^2 + \| Y \|^2 \quad [\,(1) \text{ லிருந்து } (X, Y) = (Y, X) = 0]$$

நிபந்தனை போதுமானது: $\| X-Y \|^2 = \| X \|^2 + \| Y \|^2$ என்க.

(நி-வே) $X \perp Y$

நிரூபணம்:

$(X-Y, X-Y) = (X, X) + (Y, Y)$ என்பது தரவு.

$$\therefore (X, X) - (X, Y) - (Y, X) + (Y, Y) = (X, X) + (Y, Y)$$

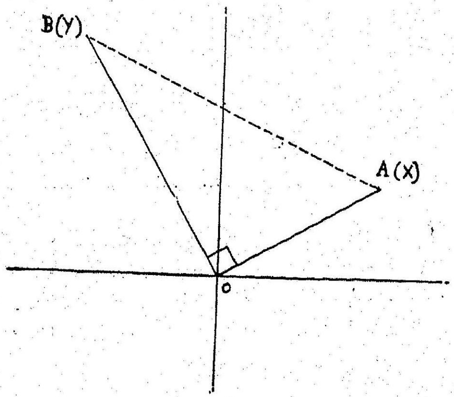
$$\therefore 2 (X, Y) = 0 \quad [\because (X, Y) = (Y, X)]$$

$$\therefore (X, Y) = 0 \quad \therefore X \perp Y$$

வடிவக் கணிதத்தில் விளக்கம்: $V_2(R)$ ல் X, Y என்பவை யாதானுமிரு வெக்டர்களாக இருக்கட்டும். $X \neq Y$, $X \neq 0$, $Y \neq 0$ எனின் இவ்விரு வெக்டர்களும் ஒரு தளத்தில் (in a plane) இரு புள்ளிகளின் இடம் குறிக்கும் வெக்டர்களைக் குறியீடு செய்யும். அப்புள்ளிகளை A, B எனக் கொள்வோம். இத்தளத்தில் இரு செங்குத்து நேர்கோடுகளை அச்சுகளாகவும் (axes) அவை வெட்டும் புள்ளி O-வை ஆதியாகவும் கொண்டால், X, Y என்பவை $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ என்ற வெக்டர்களைக் குறியீடு செய்கின்றது. $X - Y$ எனும் வெக்டர் $\overrightarrow{BA}$-யைக் குறியீடு செய்கின்றது.

$X \perp Y \Longleftrightarrow [\, \| X-Y \|^2 = \| X \|^2 + \| Y \|^2]$ என்ற முடிவு, $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} \Longleftrightarrow [BA^2 = OA^2 + OB^2]$ என்பதைக் கொடுக்கிறது.

இதுவே பித்தகோரஸ் தேற்றமாகும்.



படம் 27

ஒன்றுடான வெளி U-வில், $X, Y \in U$, $X \perp Y$ எனின், $(X, Y) = 0$

$$\therefore (Y, X) = \overline{(X, Y)} = \bar{0} = 0$$

$$\therefore \| X-Y \|^2 = (X-Y, X-Y) = (X, X) - (X, Y) - (Y, X) + (Y, Y)$$

$$= \| X \|^2 + 0 + 0 + \| Y \|^2$$

$$\therefore \| X-Y \|^2 = \| X \|^2 + \| Y \|^2 \text{ ஆகும்.}$$

ஆதலால், நிபந்தனை தேவையானது.

$X, Y \in U$, $\| X-Y \|^2 = \| X \|^2 + \| Y \|^2$ என்று இருப்பதாகக் கொள்வோம்.

$$\therefore (X-Y, X-Y) = (X, X) + (Y, Y)$$

(அ-து) $(X, X) - (X, Y) - (Y, X) + (Y, Y) = (X, X) + (Y, Y)$

$\therefore \ (X, Y) + \overline{(X, Y)} = 0$

இதிலிருந்து $(X, Y) = 0$ என்று முடிவு செய்யமுடியாது.

ஏனெனில், (X, Y) என்பது பூச்சியமல்லாத முழுக்கற்பனை எண்ணானால் (purely imaginary number) $(X, Y) + \overline{(X, Y)} = 0$ ஆக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $V_2(C)$ ல் $X = (1, 2)$, $Y = (i, -4i)$ எனின் $X - Y = (1-i, 2+4i)$ ஆகும்.

$$\therefore \ \| X-Y \|^2 = |1-i|^2 + |2+4i|^2 = 2+4+16 = 22$$
$$\| X \|^2 + \| Y \|^2 = 5+17 = 22$$
$$\therefore \ \| X-Y \|^2 = \| X \|^2 + \| Y \|^2 \text{ ஆகும்.}$$

ஆனால், $(X, Y) = [1 \cdot \bar{i} + 2\,\overline{(-4i)}] = -i + 8i = 7i \neq 0$

$\therefore$ X என்பது Y-க்குச் செங்குத்தல்ல.

ஆதலால், நிபந்தனை போதுமானதல்ல.

மாதிரி **7:** ஒன்றூடான வெக்டர் வெளி U-வில், X, Y என்ற யாதானுமிரு வெக்டர்கள் செங்குத்தாக இருப்பதற்குத் தேவையான, போதுமான விதி, $\forall \alpha, \beta \in C$, $\| \alpha X + \beta Y \|^2 = \| \alpha X \|^2 + \| \beta Y \|^2$ என்று இருக்க வேண்டும் என்பதாகும்.

நிருபணம்:

$X, Y \in U$, $X \perp Y$ என்க,

$\therefore \ (X, Y) = 0, \ (Y, X) = \overline{(X, Y)} = 0$ ....(1)

$$\forall \alpha, \beta \in C, \ \| \alpha X + \beta Y \|^2 = (\alpha X + \beta Y, \alpha X + \beta Y)$$
$$= (\alpha X, \alpha X) + (\alpha X, \beta Y) + (\beta Y, \alpha X) + (\beta Y, \beta Y)$$
$$= (\alpha X, \alpha X) + \alpha \bar{\beta}(X, Y) + \beta \bar{\alpha}(Y, X) + (\beta Y, \beta Y)$$
$$= \| \alpha X \|^2 + \| \beta Y \|^2 \ [(1) \text{ லிருந்து } (X, Y) = (Y, X) = 0]$$

நிபந்தனை போதுமானது: $X, Y \in U$, $\forall \alpha, \beta \in C$, $\| \alpha X + \beta Y \|^2 = \| \alpha X \|^2 + \| \beta Y \|^2$ என்பது தரவு.

(நி-வே) $X \perp Y$.

நிருபணம்:

தரவின்படி, $(\alpha X, \alpha X) + \alpha \bar{\beta}(X, Y) + \beta \bar{\alpha}(Y, X) + (\beta Y, \beta Y)$
$= (\alpha X, \alpha X) + (\beta Y, \beta Y)$

$\therefore \ \alpha \bar{\beta}(X, Y) + \beta \bar{\alpha}(Y, X) = 0$ .... (2)

$\forall\ \alpha, \beta \in C$ (2) உண்மையாகும்.

$\alpha = i,\ \beta = 1$ எனக் கொள்வோம். $i\,(X, Y) - i\,(Y, X) = 0$

$$\therefore\ (X, Y) - (Y, X) = 0 \ldots\ldots (3)$$

$\alpha = 1,\ \beta = 1$ எனக் கொள்வோம். $(X, Y) + (Y, X) = 0 \ldots\ldots (4)$

(3) ஐயும் (4) ஐயும் கூட்ட, $2\,(X, Y) = 0\ \ \therefore (X, Y) = 0$

$$\therefore X \perp Y.$$

மாதிரி 8 : ஒன்றூடான வெக்டர் வெளி U-வில் X, Y என்பவை யாதானுமிரு வெக்டர்களாயின் $4\,(X, Y) = \| X + Y \|^2 - \| X - Y \|^2 + i\,\| X + iY \|^2 - i\,\| X - iY \|^2$

நிரூபணம் :

$$\| X + Y \|^2 - \| X - Y \|^2 + i\,\| X + iY \|^2 - i\,\| X - iY \|^2$$

$$= (X+Y, X+Y) - (X-Y, X-Y) + i\,(X + iY, X + iY) - i\,(X - iY, X - iY)$$

$$= (X, X) + (X, Y) + (Y, X) + (Y, Y) - (X, X) - (X, -Y) - (-Y, X) - (-Y, -Y) + i\,[(X, iY) + (X, X) + (iY, X) + (iY, iY)]$$
$$- i\,[(X, X) + (X, -iY) + (-iY, X) + (-iY, -iY)]$$

$$= (X, X) + (X, Y) + (Y, X) + (Y, Y) - (X, X) + (X, Y) + (Y, X) - (Y, Y)$$
$$+ i\,[-i\,(X, Y) + (X, X) + i\,(Y, X) + i\,(-i)\,(Y, Y)]$$
$$- i\,[(X, X) + i\,(X, Y) - i\,(Y, X) + i\,(-i)\,(Y, Y)]$$

$$= 2\,(X, Y) + 2\,(Y, X) + 2\,(X, Y) - 2\,(Y, X)$$

$$= 4\,(X, Y).$$

மாதிரி 9 : $V_3(R)$-ல் S என்ற உள்ளடங்கு வெளி $(1, 2, 1)$ என்ற வெக்டரால் உருவாக்கப்படுகிறதெனின் $(0, 0, 2)$ என்ற வெக்டரின் S-ன் மீதமையும் செங்குத்து வீழல் (orthogonal projection) யாது ?

நிரூபணம் :

$$Z = (0, 0, 2) \in V_3(R),\ (0, 0, 2) \notin S$$

$\therefore\ Z = X + Y\ \ [X \in S.\ Y \in S^{\perp}]$ என்று எழுதலாம். இதில் X என்பது Z என்ற வெக்டரின் S-ன் மீதமையும் செங்குத்து வீழலாகும். [தேற்றம் 9·28, குறிப்பு 2]

$X \in S$ ஆதலால், $X = \lambda\,(1, 2, 1)$ ஆகும். $(\lambda \in R) \ldots\ldots (1)$

$Y = (y_1, y_2, y_3)$ என்று கொள்வோம். $Y \in S^{\perp}$ ஆதலால், $Y \perp (1, 2, 1)$

$$\therefore \; y_1 + 2y_2 + y_3 = 0 \qquad \text{............(2)}$$

$$Z = X + Y \Longrightarrow (0, 0, 2) = \lambda (1, 2, 1) + (y_1, y_2, y_3)$$
$$= (\lambda + y_1, 2\lambda + y_2, \lambda + y_3)$$

$$\therefore \; \lambda + y_1 = 0, \quad 2\lambda + y_2 = 0, \quad \lambda + y_3 = 2$$

λ-ன் மதிப்பை y_1, y_2, y_3 ஆகியவற்றின் வழிகண்டு, (2)-ல் பிரதியிட, $\lambda = \frac{1}{3}$ எனக் கிடைக்கும். $\therefore X = \frac{1}{3}(1, 2, 1)$ ஆகும்.

$\therefore$ $(0, 0, 2)$ என்ற வெக்டரின் S-ன் மீதமையும் செங்குத்துவீழல் $\frac{1}{3}(1, 2, 1)$ ஆகும்.

மாற்று வழி : (Aliter) $X_1 = (1, 2, 1)$, $X_2 = (0, 0, 2)$ எனக் கொள்வோம். $X_2 \notin S$ ஆதலால், $\{X_1, X_2\}$ என்பது ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ளது. இதிலிருந்து $\{Y_1, Y_2\}$ என்ற செங்குத்துக் கணத்தை கிராம் சுமிதின் செங்குத்தாக்கும் முறைப்படி அமைப்போம்.

$$Y_1 = X_1 = (1, 2, 1) \quad Y_2 = X_2 - \frac{(Y_1, X_2)}{(Y_1, Y_1)} Y_1$$
$$= (0, 0, 2) - \frac{2}{6}(1, 2, 1)$$
$$(0, 0, 2) = Y_2 + \tfrac{1}{3}(1, 2, 1)$$

மேற்கூறிய வகையிலமைந்த Y_2, Y_1-க்குச் செங்குத்து ஆதலால், $Y_2 \perp X_1$ ஆகும்.

$\therefore \; \forall Z \in S, \; Y_2 \perp Z$ ஆகும். [$\because X_1$ என்பது S-ஐ உருவாக்குகிறது]

$\therefore \; Y_2 \in S^{\perp}$.

$\therefore \; (0, 0, 2) = Y_2 + \frac{1}{3}(1, 2, 1)$ [$Y_2 \in S^{\perp}$, $\frac{1}{3}(1, 2, 1) \in S$]

$\therefore$ $\frac{1}{3}(1, 2, 1)$ என்ற வெக்டர் $(0, 0, 2)$ என்ற வெக்டரின் S-ன் மீதமையும் செங்குத்து வீழலாகும்.

பயிற்சி 10

1. (i) $V_4(R)$ ல் $X = (1, 2, -3, -4)$, $Y = (2, -7, 0, 1)$ என்பவை இரு வெக்டர்களெனின் (X, Y), $\|X\|$, $\|Y\|$,

$\| X+Y \|$, $\| X-Y \|$ ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக. இதனைக் கொண்டு சுவார்ச்சு சமனிலியையும், முக்கோண சமனிலியையும் சரி பார்க்கவும்.

(ii) $V_4(C)$ ல் $X=(1, i, -i, -1)$, $Y=(i, 2, -4i, 0)$ என்பவை இரு வெக்டர்களெனின் (X, Y), $\| X \|$, $\| Y \|$, $\| X+Y \|$, $\| X-Y \|$ ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக. $\| X-Y \|^2 + \| X+Y \|^2 = 2 \; (\| X \|^2 + \| Y \|^2)$ எனும் சமன்பாடு உண்மையாகுமா?

2. யூக்ளிட் வெக்டர் வெளியில் X, Y என்பவை யாதானுமொரு உறுப்புகளாயின், $| \, \| X \| - \| Y \| \, | \leqslant \| X-Y \|$ என நிறுவுக.

3. ஒன்றூடான வெக்டர் வெளி U-வில் $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ என்ற k வெக்டர்களைக் கொண்ட எந்த ஒரு செங்குத்து வெக்டர் கணத்தை எடுத்துக் கொண்டாலும்,

$$\| \sum_{r=1}^{k} X_r \|^2 = \sum_{r=1}^{k} \| X_r \|^2$$

என நிறுவுக. $V_2(R)$ ல் மேற்கூறிய முடிவை நிறுவி, அதற்குரிய வடிவக்கணித விளக்கத்தினையும் கூறுக.

4. யூக்ளிட் வெக்டர் வெளியில் X, Y என்பவை யாதானுமிரு வெக்டர்களாயின், $\| \lambda X+Y \|^2 (\lambda \in R)$ என்பதை λ-வில் ஓர் இருபடிக் கோவையாகக் கருதி, $| (X, Y) | \leqslant \| X \| . \| Y \|$ என்ற சுவார்ச்சு சமனிலியை நிறுவுக.

5. $V_3(R)$ ல் கொடுக்கப்பட்ட, ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ள இரு வெக்டர்களுக்குச் செங்குத்தாக இரண்டே இரண்டு அலகு வெக்டர்கள்தான் இருக்கமுடியுமென நிறுவுக.

6. $V_3(R)$ ல் பின்வரும் கணங்கள் செங்குத்து வெக்டர் கணங்களா என ஆராயவும்.

(i) $B_1 = \{(1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, -7)\}$

(ii) $B_2 = \{(1, -1, 2), (2, 0, -1), (1, 5, 2)\}$

(iii) $B_3 = \{(1, 4, 3), (4, -1, 0), (-3, 7, 8), (3, 2, -1)\}$

(iv) $B_4 = (2, -7, 0), (-7, -2, 3), (-1, 0, 1), (0, 4, 3)\}$

7. யூக்ளிட் வெக்டர் வெளி $V_3(R)$ ல் கொடுக்கப்பட்ட விகிதமுறு கூறுகளைக் கொண்ட (rational coordinates) இரு வெக்டர்களுக்குச் செங்குத்தாக, விகிதமுறு கூறுகளைக் கொண்ட வெக்டர் ஒன்றுண்டு என நிறுவுக.

8. யூக்ளிட் வெக்டர் வெளி $V_4(R)$ ல் பின்வரும் கணங்களால் உருவாக்கப்படும் உள்ளடங்கு வெளிகளில், அலகு செங்குத்துத்தளங்களை அமைக்கவும்.

(i) $B_1 = \{(1,0,-1,0), (0,1,4,7), (0,0,-3,-1), (2,3,0,-4)\}$

(ii) $B_2 = \{(0,2,-3,0), (4,0,1,0), (3,-1,0,-1), (0,-5,6,0)\}$

(iii) $B_3 = \{(1,1,0,0), (0,1,2,0), (0,0,3,4)\}$

(iv) $B_4 = \{(2,0,0,0), (1,3,3,0), (0,4,6,1)\}$

9. யூக்ளிட் வெக்டர் வெளி $V_4(R)$ ல் பின்வரும் கணங்களால் உருவாக்கப்படும் உள்ளடங்கு வெளிகளின் செங்குத்து நிரப்பிகளைக் கண்டு, அவைகளில் அலகு செங்குத்துத் தளங்களை அமைக்கவும்.

(i) $B_1 = \{(0,-1,2,0), (-1,-1,0,1)\}$

(ii) $B_2 = \{(4,3,-1,0)$

(iii) $B_3 = \{(3,-1,0,-1), (0,2,1,0), (4,0,-1,0)\}$

(iv) $B_4 = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0)\}$

10. யூக்ளிட் வெக்டர் வெளி $V_3(R)$ ல் பின்வரும் கணங்களால் உருவாக்கப்படும் உள்ளடங்கு வெளிகளின் செங்குத்து நிரப்பிகளைக் கண்டு, அவைகளில் அலகு செங்குத்துத் தளங்களை அமைக்கவும்.

(i) $B_1 = \{(2,-1,-2)\}$

(ii) $B_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid 3x_1 + x_2 - x_3 = 0$
$x_1 - 5x_2 + x_3 = 0$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \in R\}$

11. யூக்ளிட் வெக்டர் வெளி $V_3(R)$ ல் பின்வரும் வெக்டர்களின் கொடுக்கப்பட்ட உள்ளடங்கு வெளிகளின் மீதமையும் செங்குத்து வீழலைக் காண்க.

(i) $(2,1,-4)$ என்ற வெக்டர் : $\{1, 0, -1\}$ என்ற கணத்தால் உருவாக்கப் படும் உள்ளடங்கு வெளி

(ii) $(3, -1, 0)$: $\{(2, -1, -2)\}$,,

(iii) $(0, 1, 0)$: $\{(1, -4, 7)\}$,,

(iv) $(1, 0, 1)$: $\{(2, 1, 3)\}$,,

மேற்கூறியவற்றிற்கு வடிவக் கணித விளக்கம் கூறுக.

12. யூக்ளிட் வெக்டர் வெளி $V_4(R)$ ல் கணக்கு 9-ல் கொடுக்கப்பட்ட உள்ளடங்கு வெளிகளின் மீது $(0, 0, -1, -4)$ என்ற வெக்டரின் செங்குத்து வீழல்களைக் காண்க.

13. $P_n(c)$ [1.3 எ-கா. 6] என்ற சிக்கலெண் களத்தின் மீதமைந்த அருபவெக்டர் வெளியில் உட்பெருக்கல் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது. $\forall\ f_1(x), f_2(x) \in P_n(c)$

$$(f_1, f_2) = \int_0^1 f_1(x)\ \overline{f_2(x)}\, dx.$$

இந்த ஒன்றூடான வெளியில் ஓர் அலகு செங்குத்துத்தளத்தை அமைக்கவும்.

14. செங்குத்துத்தன்மை ஓரினச்சார்பால் பாதுகாக்கப் படுமா ? நும் விடையை விமர்சிக்கவும்.

15. செங்குத்து நிரப்பிகளின் வடிவக்கணித விளக்கத் தினைக் கூறுக. ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ள கணத்திலிருந்து அலகு செங்குத்துத்தளத்தை அமைப்பதை வடிவக்கணித முறையில் விளக்கிக் கூறுக.

16. ஒன்றூடான வெக்டர் வெளியில் X, Y என்ற இரு வெக்டர்கள் $|(X, Y)| = \|X\| \cdot \|Y\|$ என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்தால், அவ்விரு வெக்டர்களும் ஒருபடிச்சார்ந்த நிலையிலிருக்கும் என நிறுவுக. இதன் மறுதலை உண்மையா? விடையை விமர்சிக்கவும்.

17. முடிவுள்ள பரிமாணம் கொண்ட, வெளிப்படை யல்லாத யூக்ளிட் வெக்டர் வெளி E-ல், M, N என்பவை யாதானுமிரு உள்ளடங்கு வெளிகளெனின் $(M+N)^{\perp} = M^{\perp} \cap N^{\perp}$, $(M \cap N)^{\perp} = M^{\perp} + N^{\perp}$ என நிறுவுக.

18. யூக்ளிட் வெக்டர் வெளி $V_3(R)$-ல்

(i) $X = (-1, 2, -3)$, $Y \in V_3(R)$, $(X, Y) = 9$ எனின் Y யைக் காண்க. Y தனித்தன்மை (unique) வாய்ந்ததா?

(ii) $X = (3, 4, -1)$ $Y \in V_3(R)$ $(X, Y) = 0$ எனின் Y யைக் காண்க. Y தனித்தன்மை வாய்ந்ததா?

19. யூக்ளிட் வெக்டர் வெளியில் $\{X, Y\}$ என்ற கணம் அலகு செங்குத்துக் கணமானால் $\| X-Y \|$ யைக் காண்க.

20. ஒன்றூடான வெக்டர் வெளி U-ல், A, B என்பவை யாதானுமிரு உள்ளடங்கு வெளிகளாகும். $A^\perp$, $B^\perp$ என்பவை முறையே U-ல் A, B-ன் செங்குத்து நிரப்பிகளாகும். எனின்

(i) $A \subset B \Longrightarrow B^\perp \subset A^\perp$

(ii) $A \subset B^\perp \Longrightarrow B \subset A^\perp$ என நிறுவுக.

21. ஒன்றூடான வெக்டர் வெளி $V_n(C)$-ல் S என்பது யாதானுமொரு உள்ளடங்கு வெளியாகும். X என்பது $V_n(C)$-ல் யாதானுமொரு வெக்டராகுமெனின், $X = Y + Z$, $Y \in S$, $(Y, Z) = 0$ என எழுதலாம் என்று நிறுவுக. Y, Z என்பவை தனித்தன்மை வாய்ந்தவையா? [தேற்றம் 9·27 ஐப் பார்க்கவும்]

22. யூக்ளிட் வெக்டர் வெளி $V_n(R)$-ல் $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்ற கணம் ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ளதாகும். இக்கணத்திலிருந்து. கிராம் சுமிதின் செங்குத்தாக்கும் முறையைப் பின்பற்றி அமைக்கப்பட்ட கணம் $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ ஆகும். $\{X_1, X_2, \ldots, X_r\}$ என்ற r வெக்டர்களைக் கொண்ட $(r < n)$ கணம் செங்குத்து வெக்டர் கணமானால் $X_i = Y_i \; [1 \leqslant i \leqslant r]$ என நிறுவுக.

பகுதி III

அணிகள்

(Matrices)

$[a, b, c]$ என்ற ஒரு நிரை வெக்டரையும் $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ என்ற ஒரு நிரல் வெக்டரையும் எடுத்துக்கொள்வோம். இவற்றின் ஒத்த உறுப்புகளின் பெருக்கற் பலன்களின் கூடுதலானது $ax+by+cz$ என்ற ஓர், ஒருபடி அமைப்பாகும். இதை இவ்விரு வெக்டர்களின் உட்பெருக்கல் என அழைப்போமென முன்பே பார்த்துள்ளோம். அணிகளைப்பற்றிய பின்வரும் பக்கங்களில், இரு வெக்டர்களின் உட்பெருக்கலை காண விழையும்போது நிரை வெக்டரை முதலிலும், நிரல் வெக்டரை அதன் வலப்புறமாகவும் எழுதி ஒத்த உறுப்புகளைப் பெருக்குவோம்.

$X=a_1 x+b_1 y+c_1 z$

$Y=a_2 x+b_2 y+c_2 z$

$Z=a_3 x+b_3 y+c_3 z$ என்பவை x, y, z ல் உள்ள மூன்று ஒருபடிச் சமன்பாடுகளாகட்டும். இவற்றை நாம் முன்கூறிய உட்பெருக்கல் விதியின்படி,

$$X = [a_1\ b_1\ c_1] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix};\quad Y = [a_2\ b_2\ c_2] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix};$$

$$Z = [a_3\ b_3\ c_3] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

என்று எழுதலாம். மேலும், இம்மூன்று சமன்பாடுகளையும் ஒரே அமைப்பாக,

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$ என்று எழுதுவது

நடைமுறை வழக்கமாகும். இச்சமன்பாட்டில் வலப்புறத்தி

லுள்ள, a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2, 3)$ க்களின் செவ்வக அடுக்கு (Rectangular array)

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$ ஓர் அணி (Matrix) எனப்படும்.

§ **1·1.** வரையறை :

எண்களின் அல்லது எண்ணிகளின் (Scalars) ஒரு செவ்வக அடுக்கானது அணி (Matrix) எனப்படும். இத்தகைய ஒரு செவ்வக அடுக்கை ‖ ‖, ( ), [ ] போன்ற அடைப்புக் குறிகளினுள் எழுதுவது மரபாகும். இப்பகுதியில் நாம் [ ] என்ற அடைப்புக் குறியையே, அணிகளைக் குறிப்பதற்கு உபயோகப் படுத்துவோம்.

இவ்வடுக்கினுள் உள்ள எண்ணிகளை மூலகங்கள் அல்லது அணியின் உறுப்புகள் (elements) என அழைப்போம்.

$\longrightarrow$ நிரை

↓ நிரல்

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix}$$ என்பது ஓர்

அணியாகும். இங்கு a_{ij} க்கள் அணியின் உறுப்புகளாகும்.

இவ்வணியில், மேலிருந்து கீழாக உள்ள வரிசைகளை நிரல்கள் (Columns) எனவும், இடமிருந்து வலமாக உள்ள வரிசைகளை நிரைகள் (Rows) எனவும் அழைப்பது மரபு.

ஓர் அணியில் m நிரைகளும், n நிரல்களும் உளதாயின் அவ்வணியின் அணித்தரம் (order or type) $m \times n$ (m by n என வாசிக்கவும்) எனப்படும். ஓர் அணி A–ன் i^{th} நிரை j^{th} நிரலில் உள்ள உறுப்பை a_{ij} எனக் குறிப்போம். பொதுவாக அணிகளை $A, B, C\ldots$ என்ற பெரிய எழுத்துக்களாலும், இவற்றிலுள்ள உறுப்புகளை $a_{ij}, b_{ij}, \ldots$ என்ற, ஒத்த சிறிய எழுத்துக்களாலும் குறிப்போம். சில நேரங்களில் ஓர் அணியை அதன் யாதானுமொரு பொது உறுப்பின் வழியாக எழுதுவது அனுகூல மாக இருக்கும். இம்முறையின்படி மேலே தரப்பட்டுள்ள அணி A ஆனது

$A = [a_{ij}]_{m, n}$ என்றும், அணித்தரத்தைப் பற்றிய குழப்பமில்லாதபோது, வெறுமனே $A = [a_{ij}]$ என்றும் குறிக்கப் படும்.

ஓர் அணியின் ஒவ்வொரு உறுப்பிற்கும் ஒரு குறிப்பிட்ட இடமுண்டு. உறுப்புகள் இடமாறுமெனின் அணிகள் மாறுபடும். எடுத்துக்காட்டாக, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3}$, $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ என்பவை வெவ்வேறு அணிகள் என்பதை இங்கு கவனிக்கவும்.

மேலும் அணிகளுக்கும், அணிக்கோவைகளுக்குமுள்ள (Determinants) வேறுபாட்டை, மாணவர்கள் நன்கு கவனிக்க வேண்டும். அணிக்கோவைகளுக்கு மதிப்பு (value) உண்டு. ஆனால், அணிகள் செயலிகள் (operators) தானேயொழிய, இவற்றின் மதிப்பைப் பற்றிய பேச்சு பொருளற்றதாகும்.

§ 1·2. ஒரு களத்தின் மீதமைந்த அணி (Matrix over a Field)

ஓர் அணி A-ன் எல்லா உறுப்புகளும் ஒரே களம் F ஐச் சார்ந்ததெனின், A ஆனது களம் F-ன் மீதமைந்துள்ளது எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, $A = \begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 3+2i & -i \end{bmatrix}$ என்பது சிக்கலெண் களம் C-ன் மீதமைந்த ஓர் அணியாகும்.

குறிப்பாக மெய்யெண்களம் R-ன் மீதமைந்த அணியை மெய்யணி (real matrix) எனவும் சிக்கலெண்களம் C-ன் மீதமைந்த அணியை சிக்கலணி (complex matrix) எனவும் அழைப்பது நடைமுறை வழக்கமாகும்.

களத்தைப்பற்றி ஒன்றும் கூறுத இடங்களில், அணிகள் யாதானுமொரு களத்தில் (arbitrary field) அமைந்துள்ளவை களாக, இடத்திற்குத் தக்கவாறு கொள்ளுதல் வேண்டும்.

மேலும் $m \times 1$ அல்லது $1 \times n$ தரமுடைய அணிகளே வெக்டர்களாகும். எனவே, வெக்டர்களானது அணிகளின் ஒரு கிளைப்பகுதியேயாகும்.

§ 1·3. சம அணிகள் : (Equal Matrices)

சம அணித்தரங்கொண்ட இரு அணிகளில், ஒன்றின் உறுப்புகள், மற்றதின் ஒத்த உறுப்புகளுக்குச் சமமாக

இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே அவை சமமெனப்படும். வேறு வகையில் கூறுமிடத்து, $A = [a_{ij}]_{m,n}$; $B = [b_{ij}]_{m,n}$ என்ற இரு அணிகளில், i, j-க்களின் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $a_{ij} = b_{ij}$ என்றால், என்றால் மட்டுமே $A = B$ ஆகும்.

அணிகளின் சமத்தன்மையிலிருந்து, பின்வரும் நான்கு பண்புகள் தெளிவாகும்.

1. தீர்மானிக்கும் பண்பு (Determinative Property)

A, B என்பவை யாதானுமிரு அணிகளெனின், ஒன்றில் $A = B$ அல்லது $A \neq B$ ஆகும்.

2. பிரதிபலிக்கும் தன்மை (Reflexive Property)

A யாதானுமொரு அணி எனின் $A = A$ ஆகும்.

3. சமச்சீர் தன்மை (Symmetric Property)

$A = B$ என்றால், $B = A$ ஆகும்.

4. கடத்தும் தன்மை (Transitive Property)

$A = B$, $B = C$ என்றால் $A = C$ ஆகும்.

(2), (3), (4) பண்புகளிலிருந்து, அணிகளின் சமத்தன்மையானது ஒரு சரிநிகர் தொடர்பு (Equivalence Relation) என அறிகிறோம்.

§ 1·4. பூச்சிய அணி (Zero Matrix)

ஒரு $m \times n$ அணியில் ஒவ்வொரு உறுப்பும் பூச்சியம் (zero) என்றால் (இங்கு பூச்சியம் என்பது அணி அமைந்துள்ள களத்திலுள்ள பூச்சிய உறுப்பு 0 ஆகும்) அவ்வணியானது $m \times n$ தர பூச்சிய அணி எனப்படும். இதனை $0_{m,n}$ என்று குறிப்போம். அணித்தரத்தைப் பற்றிய குழப்பமில்லாத போது, இது வெறுமனே 0 என்றே குறிக்கப்படும். இங்கு 0 அணியை, களத்திலுள்ள பூச்சிய உறுப்பு 0 வோடு சேர்த்துக் குழப்பாதிருக்குமாறு கவனிக்கவும்.

§ 1·5. சதுர அணி (Square Matrix)

ஓர் அணியின் தரம் $n \times n$ என்றால் [(அ-து) நிரை, நிரல்களின் எண்ணிக்கை சமமென்றால்] அது n அணித்தரமுடைய சதுர அணி அல்லது சுருக்கமாக n–சதுர அணி எனப்படும்.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \\ 2 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$ ஆனது R-ன் மீதமைந்த ஒரு 3-சதுர அணியாகும்.

§ 1·6. மேல், கீழ் முக்கோண அணிகள் (Upper and Lower Triangular Matrices)

ஒரு சதுர அணி $A = [a_{ij}]$-ல் மூலைவரைக்குக் கீழுள்ள எல்லா உறுப்புகளும் பூச்சியமெனின் [(அ-து) $i > j$ என்றால் $a_{ij} = 0$] அது ஒரு மேல் முக்கோண அணி எனவும்,

மூலை வரைக்குமேலுள்ள எல்லா உறுப்புகளும் பூச்சியமென்றால் [(அ-து) $i < j$ என்றால் $a_{ij} = 0$] அது ஒரு கீழ் முக்கோண அணி எனவும் அழைக்கப்படும்.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & - & - & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & - & - & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & - & - & a_{3n} \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & - & - & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & - & - & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & - & - & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & - & - & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & - & - & a_{nn} \end{bmatrix}$$

என்பவை முறையே மேல், கீழ் முக்கோண அணிகளுக்கு எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

§ 1·7. மூலை வரை அணி :

ஒரு சதுர அணி $A = [a_{ij}]$-ல் மூலை வரை உறுப்புகள் தவிர மற்றெல்லா உறுப்புகளும் பூச்சியமென்றால், அது ஒரு மூலை வரை அணி எனப்படும். [(அ-து) $i \neq j$ என்றால் $a_{ij} = 0$ ஆகும்]

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & - & - & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & - & - & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & - & - & 0 \\ - & - & - & - & - & 0 \\ - & - & - & - & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & - & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ஒரு மூலை வரை அணியாகும்.

இதனையே $A =$ மூலைவரை $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ என்று குறிப்போம். எல்லா மூலை வரை அணிகளும், மேல், கீழ் முக்கோண அணிகளாகும்.

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ஒரு சதுர அணி என்றால் $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ என்பவை A-ன் மூலைவரை உறுப்புகள் (diagonal elements) எனப்படும்.

§ 1·8. சம மூலை வரை அணி (Scalar Matrix)

ஒரு மூலைவரை அணியில், மூலைவரையிலுள்ள எல்லா உறுப்புகளும் சமமென்றால், அது ஒரு சமமூலை வரை அணி எனப்படும்.

§ 1·9. அணி அலகு (Identity Matrix)

ஒரு சமமூலைவரை அணியில் மூலைவரையிலுள்ள எல்லா உறுப்புகளும் 1 என்றால் (இங்கு 1 என்பது அணி அமைந்துள்ள களத்திலுள்ள பெருக்கல் அலகாகும்) அவ்வணியானது அலகு அணி அல்லது அணி அலகு எனப்படும். அதன் அணித்தரம் $n \times n$ என்றால் அதனை I_n என்று குறிப்போம்.

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_1 = [1]$$ ஆகும். இங்கும் அணித் தரத்தைப்பற்றிய குழப்பமில்லாதபோது, அணிஅலகை I என்றே குறிப்போம்.

இதுவரை நாம், சில அணிவகைகளைப் பார்த்தோம். பின்வரும் பகுதியில், அணிகளில் சில செயல்களை வரையறுப் போம்.

§ 1·10. அணிகளின் கூட்டல் (Addition of Matrices)

$A=[a_{ij}]_{m,n}$, $B=[b_{ij}]_{m,n}$ என்பவை இரு, சம அணித்தரமுடைய அணிகளென்போம். இவற்றின் ஒத்த உறுப்புகளின் கூடுதலால் கிடைக்கும் $m \times n$ அணி $C=[c_{ij}]_{m,n}=[a_{ij}+b_{ij}]_{m,n}$ ஆனது A, B-க்களின் கூடுதலெனப்படும். இதனை $A+B+C$ என்போம். எடுத்துக்காட்டாக, சிக்கலெண் களத்தில்

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 2 & -i \\ 2-3i & 0 & 1-i \end{bmatrix}_{3,2}, \quad B = \begin{bmatrix} 2+i & i & i \\ -2+3i & 1 & -1 \end{bmatrix}_{3,2}$$

என்றால், $$A+B = \begin{bmatrix} 3+i & 2+i & 0 \\ 0 & 1 & -i \end{bmatrix}_{3,2}$$ ஆகும்.

இரு அணிகளின் அணித்தரங்கள் வேறுபடுமெனின் அவற்றின் கூடுதல் வரையறுக்கப்படவில்லை. அதாவது அவற்றைக் கூட்ட முடியாது. எனவே, அணிகளின் கூடுதல் காண, அவை சம அணித்தரமுடையனவாக இருக்கவேண்டும் என அறிகிறோம்.

ஆதலால், சம அணித்தரமுடைய அணிகள் கூடுதலுக்கு இசைவுள்ளன (Conformable for addition) எனப்படும். பின்வரும் பகுதிகளில் அணிகளின் கூடுதலைப் பற்றிக் கூறும்போது, சொல்லாமலேயே, இடத்திற்குத்தக்கவாறு அவை கூடுதலுக்கு இசைவுள்ளனவாகக் கொள்ளவேண்டும்.

§ 1·11. தேற்றம் :

அணிகளின் கூடுதல் பரிமாற்று விதிக்கு (Commutative law) உட்பட்டது.

$A = [a_{ij}]_{m,n}$, $B = [b_{ij}]_{m,n}$ என்போம்.

$$A+B = [a_{ij}+b_{ij}]$$
$$= [b_{ij}+a_{ij}] \quad (\because\ a_{ij}, b_{ij} \text{ என்பன களத்திலுள்ள எண்ணிகள்})$$
$$= B+A$$

§ 1·12. தேற்றம் :

அணிகளின் கூடுதல் சேர்ப்பு (Associative) விதிக்குட்பட்டது.

$A=[a_{ij}]_{m,n}$, $B=[b_{ij}]_{m,n}$, $C=[c_{ij}]_{m,n}$ என்போம். (இங்கு a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}-க்கள் களம் F-ல் உள்ளன எனக் கொள்ளலாம்) அப்படியானல்,

$$A + (B+C) = A+[b_{ij} + c_{ij}] = [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})]$$
$$= [(a_{ij}+b_{ij}) + c_{ij}] \quad (\because\ a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in F)$$
$$= (A+B) + C$$

மேற்கூறிய இரு தேற்றங்களிலிருந்தும், நாம் அணிகளை எந்த வரிசைப்படியும், முறைப்படியும் கூட்டலாமென அறிகிரேம். மேலும், $A+B+C$ என்று எழுதுவதற்கு அடைப்புக் குறி தேவையில்லை என்பதும் தெளிவாகும்.

§ 1·13. தேற்றம் :

கூட்டலுக்கான நீக்கல் விதி (Cancellation Law for Addition)

$A = B$ ஆக இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே $A + C=B + C$ ஆகும்.

$A = [a_{ij}]_{m,n}$, $B = [b_{ij}]_{m,n}$, $C = [c_{ij}]_{m,n}$ என்போம். ($a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in F$)

i, j-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்,

$a_{ij}+c_{ij} = b_{ij}+c_{ij}$ ஆக இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே $A+C = B+C$ ஆகும்.

ஆனால்,

$$a_{ij}+c_{ij} = b_{ij}+c_{ij} \Longrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad (F\text{-ல் உள்ள நீக்கல் விதி})$$
$$\Longrightarrow A = B$$

எனவே,

$$A+C = B+C \Longrightarrow A = B \text{ ஆகும்.}$$

§ 1·14. தேற்றம் : அணிகளைக் கழித்தல் (Subtraction of Matrices)

$A+0 = A$ என்பது அணிகளின் கூடுதலின் வரையறையிலிருந்து தெளிவாகும்.

$A = [a_{ij}]$ என்போம். அப்படியானால், $-A = [-a_{ij}]$ ஆனது A-ன் கூட்டல் எதிர்மறை எனப்படும். (அ-து) A-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பின் குறியையும் மாற்ற $(-A)$ கிடைக்கும். இவ்வாறு $(-A)$ஐ வரையறுப்பதன் மூலம் $A + (-A) = [a_{ij} + (-a_{ij})] = 0$ என்று கிடைக்கும். மேலும், $A + (-A)$ என்பதையே நாம் $A-A$ என்றும் எழுதுவோம். பொதுவாக, $A + (-B)$ ஆனது $A - B$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. இதிலிருந்து $(A-B)$ ஆனது, A-யிலிருந்து B-ன் ஒத்த உறுப்புகளைக் கழிப்பதன்மூலம் கிடைக்குமென அறிகிறோம். எடுத்துக் காட்டாக, மெய்யெண்களத்தில்

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -3 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

ஆகும்.

§ 1·15. தேற்றம் :

$X+A = B$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு $X = B-A$ என்ற ஒற்றைத் தீர்வு (unique solution) உண்டு.

நிருபணம் :

$X+A = B$ என்ற சமன்பாட்டில், $X = B-A$ என்று பிரதியிட,

$$X+A = (B-A)+A = \{B+(-A)\} + A$$
$$= B+\{(-A) + A\} = B+0 = B \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, $X = B - A$ ஆனது மேற்படிச் சமன்பாட்டிற்கு ஒரு தீர்வாகும்.

மேலும், இச்சமன்பாட்டின் மற்ெறொரு தீர்வு Y என்றால் $Y + A = B$ ஆகும்.

$$\therefore \quad X + A = Y + A \implies X = Y$$

எனவே, இத்தீர்வானது ஒற்றைத் தன்மையுடைத்ததாகும் (uniqueness)

§ 1·16. தேற்றம் :

ஒரு களத்திலுள்ள எல்லா $m \times n$ அணிகளின் கணமும் கூட்டல் விதியின்கீழ் ஒரு பரிமாற்றுக் குழுவை அமைக்கும்.

A, B என்பவை களம் F-ன் மீதமைந்த $m \times n$ அணிகள் என்போம். $A + B = C$ ஆனது F-ன் மீதமைந்த ஒரு $m \times n$ அணியாகும். எனவே, கூட்டலின்கீழ் இக்கணம் அடைப்புள்ளது. மேலும், இக்கூட்டலானது சேர்ப்பு பரிமாற்று விதிகளுக்குட்பட்டது என அறிவோம்.

அடுத்து $0_{m,n}$ ஆனது F-ன் மீதமைந்த பூச்சிய அணி எனின்

$A + 0 = 0 + A = A$ ஆகும்.

எனவே, இக்கணத்தின் கூட்டல் அலகு 0 ஆகும்.

$B = -A$ என்று கொள்வோமானால் ($-A$ ஆனது F-ன் மீதமைந்துள்ளது)

$A + B = B + A = 0$ ஆகும்.

எனவே, இக்கணத்தில் கூட்டல் எதிர்மறை உள்ளது.

எனவே, இக்கணம் ஒரு பரிமாற்றுக் குழுவாகும்.

§ 1·17 அணியை எண்ணியால் பெருக்கல் (Multiplication of a Matrix by a Scalar)

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அணி $A = [a_{ij}]$, என்போம். F-ல் λ ஓர் எண்ணியானால், $\lambda A = A \lambda = [\lambda a_{ij}]$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. அதாவது, ஓர் அணி A-யை, λ என்ற எண்ணியால் பெருக்குவதற்கு, அவ்வணியின் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் λ-வால் பெருக்கவேண்டும். வரையறையிலிருந்து,

$\lambda_1, \lambda_2, 1 \in F$ என்றால்,

(i) $\lambda_1 (\lambda_2 A) = (\lambda_1 \lambda_2) A$

(ii) $\lambda_1 (A+B) = \lambda_1 A + \lambda_1 B$

(iii) $(1) A = A$

(iv) $(\lambda_1+\lambda_2) A = \lambda_1 A + \lambda_2 A$ என்பன தெளிவாக விளங்கும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$\begin{aligned} \lambda_1 (A+B) &= \lambda_1 [a_{ij} + b_{ij}] \\ &= [\lambda_1 a_{ij} + \lambda_1 b_{ij}] \\ &= \lambda_1 [a_{ij}] + \lambda_1 [b_{ij}] \\ &= \lambda_1 A + \lambda_1 B \end{aligned}$$ ஆகும்.

மற்றவற்றின் நிரூபணங்கள் மாணவர்களுக்குப் பயிற்சியாக விடப்பட்டுள்ளது.

மேலும், மெய்யெண்களம் R-ல் $A = [a_{ij}]$ ஓர் அணி எனின்

$$A + A = [a_{ij}] + [a_{ij}] = [a_{ij} + a_{ij}] = 2 [a_{ij}] = 2A$$

ஆகும். இவ்வாறு n தடவை கூட்ட (n இயற்கையெண்)

$A + A + \ldots$ (n தடவை) $= nA$ ஆகும்.

அடுத்து இரு அணிகளின் பெருக்கலை எவ்வாறு வரையறுக்கின்றோம் என்று கவனிப்போம்.

$$\left.\begin{aligned} X &= a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ Y &= a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ Z &= a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

என்ற சமன்பாடுகளை

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

என்ற வடிவில் எழுதலாமெனப் பார்த்தோம். மேலும்,

$$\left.\begin{aligned} x &= l_1 u + m_1 v + n_1 w \\ y &= l_2 u + m_2 v + n_2 w \\ z &= l_3 u + m_3 v + n_3 w \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots(3)$$

என்பன x, y, z, விருந்து,

$$(\text{அ-து}) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots(4)$$

u, v, w விற்கான ஓர், ஒருபடிமாற்றமெனின், (1) லிருந்து

$$X = (a_1 l_1 + b_1 l_2 + c_1 l_3) u + (a_1 m_1 + b_1 m_2 + c_1 m_3) v + (a_1 n_1 + b_1 n_2 + c_1 n_3) w$$

$$Y = (a_2 l_1 + b_2 l_2 + c_2 l_3) u + (a_2 m_1 + b_2 m_2 + c_2 m_3) v + (a_2 n_1 + b_2 n_2 + c_2 n_3) w$$

$$Z = (a_3 l_1 + b_3 l_2 + c_3 l_3) u + (a_3 m_1 + b_3 m_2 + c_3 m_3) v + (a_3 n_1 + b_3 n_2 + c_3 n_3) w$$

என்று கிடைக்கும். இதையே சுருக்கமாக, அணிவடிவில்

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 l_1 + b_1 l_2 + c_1 l_3 & a_1 m_1 + b_1 m_2 + c_1 m_3 & a_1 n_1 + b_1 n_2 + c_1 n_3 \\ a_2 l_1 + b_2 l_2 + c_2 l_3 & a_2 m_1 + b_2 m_2 + c_2 m_3 & a_2 n_1 + b_2 n_2 + c_2 n_3 \\ a_3 l_1 + b_3 l_2 + c_3 l_3 & a_3 m_1 + b_3 m_2 + c_3 m_3 & a_3 n_1 + b_3 n_2 + c_3 n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

என்று எழுதலாம். ஆனால் (2), (4) லிருந்து,

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$ என்று

கிடைக்கும். எனவே, இந்த அடிப்படையில் நாம் அணிகளின் பெருக்கலை வரையறுப்போம்.

§ 1·18. அணிகளின் பெருக்கல் :

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ என்பவை இரு அணிகள் என்போம். (இங்கு A-ன் நிரல்களின் **எண்ணிக்கையும்,** B**-ன் நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் சமம் என்பதைக் கவனிக்கவும்)** A-ன் i^{th} நிரை, B-ன் j^{th} நிரல் இவற்றின் உட்பெருக்கலானது ij உறுப்பாக இருக்குமாறு அமைக்கப்படும், அணி C ஆனது முறையே அணிகள் A, B-க்களின் பெருக்கல் எனப்படும். இதனை $A B = C$ என்று குறிப்போம். C-ன் அணித்தரம் $m \times n$ ஆக இருக்கும்.

$C = [c_{ij}]_{m \times p}$ என்று குறிப்போமானால்,

$$C_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$ ஆகும்.

$$\therefore \quad C = AB = \left[\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \right]$$ என்றும் குறிக்கப்படும்.

இங்கு நாம் முக்கியமாக இரு காரியங்களைக் கவனிக்க வேண்டும். ஒன்று AB வரையறுக்கப்பட வேண்டுமானால் A-ன் நிரல்களின் எண்ணிக்கையும், B-ன் நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் சமமாக இருக்கவேண்டும். இவ்வாறு இருக்குமானால், A ஆனது B யோடு பெருக்குவதற்கு இசைவுள்ளது. (A is conformable to B for multiplication) என்போம். அடுத்து AB-ன் நிரைகளின் எண்ணிக்கையானது, A-ன் நிரைகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாகவும், நிரல்களின் எண்ணிக்கையானது, B-ன் நிரல்களின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாகவும் இருக்கும்.

மேலும், AB வரையறுக்கப்பட்டிருக்கும்போது BA வரையறுக்கப்படவேண்டிய கட்டாயமில்லை. அப்படியே AB-யும், BA-யும் வரையறுக்கப்பட்டிருக்கும்போது AB ஆனது BA-க்குச் சமமாக இருக்கத் தேவையில்லை. பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகள் இவற்றை நன்கு விளக்கும்.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 3}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}_{3\times 2} \text{ என்றால்,}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1(1)+0(-2)+(-1)1 & 1(2)+0(1)+(-1)(-3) \\ 2(1)+1(-2)+3(1) & 2(2)+1(1)+3(-3) \\ 3(1)+2(-2)+(-1)1 & 3(2)+2(1)+(-1)(-3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 3 & -4 \\ -2 & 11 \end{bmatrix}_{3\times 2} \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு BA வரையறுக்கப்படவில்லை என்பதை கவனிக்கவும்.

அடுத்து, $A = [2 \;\; 3 \;\; -1]_{1\times 3}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}_{3\times 1}$ என்போம்.

இங்கு $AB = [5]_{1\times 1}$, $BA = \begin{bmatrix} 6 & 9 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 8 & 12 & -4 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ ஆகும்.

$$\therefore \; AB \neq BA$$

எனவே அணிகளின் பெருக்கல், பரிமாற்று விதிக்குட்பட்டதல்ல என அறிகிறோம். பின்வரும் பகுதிகளில் அணிகளின் பெருக்கலைப் பற்றிக் கூறுமிடங்களிலெல்லாம், இடத்திற்குத் தகுந்தவாறு அவை பெருக்கலுக்கு இசைவுள்ளனவாக எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

மேலும், AB என்ற பெருக்கலில் A ஆனது B-யை முன் பெருக்குகிறது (pre multiplies), B ஆனது A ஐ பின்பெருக்குகிறது (post multiplies) என்போம். அடுத்து,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 5 & -5 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 4 \\ -5 & -4 & 5 \end{bmatrix} \text{ என்க.}$$

இங்கு $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$ ஆகும். ஆனால் $A \neq 0,\ B \neq 0$

இதிலிருந்து $AB = 0$ ஆக இருக்கும்போது A-யோ, B-யோ 0 ஆக இருக்கத்தேவையில்லை என அறிகிறோம். இந்நிலையில், A, B-க்கள் பூச்சியக் காரணிகள் (divisors of zero) எனப்படும்.

இறுதியாக,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix} \text{ என்க.}$$

இங்கு $AB = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 1 & -5 & 15 \\ -3 & -5 & 15 \end{bmatrix} = AC$ ஆகும். ஆனால்

$B \neq C$. எனவே $AB = AC$ என்றால் $B = C$ ஆக இருக்கத் தேவையில்லை என அறிகிறோம். இதுபோல் $BA = CA \not\Rightarrow B = C$ என அறியலாம். ஆதலால், அணிப்பெருக்கலில் நீக்கல் விதியானது எப்பொழுதும் உண்மையாக இருப்பதில்லை.

§ 1·19. தேற்றம் :

(i) A ஒரு $m \times n$ அணி என்றால் $I_m A = A I_n = A$ ஆகும்.

(ii) $A =$ மூலைவரை $(\alpha, \alpha, \ldots, \alpha)_{n \times n}$ என்றால் $A = \alpha I_n$ ஆகும்.

இவ்விரு தேற்றங்களின் நிரூபணங்களும் மாணவர்களுக்குப் பயிற்சியாக விடப்பட்டுள்ளது.

§ 1·20. தேற்றம் :

அணிகளின் பெருக்கலானது கூட்டலைச் சார்ந்த பங்கீட்டு விதிக்குட்பட்டது. (Matrix Multiplication is distributive with respect to addition).

நிரூபணம் :

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{n\times p}$, $C = [c_{ij}]_{n\times p}$ என்க.
அப்படியானால், $B + C = [b_{ij}+c_{ij}]$

$$\therefore \quad A(B+C) = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj})\right]_{m\times p}$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}\right]_{m\times p}$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right]_{m\times p} + \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}\right]_{m\times p}$$

$$= AB+AC.$$

இதுபோல், A, B, C-க்கள் முறையே $m\times n$, $m\times n$, $n\times p$ அணித் தரமுடையதென்றால்,

$(A+B)C = AC+BC$ என நிறுவலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$(A+B)(C+D) = AC+AD+BC+BD$ என நிறுவுக.

$(A+B)(C+D) = A(C+D) + B(C+D)$ {பங்கீட்டு விதி}

$= AC+AD+BC+BD$,,

§ 1·21. தேற்றம் :

அணிகளின் பெருக்கலானது சேர்ப்பு விதிக்குட்பட்டது.

(அ-து) $A(BC) = (AB)C$

நிரூபணம் :

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{n\times p}$, $C = [c_{ij}]_{p\times q}$ என்க.

வரையறையின்படி $BC = \left[\sum_{k=1}^{p} b_{tk}c_{kj}\right]_{n\times q}$ $\quad t=1, 2, \ldots, n$; $j=1, 2, \ldots, q$

$$A(BC) = \left[\sum_{t=1}^{n} a_{it}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{tk}c_{kj}\right)\right]_{m\times q} \quad i=1, 2, \ldots, m;\ j=1, 2, \ldots, q$$

இப்பொழுது, $\left[\sum_{t=1}^{n} a_{it}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{tk}c_{kj}\right)\right] = \sum_{t=1}^{n} a_{it}$

$(b_{t1}c_{1j}+b_{t2}c_{2j}+\cdots+b_{tp}c_{pj})$

$$= a_{i1}\,(b_{11}\,c_{1j}+b_{12}\,c_{2j}+\dots+b_{1p}\,c_{pj}) +$$
$$a_{i2}\,(b_{21}\,c_{1j}+b_{22}\,c_{2j}+\dots+b_{2p}\,c_{pj})+\dots+$$
$$a_{in}\,(b_{n1}\,c_{1j}+b_{n2}\,c_{2j}+\dots+b_{np}\,c_{pj})$$
$$= (a_{i1}\,b_{11}+a_{i2}\,b_{21}+\dots+a_{in}\,b_{n1})\,c_{1j} +$$
$$(a_{i1}\,b_{12}+a_{i2}\,b_{22}+\dots+a_{in}\,b_{n2})\,c_{2j} +\dots+$$
$$(a_{i1}\,b_{1p}+a_{i2}\,b_{2p}+\dots+a_{in}\,b_{np})\,c_{pj}$$

$$= \left(\sum_{t=1}^{n} a_{it}\,b_{t1}\right)c_{1j} + \left(\sum_{t=1}^{n} a_{it}\,b_{t2}\right)c_{2j}+\dots+\left(\sum_{t=1}^{n} a_{it}\,b_{tp}\right)c_{pj}$$

$$= \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{t=1}^{n} a_{it}\,b_{tk}\right)c_{kj}$$

$$\therefore\ A\,(B\,C) = \left[\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{t=1}^{n} a_{it}\,b_{tk}\right)c_{kj}\right]_{m\times q} \qquad \dots\dots\dots(1)$$

அடுத்து,

$$A\,B = \left[\sum_{t=1}^{n} a_{it}\,b_{tk}\right]_{m\times p} \qquad \begin{matrix} i=1,2,\dots,m \\ k=1,2,\dots,p \end{matrix}$$

$$(A\,B)\,C = \left[\left(\sum_{t=1}^{n} a_{it}\,b_{tk}\right)\sum_{k=1}^{p} c_{kj}\right]_{m\times q}$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{t=1}^{n} a_{it}\,b_{tk}\right)c_{kj}\right]_{m\times q} \qquad \dots\dots\dots(2)$$

(1), (2) லிருந்து, $A\,(B\,C) = (A\,B)\,C$ ஆகும்.

§ 1·22. கிளை அணிகள் : (Sub Matrices)

ஓர் அணியின் சில நிரைகளையோ அல்லது நிரல்களையோ அல்லது நிரை, நிரல்களையோ நீக்கக் கிடைக்கும் அணியானது, அவ்வணியின் கிளை அணி எனப்படும்.

ஒரு சதுர அணியில் சம எண்ணிக்கை, ஒத்த நிரை நிரல்களை நீக்கிக் கிடைக்கும் அணியானது அவ்வணியின் தலையாய கிளை அணி (principal sub matrix) எனப்படும். மேலும், ஒரு சதுர அணியில் கடைசி சில நிரைகளையும், ஒத்த நிரல்களையும் நீக்கிக் கிடைக்கும் அணியை அதன் முக்கிய கிளை அணி (leading sub matrix) என்போம். தலையாய கிளை அணிகளின் பண்பு,

தரப்பட்டுள்ள அணியின் மூலைவரை உறுப்புகளே இவற்றின் மூலைவரை உறுப்புகளாவும் இருக்கும் என்பதாகும்.

§ 1·23. அணிகளைக் கூறிடல் (Partitioning of Matrices)

சில நேரங்களில், தரப்பட்டுள்ள ஓர் அணியைப் பல, கிளை அணிகளாக் கூறிடுவது அனுகூலமாக இருக்கும். எடுத்துக் காட்டாக,

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & -2 & 5\end{bmatrix} \text{ என்போம். இதனை } A=\begin{bmatrix}R_1\\ R_2\end{bmatrix}$$

என்றோ, அல்லது

$A=[C_1\ C_2\ C_3]$ என்றோ கூறிடலாம். இங்கு $R_1=[1\ 0\ -1]$,

$$R_2=[3\ \ -2\ \ 5],\ C_1=\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}, C_2=\begin{bmatrix}0\\ -2\end{bmatrix}, C_3=\begin{bmatrix}-1\\ 5\end{bmatrix}$$

ஆகும். மேலும், $B_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & -2\end{bmatrix}, B_2=\begin{bmatrix}-1\\ 5\end{bmatrix}$ என்றால்

$A=[B_1\ B_2]$ என்றும், இன்னும் நமது விருப்பப்படி எந்த விதத்திலும் கூறிடலாம். நாம் எந்த விதத்தில் கூறிடுகிறோ மென்பதைப் பொதுவாக துண்டுக் கோடுகளால் (dashed lines) குறிப்பிடுவது வழக்கம். இம்முறைப்படி,

$$A=\left[\begin{array}{cc:c}1 & 0 & -1\\ \hdashline 3 & -2 & 5\end{array}\right]=\begin{bmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{bmatrix} \text{ என்றும் கூறிடலாம்.}$$

குறிப்பாக,

$$A=[a_{ij}]_{m,n} \text{ எனின் } A=\begin{bmatrix}R_1\\ R_2\\ \cdots\\ \cdots\\ R_m\end{bmatrix}=[C_1\ C_2 \ldots C_3] \text{ என்று}$$

கூறிடலாம். இங்கு $R_1, R_2, \ldots, R_m$ என்பவை முறைப்படி A-ன் நிரைகளாகவும் $C_1, C_2, \ldots, C_n$ என்பவை நிரல்களாகவுமிருக்கும்.

அடுத்து அணிகளைக் கூறிட்டபின் அவற்றை எவ்வாறு கூட்டலாம் என்பதை முதலில் கவனிக்கலாம். A, B என்பவை சம அணித்தரமுடைய அணிகள் என்போம். இவற்றைக் கூறிடுவதன் மூலம் கிடைக்கும் அணிகள் ஒரே எண்ணிக்கை

நிரைகளும், ஒரே எண்ணிக்கை நிரல்களும் உடையதாயும், ஒத்த கிளை அணிகள் ஒரே அணித்தரமுடையனவாகவும் இருந்தால், இவ்வணி சர்வ சமமாக (Identically) கூறிடப்பட்டுள்ள தென்போம்.

இம்முறைப்படி கூறிடுவதன் மூலம்

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

என்று கிடைத்தால்,

$$A + B = \begin{bmatrix} (A_{11}+B_{11}) & (A_{12}+B_{12}) \\ (A_{21}+B_{21}) & (A_{22}+B_{22}) \end{bmatrix} \text{ ஆகும்.}$$

மேலும், சர்வ சமமாகக் கூறிடப்பட்டுள்ள அணிகளின், ஒத்த கிளை அணிகள் சமமாக இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே, அவ்வணிகள் சமம் என்பது புலனாகும்.

அடுத்து அணிகளைக் கூறிட்டு, எவ்வாறு பெருக்குவது என்பதைக் கவனிப்போம். $A = [a_{ij}]_{m,n}$, $B = [b_{ij}]_{n,p}$ தரப்பட்டுள்ள இரு அணிகளென்க. A, B-க்களின் கிளை அணிகளை முறையே A_{ij}, B_{ij} என்று குறிப்போம்.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{array}{l} \overbrace{\quad}^{n_1 \text{ நிரல்கள்}} \; \overbrace{\quad}^{n_2 \text{ நிரல்கள்}} \; \overbrace{\quad}^{n_t \text{ நிரல்கள்}} \\ \left[\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \hline \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hline A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rt} \end{array}\right] \begin{array}{l} \} m_1 \text{ நிரைகள்} \\ \} m_2 \text{ ,, ,,} \\ \\ \} m_r \text{ ,, ,,} \end{array} \end{array}$$

என்று கூறிடுவோம். இங்கு $m_1+m_2+\cdots+m_r=m$, $n_1+n_2+\cdots+n_t=n$ ஆகும்.

இப்பொழுது B-யை

$$B = \begin{array}{c} \overbrace{\quad}^{p_1 \text{ நிரல்கள்}} \; \overbrace{\quad}^{p_2 \text{ நிரல்கள்}} \; \overbrace{\quad}^{p_s \text{ நிரல்கள்}} \\ \left[\begin{array}{c|c|c|c} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ \hline B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \hline \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hline B_{t_1} & B_{t_2} & \cdots & B_{ts} \end{array}\right] \begin{array}{l} \} \; n_1 \text{ நிரைகள்} \\ \} \; n_2 \text{ நிரைகள்} \\ \\ \} \; n_t \text{ நிரைகள்} \end{array} \end{array}$$

என்று கூறிடுக. $p_1+p_2+\cdots+p_s=p$ ஆகும்.

இங்கு A_{ij} என்ற கிளை அணியானது B_{jk}-யோடு $(k=1, 2, ..., t)$ பெருக்கலுக்கு இசைவுள்ளதாக இருக்கத் தக்கதாக, A-ன் நிரல்களையும், B-ன் நிரைகளையும் நாம் காட்டியுள்ளபடி ஒரே மாதிரியாகக் கூறிடல் வேண்டும். ஆனால், A-ன் நிரைகளையும் B-ன் நிரல்களையும், நமது வசதிக் கேற்றவாறு, எவ்வாறேனும் கூறிடலாம். இப்பொழுது,

$$AB = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \hline \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hline A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rt} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c|c|c} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ \hline B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \hline \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hline B_{t_1} & B_{t_2} & \cdots & B_{ts} \end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} (A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}+\cdots+A_{1t}B_{t_1}) & \cdots & \cdots & (A_{11}B_{1s}+A_{12}B_{2s}+\cdots+A_{1t}B_{ts}) \\ (A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}+\cdots+A_{2t}B_{t_1}) & \cdots & \cdots & (A_{21}B_{1s}+A_{22}B_{2s}+\cdots+A_{2t}B_{ts}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (A_{r_1}B_{11}+A_{r_2}B_{21}+\cdots+A_{rt}B_{t_1}) & \cdots & \cdots & (A_{r_1}B_{1s}+A_{r_2}B_{2s}+\cdots+A_{rs}B_{ts}) \end{bmatrix}$$

ஆகும். இதன் நிரூபணம் மாணவர்களுக்குப் பயிற்சியாக விடப்படுகிறது.

குறிப்பாக,

$$A = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix}, \quad B = [C_1 \; C_2 \ldots C_p] \text{ என்றும்}$$

கூறிட்டோமானல்

$$AB = \begin{bmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 & \dots & \dots & R_1C_p \\ R_2C_1 & R_2C_2 & \dots & \dots & R_2C_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_mC_1 & R_mC_2 & & \dots & R_mC_p \end{bmatrix}$$ ஆகும். இங்கு

(AB)-ன் i^{th} நிரையானது $A_i B$ என்பதையும், j^{th} நிரலானது AB_j என்பதையும் இங்கு கவனிக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு **2**:

$$A = \left[\begin{array}{c|cc|c} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ \hline 5 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{c|cc} -3 & 0 & -5 \\ \hline 5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ \hline 1 & 0 & -1 \end{array}\right]$$ என்றால்,

காட்டியுள்ள கூறிடலின்படி AB-யைக் காண்.

$$AB = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}[-3] + \begin{bmatrix}0 & 2\\3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}[1] & \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}[0 \;\; -5] + \begin{bmatrix}0 & 2\\3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 0\\ & 0-2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}[0 \;\; -1] \\ [5]\;[-3] + [0 \;\; -2]\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix} + [0]\;[1] & [5]\;[0 \;\; -5] + [0 \;\; -2]\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 1 & -2\end{bmatrix} + [0]\;[0 \;\; -1] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix}-3\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\15\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0 & -5\\0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2 & -4\\-9 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & -1\end{bmatrix} \\ [-15] + [0] + [0] & [0 \;\; -25] + [-2 \;\; 4] + [0 \;\; 0] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 2 & -8 \\ 16 & -9 & -1 \\ -15 & -2 & -21 \end{bmatrix}$$

§ 1·24. A ஒரு சதுர அணி என்க. அப்படியானால், $A \cdot A$ வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. மேலும், $A \cdot A = A^2$ என்போம். பொதுவாக, n நேர் முழு எண்ணாக இருக்கும்போது,

$A \cdot A \dots n$ தடவைகள் $= A^n$ எனப்படும்.

பயிற்சி 1

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -7 & 0 \\ 3 & -5 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & -4 \end{bmatrix}$

என்ருல், $-A$, $2A$, $A+B$, $A-B$, $2A-3B$ அமைக்கவும்.

2. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $2A-B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

என்ருல் B ஐக் காண்க.

3. $A = [2 \ 4 \ -3]$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ எனின் AB, BA

இவைகளை அமைக்கவும்.

4. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ என்ருல் A^2, A^3 அமைக்கவும்.

5. $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ என்ருல் $(i^2 = -1)$ A^4, A^5, A^6, A^7 முறையே I, A, $-I$, $-A$ என நிறுவுக. இதிலிருந்து A^n-ற்கு ஒரு பொது சூத்திரம் அமைக்கவும். (n நேர் முழுஎண்)

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$,

$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

என்ருல், $AB = BA = AC = CA = BC = CB = 0$ எனவும்,

$A^2 = A$, $B^2 = B$, $C^2 = C$ எனவும்,

$(A+B)^2 = A+B$, $(B+C)^2 = B+C$, $(C+A)^2 = C+A$ எனவும் நிறுவுக.

7. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ எனின்

$AB = A$, $BA = B$ என நிறுவுக.

8. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$,

$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ என்றால்

$AB = AC$ எனக் காண்பிக்கவும். இதிலிருந்து அறிவதென்ன ?

9. $\alpha A = \alpha B$ என்றால் ($\alpha \neq 0$ ஓர் எண்ணி) $A = B$ எனவும் $A = B$ என்றால் $\alpha A = \alpha B$ எனவும் நிறுவுக.

10. பின்வருபனவற்றை நிறுவுக:

(1) $\alpha A \cdot \beta B = \alpha \beta \cdot A B$ (α, β எண்ணிகள்)

(2) $(-A)(-B) = AB$

(3) $A(\alpha B) = (\alpha A) B = \alpha (AB)$

11. பொதுவாக $(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$, $(A+B)(A-B) \neq A^2-B^2$ என்பது ஏன் எனக் கூறுக. இவை எப்பொழுது சமமாக இருக்கும் ?

12. அணிகளின் கூடுதலுக்கு இசையும் தன்மையானது ஒரு சரிநிகர் தொடர்பெனவும், ஆனால் பெருக்கலுக்கு இசையும் தன்மையானது சரிநிகர் தொடர்பல்ல எனவும் நிறுவுக.

2. சார்பு அணிகள்

(Related Matrices)

முதற்பகுதியில் சில வகை அணிகளைப் பற்றியும், அணிகளின் கூடுதல், பெருக்கலைப் பற்றியும் பார்த்தோம். இப்பகுதியில் ஓர் அணியைச்சார்ந்த அணிகளைப் பற்றிப் பார்க்கலாம். நாம் முன்பே கூறியுள்ளபடி இடத்திற்குத் தக்கவாறு இவ்வணிகள் அமைந்துள்ள களங்களை எடுத்துக் கொள்ளவேண்டும்.

§ 2·1. காலவட்ட அணி (Periodic Matrix)

P-ன் நேர் முழு எண் மதிப்புகளுக்கு, $A^{p+1} = A$ என்றவாறு ஓர் அணி A இருக்குமாளுல், A ஆனது காலவட்ட அணி எனப்படும்.

ஒரு காலவட்ட அணி A-ல் $A^{p+1} = A$ என்றமைக்கும் p-ன் குறைந்தபட்ச நேர் முழு எண் மதிப்பானது அவ்வணியின் **காலவட்டம்** எனப்படும்.

A ஆனது ஒரு சதுர அணியாக இருக்கும்போதுதான் A^p வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே, இக்காலவட்ட அணிகள், சதுர அணிகளாகும் என்பதை இங்கு நினைவு கூறவேண்டும்.

§ 2·2. மூல ஆற்றலணி (Idenipotent Matrix)

A என்ற சதுர அணியானது $A^2 = A$ என்றவாறு அமையுமாளுல் A ஆனது ஒரு மூல ஆற்றலணி எனப்படும்.

எல்லா சதுர அலகு அணிகளும், பூச்சிய அணிகளும், காலவட்ட, மூல ஆற்றலணிகளுக்கு வெளிப்படையான எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

§ 2·3. பூச்சிய ஆற்றலணி (Nil Potent Matrix)

p-ன் நேர் முழு எண் மதிப்புகட்கு, ஒரு சதுர அணி A-ல் $A^p = 0$ என்ருல், A ஆனது ஒரு **பூச்சிய ஆற்றலணி** எனப்படும்.

மேலும் p ஆனது, $A^p = 0$ என்றமைக்கும் குறைந்தபட்ச நேர் முழு எண்ணுயின், பூச்சிய ஆற்றல் அணியின் படி p எனப்படும்.

எல்லா சதுர பூச்சிய அணிகளும் பூச்சிய ஆற்றலணிகள் என்பது வெளிப்படை.

§ 2.4. நிரை நிரல் மாற்றணி (Transpose Matrix)

$m \times n$ அணித்தரங் கொண்ட அணி A-ன் நிரைகளை நிரல்களாகவும், நிரல்களை நிரைகளாகவும் மாற்றி அமைக்கப் படும் $n \times m$ அணியானது A-ன் நிரை நிரல் மாற்றணி A^{T} எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \text{ என்ருல் } A^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 0 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ ஆகும்.}$$

மேலும், A, B என்பவை இரு அணிகளாகவும், α ஓர் எண்ணி யாகவும் இருந்தால்,

§ 2.5. தேற்றம் :

(i) $(A^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = A$

(ii) $(\alpha A)^{\mathsf{T}} = \alpha A^{\mathsf{T}}$

(iii) $(A+B)^{\mathsf{T}} = A^{\mathsf{T}} + B^{\mathsf{T}}$

(iv) $(AB)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}}$ ஆகும்.

நிரூபணம் :

(i), (ii) ன் நிரூபணங்கள் வரையறையிலிருந்து உடனே வருவதால், அவை மாணவர்களுக்குப் பயிற்சியாக விடப்படு கின்றன.

(iii) $A = [a_{ij}]_{m,n}$, $B = [b_{ij}]_{m,n}$ என்க.

$[A]_{ij}$ ஆனது அணி A-ன் i, j^{th} உறுப்பைக் குறிக்கு மாஞல்,

$[A^{\mathsf{T}}]_{ij} = a_{ji}$, $[B^{\mathsf{T}}]_{ij} = b_{ij}$ ஆகும்.

$[A+B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$\therefore\ [(A+B)^{\mathsf{T}}]_{ij} = a_{ji} + b_{ji} = [A^{\mathsf{T}}]_{ij} + [B^{\mathsf{T}}]_{ij}$

$(A+B)^{\mathsf{T}} = A^{\mathsf{T}} + B^{\mathsf{T}}$

(iv) அடுத்து $A = [a_{ij}]_{m,\,n}$, $B = [b_{ij}]_{n,\,p}$ என்க.

$$AB = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} \right]_{m,\,p} \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, p \end{array}$$

மேலும், AB-ன் அ.தரம் $m \times p$. ஆதலால், $(AB)^{\mathsf{T}}$-ன் அ.தரம் $p \times m$ ஆகும்.

$$[(AB)^{\mathsf{T}}]_{ji} = [AB]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

அடுத்து B^{T}, A^{T} இவற்றின் அ. தரம் முறையே $p \times n$, $n \times m$ ஆகும்.

எனவே, $B^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}$-ன் அ. தரம் $p \times m$ ஆகும். மேலும்,

$[B^{\mathsf{T}}\ A^{\mathsf{T}}]_{ji} = B^{\mathsf{T}}$-ன் j^{th} நிரை, A^{T}-ன் i^{th} நிரல் இவற்றின் உட்பெருக்கல்.

$$= \sum_{k=1}^{n} b_{kj}\, a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

(1), (2) லிருந்து $(AB)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}}\ A^{\mathsf{T}}$ ஆகும்.

§ 2·6. கிளைத்தேற்றம் :

$(ABC)^{\mathsf{T}} = C^{\mathsf{T}}\ B^{\mathsf{T}}\ A^{\mathsf{T}}$ ஆகும்.

ஏனெனில், $(ABC)^{\mathsf{T}} = C^{\mathsf{T}}\ (AB)^{\mathsf{T}}$
$= C^{\mathsf{T}}\ B^{\mathsf{T}}\ A^{\mathsf{T}}$

2·7. சமச்சீரணிகள் (Symmetric Matrices)

ஒரு சதுர அணி A-ல் $A^{\mathsf{T}} = A$ என்றால் A ஆனது சமச்சீரணி எனப்படும். அதாவது $A = [a_{ij}]$ ஒரு சமச்சீரணி எனின், i, j-ன் எல்லா மதிப்புகட்கும் $a_{ij} = a_{ji}$ ஆகும்.

ஒரு சதுர அணி A-ல் $A^{\mathsf{T}} = -A$ என்றால், A ஆனது எதிர் சீரணி அல்லது அசமச் சீரணி (Skew symmetric Matrix) எனப்படும். அதாவது A எதிர் சீரணியென்றால், i, j-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்

$a_{ij} = -a_{ji}$ ஆகும். குறிப்பாக $i = j$ என்றால்

$a_{ii} = -a_{ii} \quad \therefore \quad 2a_{ii} = 0 \quad$ (அ-து) $a_{ii} = 0$

எனவே, ஓர் எதிர் சீரணியின் மூலைவரை உறுப்புகள் எல்லாம் பூச்சியமென அறிகிறோம்.

$$A=\begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$ என்பவை முறையே

சமச்சீர், எதிர் சீரணிகளுக்கு எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

A ஒரு சமச்சீரணியாகவும் (எதிர் சீர்) α ஓர் எண்ணி யாகவும் இருந்தால் αA-யும் சமச்சீரே (எதிர் சீரே) என்பது வெளிப்படை.

§ 2·8. துணைச்சிக்கலணி (Cunjugate Matrix)

A ஆனது, சிக்கலெண் களம் C-ன் மீதமைந்த ஓர் அணி என்போம். A-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் நீக்கி, இவ்விடங்களை அவ்வுறுப்புகளின் துணைச்சிக்கலெண்களால் நிரப்பக் கிடைக்கும் அணியானது A-ன் துணைச் சிக்கலணி (conjugate of A) எனப்படும். இதனை $\overline{A}$ என்று குறிப்போம்.
எடுத்துக்காட்டாக,

$$A=\begin{bmatrix} 2+i & 0 \\ -i & -1+3i \end{bmatrix} \text{ என்றால் } \overline{A}=\begin{bmatrix} 2-i & 0 \\ i & -1-3i \end{bmatrix} \text{ ஆகும்.}$$

A-ன் உறுப்புகள் மெய்யெனின் $\overline{A}=A$ என்பது வெளிப்படை. மேலும், K ஆனது களத்திலுள்ள ஓர் எண்ணி என்றால்,

(i) $\overline{(\overline{A})}=A$ (ii) $\overline{(KA)}=\overline{K}\,\overline{A}$ என்பன தெளிவு.

§ 2·9. தேற்றம் :

(i) $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$ (ii) $\overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B}$

$A=[Z_{ij}]$, $B=[Z'_{ij}]$ என்றால் $A+B=[Z_{ij}+Z'_{ij}]$ ஆகும்.

$\therefore\ \overline{(A+B)}=[\overline{Z_{ij}+Z'_{ij}}]=[\overline{Z_{ij}}+\overline{Z'_{ij}}]=\overline{A}+\overline{B}$

இரண்டாவது பகுதியின் நிரூபணம் மாணவர்களுக்குப் பயிற்சி யாக விடப்பட்டுள்ளது.

§ 2·10. நிரை நிரல் மாற்று துணைச்சிக்கலணி (conjugate transpose of a Matrix)

சிக்கலெண் களத்தின் மீதமைந்த அணி A-ன் துணைச் சிக்கலணி $\overline{A}$ என்க. $\overline{A}$-ன் நிரை நிரல் மாற்றணி $(\overline{A})^T$ ஆனது A-ன் நிரை நிரல் மாற்று துணைச்சிக்கலணி (canjugate transpose of A) எனப்படும். இதனை நாம் A^* என்று குறிப்போம்.

$\overline{(A)}^T = A^* = (\overline{A^T})$ என்பது வெளிப்படை. எடுத்துக் காட்டாக,

$$A = \begin{bmatrix} 2+i & \sqrt{3}-i & 5 \\ -3+2i & 1 & 1+i \\ 2 & 0 & i \end{bmatrix} \text{ என்றால்,}$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 2-i & \sqrt{3}+i & 5 \\ -3-2i & 1 & 1-i \\ 2 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^* = \begin{bmatrix} 2-i & -3-2i & 2 \\ \sqrt{3}+i & 1 & 0 \\ 5 & 1-i & -i \end{bmatrix} \text{ ஆகும்.}$$

(சில ஆசிரியர்கள் A-ன் சேர்ப்பு அணியை A^* என்று குறிப்பது வழக்கம்.)

§ 2·11. ஹெர்மிசியன், எதிர் ஹெர்மிசியன் அணிகள் (Hermitian and Skew Hermitian Matrices)

ஒரு சதுர அணி A-ல் $A^* = A$ என்றால் A ஆனது ஹெர்மிசியன் எனப்படும். $A = [a_{ij}]$ ஆனது ஹெர்மிசியன் என்றால், i, j-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $a_{ij} = \overline{a_{ij}}$. குறிப்பாக $i = j$ என்றால்,

$a_{ii} = \overline{a_{ii}}$. எனவே, a_{ii} ஆனது ஒரு மெய்யெண்ணாகும். ஆதலால், ஒரு ஹெர்மிசியன் அணியின் எல்லா மூலைவரை உறுப்புகளும் மெய்யெண்களாகும்.

அடுத்து ஒரு சதுர அணி A ஆனது $A^* = -A$ என்றமையுமாறு இருக்குமானால் A ஆனது எதிர் ஹெர்மிசியன் (Skew Hermitian) எனப்படும். (அ-து) $A = [a_{ij}]$ ஆனது எதிர்

ஹெர்மிசியன் என்றால் i, j-ன் எல்லா மதிப்புகட்கும் $a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$ ஆகும். குறிப்பாக $i = j$ என்றால்,

$a_{ii} = -\overline{a_{ii}}$ என்று கிடைக்கும். $a_{ii} = \alpha + i\beta$ என்றால்,

$$\alpha + i\beta = -\overline{(\alpha + i\beta)} = -(\alpha - i\beta) = -\alpha + i\beta$$

$\therefore \quad \alpha = -\alpha, \beta = \beta$ ஆகும். ஆதலால், $\alpha = 0$. எனவே, ஓர் எதிர் ஹெர்மிசியனின் மூலைவரை உறுப்புகள் பூச்சியமாகவோ அல்லது தனி கற்பனை எண்களாகவோ மட்டுமே இருக்கமுடியும் என அறிகிறோம்.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2+i & i \\ 2-i & -1 & -3+2i \\ -i & -3-2i & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1+i \\ -3 & i & -2+3i \\ -1+i & 2+3i & 2i \end{bmatrix}$$

என்பன முறையே ஹெர்மிசியன் அணிகளுக்கு எடுத்துக் காட்டுகளாகும்.

A மெய்யணி என்றால் $A^{T} = A^{*}$ ஆகும். எனவே, எல்லா மெய் சமச்சீரணிகளும் ஹெர்மிசியன், எல்லா மெய் எதிர் சீரணிகளும் எதிர் ஹெர்மிசியன் ஆகும்.

§ 2.12. தேற்றம் :

(i) $(A+B)^* = A^* + B^*$

(ii) $(AB)^* = B^* A^*$ (திருப்பு விதி- reversal law) என நிறுவுக.

$$(AB)^* = \overline{(AB)}^{T} = (\overline{A}\ \overline{B})^{T} = (\overline{B})^{T}(\overline{A})^{T} = B^* A^* \text{ ஆகும்.}$$

முதற்பகுதி பயிற்சியாக விடப்பட்டுள்ளது.

கிளைத்தேற்றம் :

(i) $(ABCD)^* = D^* C^* B^* A^*$ ஆகும்.

(ii) $(A^*)^* = A$

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$AB = A, BA = B$ என்றால் A-யும் B-யும் மூல ஆற்றலணிகள் (idenipotent) என நிறுவுக.

$ABA = (AB)A = (A)A = A^2$

மேலும், $ABA = A(BA) = A(B) = A$

$\therefore$ $A^2 = A$ ஆதலால், A மூல ஆற்றலணியாகும்
இது போல் (BAB) ஐ எடுத்துக்கொண்டு $B^2 = B$ என நிறுவலாம்.

எ-கா. **2:** $(A+I)(A-I) = 0$ என்றால், என்றால் மட்டுமே A ஆனது ஓர் உட்சுருள் (involutory) அணியாகும் என நிறுவுக.

[ஒரு சதுரஅணி A ஆனது $A^2 = I$ என்றவாறு இருக்குமானால் A ஆனது உட்சுருள் அணி எனப்படும்]

முதலில் $(A+I)(A-I) = 0$ என்க.

அப்படியானால், $A(A-I)+I(A-I) = 0$

(அ-து) $A^2 - AI + IA - I^2 = 0$
$AI = IA = A,\ I^2 = I$ ஆதலால்,
$A^2 - A + A - I = 0$

$\therefore$ $A^2 = I$ எனவே, A ஆனது உட்சுருளாகும்.

அடுத்து A ஆனது உட்சுருள் என்றால்,

$A^2 = I$

$\therefore$ $A^2 - A + A - I = 0$

(அ-து) $A^2 - AI + IA - I^2 = 0$ (அ-து) $(A+I)(A-I) = 0$

எ-கா. **3:** A ஒரு n-சமச்சீரணி; B யாதானுமொரு $n \times m$ அணியென்றால் $B^T AB$-யும் சமச்சீரே என நிறுவுக.

A சமச்சீராதலால் $A^T = A$ ஆகும். $B^T AB = X$ என்க.

$$X^T = (B^T AB)^T = B^T A^T (B^T)^T$$
$$= B^T AB$$
$$= X$$

$\therefore$ X ஆனது சமச்சீராகும்.

எ-கா. **4:** ஒவ்வொரு சதுர அணியையும், ஒரு சமச்சீரணி, ஓர் எதிர் சீரணி இவற்றின் கூட்டலாக ஒரே ஒரு வழியில்தான் எழுதமுடியும் என நிறுவுக.

A ஒரு சதுர அணி என்க.

$B = \frac{1}{2}(A+A^T)$, $C = \frac{1}{2}(A-A^T)$ என்போம். அப்படியானால்,

$B^T = \frac{1}{2}(A+A^T)^T = \frac{1}{2}[A^T+(A^T)^T] = \frac{1}{2}(A^T + A) = B$

$\therefore$ B சமச்சீராகும்.

$C^{T} = \frac{1}{2}(A - A^{T})^{T} = \frac{1}{2}[A^{T} - (A^{T})^{T}] = \frac{1}{2}(A^{T} - A) = -C$

$\therefore$ C ஆனது அசமச்சீராகும். இப்பொழுது

$A = \frac{1}{2}(A + A^{T}) + \frac{1}{2}(A - A^{T}) = B + C$ என்று எழுதலாம்.

இங்கு B சமச்சீர் ; C அசமச்சீராகும். மேலும்,

P, Q என்பன முறையே மற்றொரு ஜோடி சம, அசமச் சீரணிகளாக இருக்கும்போது $A = P + Q$ என்று எழுத முடியுமானால்,

$A^{T} = (P+Q)^{T} = P^{T} + Q^{T} = P - Q$ ($\because$ P சமச்சீர் Q அசமச்சீர்)

$$\therefore \quad P = \tfrac{1}{2}(A + A^{T}) = B$$
$$Q = \tfrac{1}{2}(A - A^{T}) = C$$

எனவே A-ன் இத்தகைய வடிவமானது (representation) தனித்தன்மை உடைத்ததாகும் (unique).

பயிற்சி 2

1. பின்வரும் அணிகளுக்கு சில எடுத்துக்காட்டுகள் தருக.
   (a) சமச்சீர், எதிர்சீர் (b) ஹெர்மிசியன், எதிர் ஹெர்மிசியன்
   (c) மூல ஆற்றலணி (d) உட்சுருள் அணி.

2. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ ஓர் உட்சுருள் அணி எனக் காண்பி.

3. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ என்றால் $A^{4} = ?$

4. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ ஒரு மூல ஆற்றலணி எனக் காண்பி.

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$,

   $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ என்றால்,

A, B, C-க்களும், $(A+B)$, $(B+C)$, $(A+C)$ க்களும் மூல ஆற்றலணிகள் என நிறுவுக.

6. A, B என்பவை ஆற்றலணிகள். $AB = BA$ என்றிருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே $(A+B)$-யும் மூல ஆற்றலணியாகும் என நிறுவுக.

7. $(A^T B^T)^T = BA$ என நிறுவுக.

8. A ஆனது ஹெர்மிசியன் என்றால் $A^T = \overline{A}$ என நிறுவுக.

9. A சமச்சீரெனின் $(A^*)^T = A^*$ என நிறுவுக.

10. A, B-க்கள் ஒரே அணித்தரங்கொண்ட சமச்சீரணிகளென்றால், $AB = BA$ என்றால் மட்டுமே AB ஆனது சமச்சீராகும் என நிறுவுக.

11. A ஒரு சதுர அணி என்றால் AA^T, $A^T A$ என்பன சமச்சீரெனவும் AA^*, $A^* A$ என்பன ஹெர்மிசியன் எனவும் நிறுவுக. குறிப்பாக A ஆனது மெய்யணி என்றால் AA^T, $A^T A$ இவற்றின் தலையாய மூலைவரை உறுப்புகள் நேர் எண்கள் (positive integers) என நிறுவுக.

12. $AB=BA$ என்றால் $A^T B^T = B^T A^T$ எனவும் $A^* B^* = B^* A^*$ எனவும் நிறுவுக.

13. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

என்றால் $B^T A^T = A^T$; $A^T B^T = B^T$; A, B, A^T, B^T என்பவை மூல ஆற்றலணிகள் என்பனவற்றை நிறுவுக.

14. $AB = A$, $BA = B$ என்றால் $B^T A^T = A^T$, $A^T B^T = B^T$ எனவும் A, B, A^T, B^T என்பவை மூல ஆற்றலணிகள் எனவும் நிறுவுக.

15. A ஓர் உட்சுருள் அணியென்றால் $\frac{1}{2}(A+I)$, $\frac{1}{2}(A-I)$ என்பவை மூல ஆற்றலணிகள் என நிறுவுக.

16. A ஹெர்மிசியன் (எதிர் ஹெர்மிசியன்) என்றால் iA ஆனது எதிர் ஹெர்மிசியன் (ஹெர்மிசியன்) என நிறுவுக.

17. A ஒரு சதுர அணி என்றால் $(A+A^*)$ ஆனது ஹெர்மிசியன் எனவும் $(A-A^*)$ ஆனது எதிர் ஹெர்மிசியன் எனவும் நிறுவுக.

18. A ஆனது எதிர்சீர் மெய்யணி என்றால் iA ஆனது ஹெர்மிசியன் என நிறுவுக.

19. A சமச்சீர் (எதிர்சீர்) என்றால் A^2 சமச்சீர் என்றும் $AA^T = A^T A$ என்றும் நிறுவுக.

20. எல்லா சதுர அணிகளையும் ஒரு ஹெர்மிசியன், எதிர் ஹெர்மிசியன் இவற்றின் கூடுதலாக ஒரே ஒரு வழியில்தான் எழுத முடியுமென நிறுவுக. (கணக்கு 17 ஐ உபயோகிக்கவும்)

21. P, Q என்பவை ஹெர்மிசியன் என்றால், எல்லா சதுர அணிகளையும் $P+iQ$ என்ற வடிவில் ஒரே ஒரு வழியில்தான் எழுத முடியுமெனக் காண்பி.

22. A, B என்பன முறையே சமச்சீர், எதிர்சீர் மெய்யணிகளென்றால் எல்லா ஹெர்மிசியன் அணிகளையும் $A+iB$ என்ற வடிவில் ஒரே ஒரு வழியில்தான் எழுத முடியுமெனக் காண்பி.

23. A, B ஹெர்மிசியன் அணிகளென்றால், $AB=BA$ என்றிருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே AB ஆனது ஹெர்மிசியன் ஆகுமென நிரூபி.

24. A, B சமச்சீரணிகளென்றால் $AB+BA$ சமச்சீரெனவும் $AB-BA$ எதிர் சீரெனவும் நிறுவுக.

25. A, B ஹெர்மிசியன் என்றால் $AB+BA$ ஹெர்மிசியன் எனவும், $AB-BA$ எதிர் ஹெர்மிசியன் எனவும் நிறுவுக.

26. A ஹெர்மிசியன் (எதிர் ஹெர்மிசியன்) அணியாகவும் B ஆனது யாதானுமொரு அணியாகவும் இருந்தால் B^*AB-யும் ஹெர்மிசியன் (எதிர் ஹெர்மிசியன்) என நிறுவுக.

27. 26-ல் A அசமச்சீரணி என்றால் $B^{T}AB$-யும் எதிர் சீரென நிறுவுக.

28. எல்லா மூலைவரை அணிகளும் சமச்சீராகும். ஏன் ?

29. $A = [A_{ij}]$ என்போம். இங்கு A_{ij} என்பவை கிளை அணிகளாகும். அப்படியானால், $[A_{ij}]^{T} = [A_{ji}{}^{T}]$ என நிறுவுக.

30. $A = [C_1, C_2, \ldots, C_n]$ என்றால் A^{T}, A^{*} என்பனவற்றை C_j-க்கள் வழியாகக் காணவும்.

3. எதிர்மறை அணி

(Inverse Matrix)

§ 3·1. அணிக்கோவைகள் (Determinants)

இப்பகுதியை, ஆரம்பிப்பதற்கு முன்னால் மாணவர்களுக்கு அணிக்கோவைகளைப்பற்றி ஆழ்ந்த அறிவு இருத்தல் அவசிய மாகும். அணிக்கோவைகளின் பண்புகளை நாம் இங்கு நிரூபிக்கப் போவதில்லை என்றாலும், நமது தேவையை முன்னிட்டு, இப்பண்புகள் பின்வரும் பகுதிகளில் தொகுத்துத் தரப்பட்டுள்ளன. இவற்றின் நிரூபணங்கள் பயிற்சியாகவே விடப்பட்டுள்ளன.

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ ஓர் அணிக்கோவை என்க.

a_{ij}-ன் இணைக்காரணியை (co-factor) A_{ij} என்று குறிப்போம். அப்படியானால்,

(1) $\triangle = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \ldots + a_{in} A_{in}$ $\quad i, j = 1, 2, \ldots, n$

$= a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \ldots + a_{nj} A_{nj}$

(2) $a_{i1} A_{k1} + a_{i2} A_{k2} + \ldots + a_{in} A_{kn} = 0, \quad i \neq k$

$a_{1j} A_{1k} + a_{2j} A_{2k} + \ldots + a_{nj} A_{nk} = 0 \quad j \neq k$

(3) $\triangle$-வில் நிரை, நிரல்களை ஒன்றுக்கொன்று மாற்றுவதால் அதன் மதிப்பு மாறுவதில்லை.

(4) $\triangle$-வில் இரு நிரைகளை (நிரல்களை) ஒன்றுக்கொன்று மாற்றுவதால் கிடைக்கும் அணிக்கோவை $\triangle_1$ என்றால் $\triangle_1 = -\triangle$ ஆகும்.

(5) $\triangle$-வில் இரு நிரைகள் (நிரல்கள்) சர்வ சமமானால் $\triangle = 0$.

(6) $\triangle$-வில் உள்ள ஒரு நிரையின் (நிரலின்) ஒவ்வொரு உறுப்பையும் α என்ற எண்ணால் பெருக்கிக்கிடைக்கும் அணிக்கோவை $\triangle_2$ என்றால் $\triangle_2 = \alpha . \triangle$ ஆகும்.

(7) $\triangle$-வில் p^{th} நிரையில் (நிரலில்) உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் k உறுப்புகளின் கூடுதலாக இருந்தால் $\triangle$-வையே k அணிக்கோவைகளின் கூடுதலாக விவரிக்க முடியும்.

இங்கு இந்த k அணிக்கோவைகளிலும் p^{th} நிரையில் (நிரலில்) உள்ள உறுப்புகள் முறையே $\triangle$-வில் p^{th} நிரையில் உள்ள ஒத்த, முதல் இரண்டாவது, ...k ஆவது உறுப்புகளாகும். மற்றெல்லா நிரைகளும் மாறாது, $\triangle$-வில் உள்ளது போலவே இருக்கும்.

(8) $\triangle$-வில் உள்ள எந்த நிரையோடும் (நிரலோடும்) மற்ற பல நிரைகளை (நிரல்களை), எண்ணிகளால் பெருக்கிக் கூட்டுவதால் அதன் மதிப்பு மாறுவதில்லை.

(9) ஒரே தரமுடைய இரு அணிக்கோவைகளின் பெருக்கலானது அதே தரமுடைய மற்றொரு அணிக்கோவையாகும்.

§ 3·2. ஒரு சதுர அணியின் அணிக்கோவை (Determinant of a Square Matrix).

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ஒரு சதுர அணி என்றால், இவ்வணியின் உறுப்புகளையே, இதே முறைப்படி தனது உறுப்புகளாகக் கொண்ட அணிக்கோவை

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ஆனது அணி A-ன் அணிக்கோவை எனப்படும். இதனை நாம் $|A|$ என்று குறிப்போம். இதிலிருந்து

(1) $|I| = 1$ (2) $|A^{T}| = |A|$

(3) $|A^*| = |\overline{A}| = |\overline{A}|$ (4) $|\alpha A| = \alpha^n \cdot A^n$
(α எண்ணி, A-ன் அ. தரம் n)

(5) $|AB| = |A|\ |B|$ என்பவை வெளிப்படை உண்மைகளாகும்.

A ஒரு ஹெர்மிசியன் அணியென்றால் $|A|$ மெய்யெண் மதிப்புடையதாகும். ஏனெனில், $|A| = \alpha + i\beta$ என்றால்,

$$\alpha + i\beta = |A| = |A^*| \quad (\because A^* = A)$$
$$= \overline{|A|} = \alpha - i\beta$$

$\therefore \beta = 0$ ஆகும்.

§ **3·3.** ஒருமைசேர், ஒருமையில் அணிகள்: (Singular and Non-singular Matrices)

ஒரு சதுர அணி A-ல் $|A| = 0$ என்றால் A ஆனது ஒருமைசேர் (singular) அணி எனவும், $|A| \neq 0$ என்றால், A ஆனது ஒருமையில் (Non-singular) அணி எனவும் அழைக்கப் படும். எடுத்துக்காட்டாக;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$ ஒருமைசேராகும்.

A, B என்பவை ஒருமையில் அணிகள் என்போம். $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$ இப்பொழுது $|AB| = |A|\ |B| \neq 0$ எனவே, AB-யும் ஒருமையில் என அறிகிறோம். ஆதலால், ஒருமையில் அணிகளின் பெருக்கலானது ஒருமையில் அணியாகும். மேலும், இரு அணிகளின் பெருக்கல் அணியானது ஒருமைச்சேர் என்றால், அவற்றில் ஒன்றுவது ஒருமைசேர் அணியாக இருக்கவேண்டும்.

§ **3·4.** சேர்ப்பு அணி: (Adjoint or Adjugate Matrix)

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ என்க. $|A|$ ல் a_{ij}-ன் இணைக்காரணியை A_{ij} என்று குறிப்போமானால்,

$$\text{அணி } [A_{ij}]^{T} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$ ஆனது

A-ன் சேர்ப்பு அணி எனப்படும். இதனைச் சுருக்கமாக சேர்ப்பு A ($adj\ A$) என்று குறிப்போம்.

§ **3·5.** தேற்றம்:

A (சேர்ப்பு A) = (சேர்ப்பு A) $A = |A|\ I$

நிரூபணம் :

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ என்க. $|A|$-ல் a_{ij}-ன் இணைக்காரணி A_{ij} என்றால், சேர்ப்பு $A = [A_{ij}]$ ஆகும்.

A-ன் i^{th} நிரை $= [a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{in}]$,

(சேர்ப்பு A)-ன் j^{th} நிரல் $= [A_{1j}, A_{2j}, \ldots, A_{nj}]$

$$\therefore \quad [A\ (\text{சேர்ப்பு } A)]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{kj} \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

ஆனால், $i=j$ என்றால் $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{kj} = |A|$ எனவும்

$i\neq j$ என்றால் $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{kj} = 0$ எனவும் அணிக்கோவைகளின் பண்புகளிலிருந்து அறிவோம்.

$\therefore$ A (சேர்ப்புA) $=$ மூலைவரை $[\,|A|, |A|, \ldots, |A|\,]$

$$= \begin{bmatrix} |A| & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & |A| & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & |A| \end{bmatrix} = |A|\, I \text{ ஆகும்.}$$

இது போல் (சேர்ப்பு A) $A = |A|\, I$ என்றும் நிறுவலாம்.

குறிப்பு 1 : A ஒருமைசேர் அணி என்றால் $|A| = 0$ ஆகும். எனவே, A (சேர்ப்பு A) $= 0$

குறிப்பு 2 : A ஒருமையில் என்றால் $|A| \neq 0$. எனவே,

$$A\left(\frac{1}{|A|}\ \text{சேர்ப்பு } A\right) = \left(\frac{1}{|A|}\ \text{சேர்ப்பு } A\right) A = I \text{ ஆகும்.}$$

குறிப்பு 3 : $A\cdot$(சேர்ப்பு A) $= |A|\, I$. A-ன் அ.தரம் n என்றால்,

$$|A| \cdot |\text{சேர்ப்பு } A| = |A|^n\, 1 = |A|^n$$

$$\therefore \quad |\text{சேர்ப்பு } A| = |A|^{n-1} \text{ ஆகும்.}$$

§ **3·6. தேற்றம்:**

(சேர்ப்பு A^{T}) = (சேர்ப்பு $A)^{T}$

$A = [a_{ij}]$, $A^{T} = [b_{ij}]$ என்போமானல் $b_{ij} = a_{ji}$ என அறிவோம்.

a_{ij}, b_{ij} இவற்றின் இணைக்காரணிகளை முறையே A_{ij}, B_{ij} எனக் குறிப்போம்.

அப்படியானல், $A_{ij} = B_{ji}$. இப்பொழுது,

[சேர்ப்பு $A]_{ji} = A_{ij}$, [சேர்ப்பு $A^{T}]_{ji} = B_{ij} = A_{ji}$

$\therefore$ [(சேர்ப்பு $A)^{T}]_{ji} = A_{ji}$ = [சேர்ப்பு $A^{T}]_{ji}$

$\therefore$ (சேர்ப்பு $A)^{T}$ = (சேர்ப்பு A^{T})

§ **3·7. தேற்றம்:**

திருப்பு விதி (Reversal law)

(சேர்ப்பு AB) = (சேர்ப்பு B) (சேர்ப்பு A)

நிரூபணம்:

(AB) (சேர்ப்பு B) (சேர்ப்பு A) = A ($B\cdot$ சேர்ப்பு B) சேர்ப்பு A
= $A(\,|B|\,I)\cdot$ சேர்ப்பு A
= $|B|\cdot AI\cdot$ சேர்ப்பு A
= $|B|\cdot(A\cdot$ சேர்ப்பு $A)$
= $|B|\cdot|A|\cdot I$
= $|AB|\,I$

அடுத்து (சேர்ப்பு B)$\cdot$ (சேர்ப்பு A) (AB)
= சேர்ப்பு $B\cdot$ {(சேர்ப்பு A)$\cdot A$}$\cdot B$
= (சேர்ப்பு B)$\cdot(\,|A|\,I)\cdot B$
= $|A|$ {(சேர்ப்பு B)$\cdot B$}
= $|A|\,|B|\,I = |AB|\,I$

ஆனல், AB (சேர்ப்பு AB) = $|AB|\,I$ = (சேர்ப்பு AB) AB

எனவே, (சேர்ப்பு AB) = (சேர்ப்பு B) (சேர்ப்பு A) ஆகும்.

எ-கா. **1:** A ஒருமையில் அணி என்றால் சேர்ப்பு (சேர்ப்பு A) $= |A|^{n-2}. A$ என நிறுவுக.

$B\cdot$(சேர்ப்பு B) $= |B| I$ என அறிவோம். எனவே, (சேர்ப்பு A) {சேர்ப்பு (சேர்ப்பு A)} $=$ | சேர்ப்பு A | $I = |A|^{n-1} I$ ஆதலால்,

$A\cdot$ (சேர்ப்பு A) {சேர்ப்பு (சேர்ப்பு A)} $= A\cdot |A|^{n-1} I$
$= |A|^{n-1}\cdot A$

(அ-து) $|A| I${சேர்ப்பு (சேர்ப்பு A)} $= |A|^{n-1}\cdot A$

$\therefore$ சேர்ப்பு (சேர்ப்பு A) $= |A|^{n-2}\cdot A$

எ-கா. **2:** A சமச்சீரெனின் (சேர்ப்பு A) யும் சமச்சீரென நிறுவுக.

A சமச்சீராதலால் $A^T = A$. இப்பொழுது

(சேர்ப்பு A)^T = (சேர்ப்பு A^T)
= (சேர்ப்பு A) $(\because A^T = A)$

எனவே, சேர்ப்பு A-யும் சமச்சீராகும்.

§ 3·8. மாற்றீடு செய் அணிகள் :

A, B என்ற சதுர அணிகள் $AB = BA$ என்றவாறு அமையுமானால் அவை பரிமாற்று அணிகள் (commute) எனப்படும்.

$AB = -BA$ என்றால் A, B என்பன எதிர் பரிமாற்று (anticommute) அணிகள் எனப்படும்.

§ 3·9. எதிர்மறை அணிகள் (Inverse Matrices)

A ஆனது ஒரு $m \times n$ அணி என்போம்.

(i) B என்ற ஒரு $n \times m$ அணியானது $BA = I_n$ என்றமையுமாறு உளதாயின் A ஆனது இடப்புற ஒருமையில் (non singular in the left) அணி எனப்படும். மேலும், B ஆனது A-ன் இடப்புற எதிர்மறை அணி (left inverse of A) எனப்படும்.

(ii) C என்ற ஒரு $n \times m$ அணியானது $AC = I_m$ என்றமையுமாறு உளதாயின் A ஆனது வலப்புற ஒருமையில், (non singular in the right) அணி எனப்படும். மேலும், B ஆனது A-ன் வலப்புற எதிர்மறை (right inverse) அணி எனப்படும்.

ஒரு சதுர அணியானது இடது, வலது ஒருமையில் என்ருல் அவ்வணியே ஒருமையில் அணியாகும். மேலும், சதுர அணிகள் ஒருபுறம் ஒருமையில் இருந்தால் மறுபுறமும் ஒருமையில் இருக்கும் என எளிதில் நிறுவலாம். மேலும், இவ்விரு (இடது, வலது) எதிர் மறைகளும் ஒன்றே எனவும் நிறுவலாம்.

A, B என்பவை ஒரே அ. தரங்கொண்ட சதுர அணிகள் என்க. $AB = BA = I$ என்றவாறு A, B அமையுமாஞல் A ஆனது B-ன் எதிர்மறை எனவும் B ஆனது A-ன் எதிர்மறை எனவும் அழைக்கப்படும். A-ன் எதிர்மறை அணியை (Inverse matrix) A^{-1} என்று குறிப்பது நடைமுறை வழக்கமாகும்.

§ 3.10. தேற்றம்:

ஒரு சதுர அணி A ஆனது ஒருமையில் என்ருல், என்ருல் மட்டுமே, அதற்கு எதிர்மறை உளதாகும்.

நிரூபணம் :

A ஆனது ஒருமையில் என்க. $\therefore \ |A| \neq 0.$

$B = \dfrac{1}{|A|}$ (சேர்ப்பு A) என்று கொள்வோமாஞல்

$$AB = A.\ \frac{1}{|A|}\ (\text{சேர்ப்பு } A) = \frac{1}{|A|} \cdot A\ (\text{சேர்ப்பு } A)$$

$$= \frac{1}{|A|} \cdot |A|\ I = I$$

$$BA = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{சேர்ப்பு } A) \cdot A = \frac{1}{|A|} \cdot |A|\ I = I$$

$AB = BA = I$ ஆதலால், $B = \dfrac{1}{|A|}$ (சேர்ப்பு A) ஆனது

A-ன் எதிர்மறை அணியாகும். $\therefore\ |A| \neq 0$ என்ருல் A^{-1} உளது. அடுத்து A-ன் எதிர்மறை A^{-1} உளதாயின்

$$A A^{-1} = I \quad \therefore\ |A \cdot A^{-1}| = |I| = 1$$

(அ-து) $|A| \cdot |A^{-1}| = 1.$ எனவே, $|A| \neq 0.$

§ 3·11. தேற்றம் :

ஒரு சதுர அணிக்கு எதிர்மறை உளதாயின், அவ்வெதிர் மறையானது தனித்தன்மை (unique) வாய்ந்ததாகும்.

நிரூபணம் :

சதுர அணி A-ன் எதிர்மறைகள் B, C என்போம்.

அப்படியானால், $AB = BA = I$

$AC = CA = I$ ஆகும்.

இப்பொழுது
$$\begin{aligned} B &= BI \\ &= B(AC) \\ &= (BA)C \\ &= IC \\ &= C \end{aligned}$$

எனவே $\overset{-1}{A}$ ஆனது உளதாயின், அது தனித்தன்மை வாய்ந்த தாகும்.

ஓர் அணியின் எதிர்மறையைப் பற்றிக்கூறும் பின்வரும் பகுதிகளில், அவ்வணியானது (i) சதுர அணி (ii) ஒருமையில் அணி என சொல்லாமலேயே எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

குறிப்பு **1**. A ஒருமையில் என்றால் $A^{-1} = \frac{1}{|A|}$(சேர்ப்புA) ஆகும். ஓர் அணி A-ன் எதிர்மறையைக் காண்பதற்கு முதலில் அவ்வணியின் "சேர்ப்பு" கண்டுபிடித்து பின் இச்சேர்ப்பை, $\frac{1}{|A|}$ ஆல் பெருக்குவது ஒரு முறையாகும்.

குறிப்பு **2**. A^{-1} உளதாயின், $|A^{-1}| \neq 0$

§ 3·12. தேற்றம் :

(i) $\overset{-1}{(I)} = I$

(ii) $\overset{-1}{(\alpha A)} = \overset{-1}{\alpha}\,\overset{-1}{A}$ (α எண்ணி)

(iii) $\overset{-1}{\left(\overset{-1}{A}\right)} = A$ என நிறுவுக.

நிரூபணம் :

(i), (ii) பயிற்சியாக விடப்பட்டுள்ளது.

$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$ என்பதை மட்டும் இங்கு நிறுவுவோம்.

$A\,A^{-1} = I$ ஆதலால், $|A|\;|A^{-1}| = 1.$

$\therefore\;\; |A^{-1}| = |A|^{-1} \neq 0$ எனவே $\left(A^{-1}\right)^{-1}$ உளது.

மேலும், $A^{-1}A = I$ என அறிவோம். இருபுறமும் $\left(A^{-1}\right)^{-1}$ ஆல் முன் பெருக்க,

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} A^{-1} A = \left(A^{-1}\right)^{-1} I$$

ie. $IA = \left(A^{-1}\right)^{-1}$

ie. $A = \left(A^{-1}\right)^{-1}$ ஆகும்.

§ 3·13. தேற்றம் :

திருப்பு விதி: A, B ஒருமையில் எனின் $(AB)^{-1} = B^{-1}\;A^{-1}$ ஆகும்.

$|AB| = |A|\;|B| \neq 0$. எனவே $(AB)^{-1}$ உளது.

மேலும், $AB\,(AB)^{-1} = (AB)^{-1}(AB) = I$ என அறிவோம்.

இப்பொழுது,

$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(B\,B^{-1}\right)A^{-1} = A\,I\,A^{-1} = A\,A^{-1} = I$$

$$\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) = B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

$\therefore\;\; (AB)^{-1} = B^{-1}\;A^{-1}$ ஆகும்.

கிளைத் தேற்றம் :

$$(A\,B\,C\,D)^{-1} = D^{-1}\,C^{-1}\,B^{-1}\,A^{-1}$$

§ 3.14. தேற்றம் :

(i) $(A^{\mathsf{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathsf{T}}$

(ii) $(A^{-1})^{*} = (A^{*})^{-1}$ ஆகும்.

நிரூபணம் :

(ii) $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ என அறிவோம்.

$\therefore \quad (AA^{-1})^{*} = (A^{-1}A)^{*} = I^{*} = I$

(அ-து) $(A^{-1})^{*} A^{*} = A^{*} (A^{-1})^{*} = I$ (திருப்பு விதி)

எனவே, $(A^{-1})^{*}$ ஆனது A^{*}-ன் எதிர்மறையாகும்.

(அ-து) $(A^{*})^{-1} = (A^{-1})^{*}$ இதே முறைப்படி (i) ஐயும் நிரூபிக்கலாம்.

§ 3.15. தேற்றம் :

ஒரு களம் F-ன் மீதமைந்துள்ள, ஒரே அணித்தரங் கொண்ட எல்லா ஒருமையில் அணிகளின் கணம் G ஆனது அணிப்பெருக்கல் என்ற செயலின்கீழ் ஒரு குழுவாகும்.

நிரூபணம்-:

ஓர் அணியிலுள்ள எல்லா உறுப்புகளும் ஒரே களம் F ஐச் சார்ந்ததெனின் அவ்வணியானது அக்கணத்தின் மீதமைந் துள்ளது என்ற வரையறையையும், ஒரு களத்திலுள்ள உறுப்புகளின் பண்புகளையும், இங்கு நினைவு கூர்ந்தோமானால், பின்வருபவை எளிதில் விளங்கும்.

(i) $A, B \in G$ என்றால் AB-யும் G-ல் உள்ளது. அதாவது அணிப் பெருக்கலின் கீழ் G ஆனது அடைப்புள்ளது (closed)

(ii) $A, B, C \in G$ என்றால்,

$(AB)\,C = A\,(BC)$ — அணிப்பெருக்கல் **சேர்ப்பு** விதிக்குட் பட்டது.

(iii) I அணி அலகெனின் $|I| \neq 0$ (அ-து) I ஒருமையில்

$\therefore \quad I \in G$. மேலும், $AI = IA = A$

எனவே G-ல் அலகு உறுப்பு (identity element) உள்ளது.

(iv) $A \in G$ என்றால் A ஒருமையில் ஆகும். மேலும், $\overset{-1}{A}$ ம் ஒருமையில் ஆதலால், $\overset{-1}{A} \in G$; $\overset{-1}{A}$ தனித்தன்மை வாய்ந்தது. எனவே ஒவ்வொரு $A \in G$-க்கும் $\overset{-1}{A}$ என்ற தனித்தன்மை வாய்ந்த அணியானது $A\overset{-1}{A} = \overset{-1}{A}A = I$ என்றவாறுள்ளது.

எனவே G-ல் எதிர்மறை உறுப்பு (inverse element) உள்ளது.

ஆதலால், G ஆனது அணிப்பெருக்கலின் கீழ் ஒரு குழுவாகும்.

குறிப்பு: $A, B \in G$ என்றால் $AB \neq BA$. எனவே G ஆனது ஒரு பரிமாற்றுக் குழுவல்ல.

ஆனால், ஒரே அணித்தரம் கொண்ட எல்லா ஒருமையில், மாற்றீடு செய் அணிகளின் கணத்தை மட்டும் எடுத்துக் கொண்டால், இக்கணமானது 'பெருக்கலின்' கீழ் ஒரு பரிமாற்றுக்குழுவாகும்.

§ 3.16 தேற்றம்:

ஒரு களம் F-ன் மீதமைந்துள்ள, ஒரே அணித்தரங் கொண்ட எல்லா சதுர அணிகளின் கணம் R ஆனது, அணிக்கூட்டல், பெருக்கல் செயல்களில் ஒரு வளையமாகும்.

நிரூபணம்:

(i) $A, B \in R$ என்றால் $A+B \in R$.

(அ-து) R அடைப்புள்ளது

(ii) $A, B, C \in R$ என்றால் $A+(B+C) = (A+B)+C$ எனவே அணிக்கூட்டல் சேர்ப்பு விதிக்குட்பட்டது.

(iii) $A+0 = 0+A = A$ எனவே R-ல் கூட்டல் அலகு 0 உள்ளது.

(iv) ஒவ்வொரு $A \in R$-ற்கும் ஏற்றாற்போல் $B = -A \in R$ ஆனது

$A+B = B+A = 0$ ஆக உள்ளது.

(அ-து) R-ல் கூட்டல் எதிர்மறை உள்ளது.

(v) $A, B \in R$ என்றால் $A+B = B+A$ ஆதலால், அணிக் கூட்டலானது பரிமாற்று விதிக்குட்பட்டது.

(vi) $A, B \in R$ என்றால் $AB \in R$. (அ-து) அணிப் பெருக்கலின் கீழ் R அடைப்புள்ளது.

(vii) $A, B, C \in R$ என்றால் $A(BC) = (AB)C$

$\therefore$ அணிப்பெருக்கல் சேர்ப்பு விதிக்குட்பட்டது.

(viii) $A, B, C \in R$ என்றால் (a) $A(B+C) = AB+AC$
(b) $(A+B)C = AC+BC$

எனவே அணிப்பெருக்கலானது கூட்டலைச் சார்ந்த பங்கீட்டு விதிக்குட்பட்டது. எனவே R ஒரு வளையமாகும்.

குறிப்பு: இவ்வளையத்தில் பெருக்கல் அலகு I உள்ளது.

ஆனால்,

(i) எல்லா $A, B \in R$-ற்கும் $AB \neq BA$

(ii) எல்லா $A \in R$-ற்கும் A^{-1} வரையறுக்கப்படவில்லை. ஏனெனில், $A \in R$ ஒருமைச்சேர் அணியாகவும் இருக்கலாம்.

இந்த இரு நிபந்தனைகளும் நிறைவு செய்யப்படாததால் இது ஒரு களமல்ல என அறிகிறோம். இதிலிருந்து, ஒரு களத்தின் மீதமைந்த ஒரே அணித்தரங் கொண்ட எல்லா ஒருமையில் மாற்றீடு செய் அணிகளின் கணமும் ஒரு களமாகும் என்பது தெளிவு. (A ஒருமையில் $\Longrightarrow A$ ஒரு சதுர அணி)

எடுத்துக்காட்டு 1:

A, B-க்கள் மாற்றீடு செய் அணிகள் என்றால் A^{-1}-ம், B^{-1}-ம் மாற்றீடு செய் அணிகள் என நிறுவுக.

தரவின்படி $AB = BA$

$\therefore (AB)^{-1} = (BA)^{-1}$

(அ-து) $B^{-1}A^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

எ-கா. **2.** A, B என்பவை சமச் சீரணிகள். A-யும் B-யும் மாற்றீடு செய்வன என்றால், AB^{-1} சமச்சீர் என நிறுவுக.

தரவின்படி $A^T = A$, $B^T = B$. மேலும், $AB = BA$.

இப்பொழுது,

$$B^{-1}(AB)\,B^{-1} = B^{-1}(BA)\,B^{-1} \quad (\because AB = BA)$$

$$ie.\quad B^{-1}A\left(BB^{-1}\right) = \left(B^{-1}B\right)AB^{-1}$$

$$ie.\quad B^{-1}AI = IAB^{-1}$$

$$ie.\quad B^{-1}A = AB^{-1} \qquad \ldots\ldots(1)$$

(A-யும் B^{-1}-யும் மாற்றீடு செய்வன)

மேலும், $\left(AA^{-1}\right)^{T} = \left(A^{-1}\right)^{T}A$

$$ie.\quad I = \left(A^{-1}\right)^{T}A$$

$$\therefore\quad \left(A^{-1}\right)^{T} = A^{-1} \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

இதுபோல் $\left(B^{-1}\right) = B^{-1}$ (A^{-1}, B^{-1} சமச்சீர்)

இப்பொழுது,

$$\left(AB^{-1}\right)^{T} = \left(B^{-1}A\right) \quad (1) \text{ லிருந்து}$$

$$= A^{T}\left(B^{-1}\right)^{T}$$

$$= AB^{-1} \quad \left(\because A^{T} = A, \left(B^{-1}\right)^{T} = B^{-1}\right)$$

$\therefore$ AB^{-1}-ம் சமச்சீராகும்.

எ–கா. 3. $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ என்றால் A^{-1} அமைக்கவும்.

$$|A| = 3\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3(0+2) + 2(-3-1) + 2(2-0)$$

$$= 6 - 8 + 4 = 2 \neq 0$$

$\therefore$ A^{-1} உள்ளது.

$$\text{சேர்ப்பு } A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & -7 & 5 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ \overset{-1}{A} = \frac{1}{|A|}\ (\text{சேர்ப்பு } A) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ ஆகும்.}$$

§ 3.17. கூறிடல் மூலம் ஓர் அணியின் எதிர்மறை காணல்: (Inverse of a Matrix by Partitioning)

$$A = \begin{bmatrix} \underset{p\times p}{A_{11}} & \underset{p\times q}{A_{12}} \\ \hline \underset{q\times p}{A_{21}} & \underset{q\times q}{A_{22}} \end{bmatrix}$$

என்றவாறு $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ என்ற அணியைக் கூறிடுவோம். $(p+q=n)$. $\overset{-1}{A} = B = [b_{ij}]_{n\times n}$ என்க. இதே முறையில் B-யை

$$B = \begin{bmatrix} \underset{p\times p}{B_{11}} & \underset{p\times q}{B_{12}} \\ \hline \underset{q\times p}{B_{21}} & \underset{q\times q}{B_{22}} \end{bmatrix}$$

என்று கூறிடுக.

$AB = I_n$ ஆதலால், $A_{11}\,B_{11} + A_{12}\,B_{21} = I_p$ ....(1)

$A_{11}\,B_{12} + A_{12}\,B_{22} = 0$ ....(2)

மேலும், $BA = I_n$ ஆதலால்,

$B_{21}\ A_{11} + B_{22}\ A_{21} = 0$ ....(3)

$B_{21}\ A_{12} + B_{22}\,A_{22} = I_q$ ஆகும். ....(4)

இந்நான்கு சமன்பாடுகளுக்கும் தீர்வு காண,

$\therefore$ $B_{22} = \overset{-1}{\xi}$ என்க. அப்படியானால் (ii) லிருந்து,

$$A_{11} B_{12} = -A_{12} \cdot \overset{-1}{\xi} \quad \therefore \quad B_{12} = -\left(\overset{-1}{A_{11}} A_{12}\right) \overset{-1}{\xi}$$

(iii) லிருந்து, $B_{21} = -\overset{-1}{\xi}\left(A_{21} \overset{-1}{A_{11}}\right)$

(i) லிருந்து, $B_{11} + \overset{-1}{A_{11}} A_{12} \cdot B_{21} = \overset{-1}{A_{11}}$

$$\therefore \quad B_{11} = \overset{-1}{A_{11}} + \left(\overset{-1}{A_{11}} A_{12}\right) \overset{-1}{\xi} \left(A_{21} \overset{-1}{A_{11}}\right)$$

இறுதியாக (iv) லிருந்து, $-\overset{-1}{\xi}\left(A_{21} \overset{-1}{A_{11}}\right) A_{12} + \overset{-1}{\xi} \cdot A_{22} = I$

$$\therefore \quad \xi = A_{22} - \left(A_{21} \overset{-1}{A_{11}}\right) A_{12}$$

இவ்வாறு $\overset{-1}{A}$ -ன் கிளை அணிகள், அதிலிருந்து $\overset{-1}{A}$ கிடைக்கும்.

நடைமுறையில் நாம் முதலில் A_{11}-ன் அ·தரம் $(n-1)$ ஆக இருக்கும்படி எடுத்துக் கொள்வோம். $\overset{-1}{A_{11}}$ காண,

$$P_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \; P_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \; P_4 = \ldots\ldots$$

என்று எடுத்துக்கொண்டு முதலில் $\overset{-1}{P_2}$ காண்போம். அதன்பின்

P_3 யை $P_3 = \left[\begin{array}{c|c} p_2 & [a_{13}] \\ \hline [a_{31} \;\; a_{32}] & [a_{33}] \end{array}\right]$ என்றவாறு கூறிட்டு $\overset{-1}{P_3}$

காணலாம். இவ்வாறு அடுத்தடுத்து செயல்பட, இறுதியாக நமக்கு $\overset{-1}{A}$ கிடைக்கும்.

இம்முறையை நாம் கடைப்பிடிக்கும் போது, முக்கியமாக கவனிக்கவேண்டியது A_{11} ஆனது ஒருமையில் இருக்க வேண்டும். இல்லாவிடில் $\overset{-1}{A_{11}}$ ஆனது வரையறுக்கப்படாது. அப்படியே A_{11} ஆனது ஒருமைசேராக இருந்தால் A-ல் ஆதார மாற்றங்கள் மூலம் (அடுத்த தலைப்பில் பார்க்கவும்) கிடைக்கும் அணி B-ல் B_{11} ஆனது ஒருமையில்லாததாக எடுத்துக்

கொள்வோம். இப்பொழுது $\overset{-1}{B}$ ஐ கூறிடல் மூலம் காணலாம். பின் $\overset{-1}{B}$-ல் ஆதார எதிர்மாற்றம் செய்தால் $\overset{-1}{A}$ கிடைக்கும்.

எ.கா 4: $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$-ன் எதிர்மறையைக் கூறிடல் மூலம் காண்க.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 2 & -3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]$$ என்க. இங்கு

$A_{11} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ஆதலால், $|A_{11}| \neq 0$.

இப்பொழுது $\overset{-1}{A_{11}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ ஆகும்.

$$\begin{aligned} \therefore \quad \xi &= A_{22} - A_{21}\left(\overset{-1}{A_{11}} A_{12}\right) \\ &= [-3] - [-1 \ \ 2]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= [-3] - [-4] = [1] \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \overset{-1}{\xi} = [\,1\,]$$

$\overset{-1}{A} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$ என்றால்,

$$B_{11} = \overset{-1}{A_{11}} + \left(\overset{-1}{A_{11}} A_{12}\right)\overset{-1}{\xi}\left(A_{21}\overset{-1}{A_{11}}\right)$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad B_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix}[1]\,[-1 \ \ 2]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ \frac{5}{2} & -5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -\frac{7}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$B_{12} = -\left(\overset{-1}{A_{11}} A_{12}\right)\overset{-1}{\xi} = -\begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix} [1] = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$B_{21} = -\overset{-1}{\xi}\left(A_{21} \overset{-1}{A_{11}}\right) = -[1]\ [-1\ \ 2] = [1\ \ -2]$$

$B_{22} = \overset{-1}{\xi} = [1]$. ஆதலால், $\overset{-1}{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

எ-கா **5**: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$-ன் எதிர்மறை கூறிடல் மூலம் காண்க.

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},\ p_3 = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right],$$

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$ என்க.

அப்படியானல், $\overset{-1}{P_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ என்பது தெளிவு.

$P_3 = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix},\ \overset{-1}{P_3} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$ என்க.

அப்படியானல்,

$$\overset{-1}{Q_{11}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ஆதலால், இங்கு $\xi = Q_{22} - Q_{21}\left(\overset{-1}{Q_{11}}\ Q_{12}\right)$

$$\therefore\ \xi = [-1] - [0] = [-1].$$

எனவே $\overset{-1}{\xi} = [-1]$. மேலும், $B_{11} = \overset{-1}{Q_{11}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$$B_{12} = -\left(\bar{Q}_{11}^{1}\ Q_{12}\right)\bar{\xi}^{1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{21} = -\bar{\xi}^{1}\left(A_{21}\ \bar{A}_{11}^{1}\right) = [0\ \ 0]\ ;\ \ B_{22} = \bar{\xi}^{1} = [-1].$$

ஆதலால், $\bar{P}_3^{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

அடுத்து $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ என்க. $\bar{A}^{1} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$ ஆகட்டும்.

இங்கு $\bar{A}_{11}^{1} = \bar{P}_3^{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ எனவே

$\xi = A_{22} - A_{21}\left(\bar{A}_{11}^{1}\ A_{12}\right) = [2]$ ஆகும். $\therefore\ \bar{\xi}^{1} = [\frac{1}{2}]$

ஆதலால், $C_{11} = \bar{A}_{11}^{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$,

$$C_{12} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}[\tfrac{1}{2}] = \begin{bmatrix} -5 \\ \frac{3}{4} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

இதுபோல்

$C_{21} = [0\ 0\ 0]$, $C_{22} = [\frac{1}{2}]$ என எளிதில் அறியலாம்.

$$\therefore\ \bar{A}^{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$ ஆகும்.

பயிற்சி 3

1. சோதனை செய்:- (i) மூலைவரை அணியின் சேர்ப்பானது மற்றொரு மூலைவரை அணி

(ii) முக்கோண அணியின் சேர்ப்பானது மற்றொரு முக்கோண அணி

2. A-ன் அ. தரம் 2 எனின் சேர்ப்பு (சேர்ப்பு A) $= A$ என நிறுவுக.

3. A ஆனது சமச்சீர் (ஹெர்மிசியன்) எனின் (சேர்ப்பு A) யும் சமச்சீர் (ஹெர்மிசியன்) என நிறுவுக.

4. A ஆனது n– அ. தரங்கொண்ட சமச்சீர் என்றால், (சேர்ப்பு A) ஆனது n-ன் ஒற்றை எண் மதிப்புகளுக்குச் சமச் சீராகவும், இரட்டையெண் மதிப்புகளுக்கு எதிர் சீராகவும் அமையுமென நிறுவுக.

5. ஒரு சதுர அணி A-யை அதே அணித்தரங்கொண்ட மூலைவரை அணி D ஆல் முன் பெருக்கினால் (பின் பெருக்கினால்) A-ன் ஒவ்வொரு நிரைகளும் (நிரல்களும்) இதையொத்த D-ன் மூலைவரை உறுப்பால் பெருக்கப்படுமென நிறுவுக.

6. ஓர் அணியானது அதே அ. தரங் கொண்ட எல்லா அணிகளோடும் மாற்றீடு செய்யுமென்றால், அவ்வணியானது நிச்சயமாக ஒரு சமமூலை வரை அணியாகும் எனக் காட்டுக.

7. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$-ன் வலப்புற எதிர்மறை அணி

$$\begin{bmatrix} -2 & \frac{4}{5} & \frac{9}{5} \\ 3 & -\frac{4}{5} & -\frac{14}{5} \\ -1 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ எனவும்

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & 5 & -2 \\ 3 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$-ன் இடப்புற எதிர்மறை அணி

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ எனவும்

சோதித்தறிக.

8. பின்வருபனவற்றின் எதிர்மறை அணிகள் காண்க:

(i) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 1+i & 2i \\ 4-6i & 2+3i \end{bmatrix}$

(vi) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ (vii) $\begin{bmatrix} 3i & 5 & 6+7i \\ 4+2i & 1+i & 3-5i \\ 3 & 2-i & 6+i \end{bmatrix}$

(viii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

9. A, B மாற்றீடு செய்வன என்றால் (i) A^{-1}, B (ii) A, B^{-1} மாற்றீடு செய்வன என நிறுவுக.

[குறிப்பு: $A^{-1}(AB)A^{-1} = A^{-1}(BA)A^{-1}$]

10. A ஒருமையில் அணியாக இருக்கும்போது $AB = AC$ என்றால் $B = C$ என நிறுவுக. [குறிப்பு: A^{-1} உளது. $\therefore\ A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC)$. $\therefore\ B = C$]

11. (i) A சமச்சீரணி என்றால் A^{-1}-ம் சமச்சீரெனவும், (ii) B என்ற மற்றொரு சமச்சீரணி A-யோடு மாற்றீடு செய் என்றால் $A^{-1}B$, $A^{-1}B^{-1}$ என்பனவும் சமச்சீரே எனவும் நிறுவுக.

12. மூலைவரை $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$-ன் எதிர்மறை என்ன? $\alpha_r \neq 0$.

13. $(\bar{A})^{-1} = \overline{(A^{-1})}$ என நிறுவுக.

14. ஒற்றைப்படை அணித்தரங் கொண்ட எல்லா அசமச் சீரணிகளும் ஒருமைசேர் என நிறுவுக. [குறிப்பு: $A^T = -A$. $\therefore\ |A^T| = |-A| = (-1)^n|A| = -|A|$ (n ஒற்றைப் படை). ஆனால், $|A^T| = |A|$. $\therefore\ |A| = -|A|$]

15. எல்லா பூச்சியக் காரணிகளும், பூச்சிய ஆற்றலணிகளும் ஒருமைசேர் என நிறுவுக.

16. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$ என்ருல் a, b, c, d-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் (எண்) A, B மாற்றீடு செய் அணிகளென நிறுவுக.

17. $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \cos\Phi & -\sin\Phi \\ \sin\Phi & \cos\Phi \end{bmatrix}$ என்பவை மாற்றீடு செய் அணிகளென நிறுவுக.

18. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ என்ருல், இவை ஒவ்வொன்றும், மற்றதனேடு எதிர் மாற்றீடுசெய் அணிகளென நிறுவுக.

4. ஆதாரமாற்றங்கள் - அணி அளவை

(Elementary Transformations – Rank of a Matrix)

§ **4·1.** ஒருபடிச் சமன்பாட்டுத் தொகுதியில், சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் காண, அச்சமன்பாடுகளில் செய்யப்படும் மாற்றங்களை யும், அணிக்கோவைகளின் மதிப்புகாண கையாளப்படும் செயல்களையும் கருத்தில் கொண்டு, இவைகளையொத்த செயல்களை அணிகளில் வரையறை செய்கின்றோம். இச்செயல்கள் **ஆதாரமாற்றங்கள்** (elementary transformations) எனப்படும். அவையாவன :-

வகை (Type) **1**: ஓர் அணியின் இரு நிரைகளை (அல்லது நிரல்களை) ஒன்றுக்கொன்று இடமாற்றுதல்; நமது வசதிக்காக ஓர் அணியின் i^{th} நிரையையும் j^{th} நிரையையும் மாற்றுவோ மாஞல் அதனை H_{ij} என்றும், i^{th}, j^{th} நிரல்களை இடமாற்றம் செய்தால் அதனை K_{ij} எனவும் குறிப்போம்.

வகை 2: ஓர் அணியிலுள்ள i^{th} நிரையின் எல்லா உறுப்புகளையும் பூச்சியமில்லா ஓர் எண்ணி α-வால் பெருக்குதல்; இதனை $H_{i(\alpha)}$ எனக் குறிப்போம். இதனையொத்த ஆதார நிரல்மாற்றம் $K_{i(\alpha)}$ ஆகும். $(\alpha \neq 0)$

வகை 3: ஓர் அணியின் i^{th} நிரையோடு, j^{th} நிரையை $\alpha \neq 0$ வால் பெருக்கிக்கூட்டுதல் ; இதனை $H_{ij(\alpha)}$ என்போம். இதனை யொத்த ஆதார நிரல் மாற்றம் $K_{ij(\alpha)}$ ஆகும்.

ஓர் அணியின் நிரைகளில் மட்டும் செய்யப்படும் மேற்கூறிய மாற்றங்களை ஆதார நிரை மாற்றங்களெனவும், நிரல்களில் மட்டும் செய்யப்படும் மாற்றங்களை ஆதார நிரல் மாற்றங்களெனவும் அழைப்பது மரபாகும்.

§ 4·2. சரிநிகர் அணிகள் (Equivalent Matrices)

ஓர் அணி A-ல் மேற்கூறிய ஆதாரமாற்றங்களை முடிவுள்ள எண்ணிக்கைத் தடவை செய்வதால் கிடைக்கப் பெறும் அணியை B என்போமானால், Aஆனது B-க்குச் சரிநிகர் (A is equivalent to B) எனப்படும். இதனை $A \backsim B$ எனக்குறிப்பது நடைமுறை வழக்கமாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & -3 & 4 \\ -2 & 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ என்றால்,

$$A \backsim \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} H_{31} \backsim \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 0 \\ -2 & -5 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} H_{2\,(-1)}$$

$$\backsim \begin{bmatrix} 0 & 10 & 5 & -2 \\ -2 & -5 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} H_{13\,(2)}$$

ஓர் அணியின் நிரைகளில் மட்டும் செய்யப்படும் ஆதார மாற்றங்களால் கிடைக்கப்பெறும் அணியானது, தரப்பட்டுள்ள அணிக்கு நிரை சரிநிகர் (row equivalent) எனவும், நிரல்களில் மட்டும் செய்யப்படும் மாற்றங்களால் கிடைக்கப்பெறும் அணியானது அவ்வணிக்கு நிரல் சரிநிகர் (column equivalent) எனவும் அழைக்கப்படும். மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டில் செயல் பெற்ற எல்லா மாற்றங்களும் ஆதார நிரை மாற்றங்களாதலால், இம்மாற்றங்களால் உருமாற்றம் பெற்ற எல்லா அணிகளும் A-க்கு நிரை சரிநிகராகும்.

§ 4·3. ஆதார எதிர்மாற்றம்: (Inverse Elementary Transformation)

ஓர் அணியில் செய்யப்படும் எந்தவொரு ஆதார மாற்றத்தையும் செயலற்றுப் போகச் செய்யும் மற்றொரு மாற்றமானது, அம்மாற்றத்தையொத்த ஆதார எதிர்மாற்றமெனப்படும். அதாவது ஓர் அணி A-ல் யாதானுமொரு ஆதாரமாற்றம் செய்ய, கிடைக்கப்பெறும் அணி B என்போம். B-ல் எந்தவொரு மாற்றம் செய்தால் மீண்டும் A கிடைக்குமோ, அம்மாற்றமானது A-ல் நடைபெற்ற மாற்றத்தின் ஆதார எதிர்மாற்றமெனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, அணி A-ல் முதல்வகை ஆதார மாற்றமான H_{ij} ஆல் B கிடைக்குமானால், B-ன் i, j^{th} நிரைகளை

இடமாற்றம் செய்தால் மீண்டும் A கிடைக்கும். எனவே H_{ij}-ன் ஆதார எதிர்மாற்றமும் H_{ij}-யே ஆகும். இதனை $(H_{ij})^{-1} = H_{ij}$ எனக் குறிப்போம்.

பின்வருபவை, ஒவ்வொரு ஆதாரமாற்றத்தையும் சார்ந்த ஆதார எதிர்மாற்றங்களாகும் என்பது எளிதில் விளங்கும்.

(i) $(H_{ij})^{-1} = H_{ij}$; $(K_{ij})^{-1} = K_{ij}$

(ii) $H_i^{-1}(\alpha) = H_{i(1/\alpha)}$; $K_i^{-1}(\alpha) = K_{i(1/\alpha)}$ $\alpha \neq 0$

(iii) $H_{ij}^{-1}(\alpha) = H_{ij}(-\alpha)$; $K_{ij}^{-1}(\alpha) = K_{ij}(-\alpha)$,,

மேலும், மேற்கூறிய மூன்றும் முடிவுகளிலிருந்து, ஓர் ஆதார மாற்றத்தின் எதிர்மாற்றமானது, அதே வகையைச்சார்ந்த மற்றொரு ஆதார மாற்றம் என்பது வெளிப்படையாகும்.

§ 4.4. ஆதார அணிகள் : (Elementary Matrices)

அணி அலகு I-ல் ஆதாரமாற்றங்களைச் செய்வதால் கிடைக்கப்பெறும் அணிகள் ஆதார அணிகள் எனப்படும். மேலும், I-ல், H_{ij} என்ற ஆ.மாற்றத்தால் கிடைக்கும் ஆதார அணியை E_{ij} என்றும்
$H_i(\alpha)$,, ,, ,, $E_i(\alpha)$,,
$H_{ij}(\alpha)$,, ,, ,, $E_{ij}(\alpha)$,,
குறிப்போம். இதுபோல் I-ல் k_{ij}, $k_i(\alpha)$, $k_{ij}(\alpha)$ என்ற ஆதார மாற்றங்களால் கிடைக்கும் ஆதார அணிகளை முறையே F_{ij}, $F_i(\alpha)$, $F_{ij}(\alpha)$ என்று குறிப்போம். மேலும், $E_{ij} = F_{ij}$, $E_i(\alpha) = F_i(\alpha)$, $E_{ij}(\alpha) = F_{ji}(\alpha)$ என்ற உண்மைகளை எளிதில் சோதித்தறியலாம்.

$|I| = 1$ என அறிவோம். மேலும், அணிக்கோவைகளின் பண்புகளிலிருந்து, ஓர் அணிக்கோவை $\triangle$-ல் H_{ij}, $H_i(\alpha)$, $H_{ij}(\alpha)$ என்பனவற்றை யொத்த மாற்றங்களைச் செய்வதால் கிடைக்கும் அணிக்கோவைகள் முறையே $\triangle_1, \triangle_2, \triangle_3$ என்றால், $\triangle_1 = -\triangle$; $\triangle_2 = \alpha . \triangle$, $\triangle_3 = \triangle$ என அறிவோம். ($\alpha \neq 0$ என்பது நமது வரையறை என்பதைக் கவனிக்கவும்).

ஆதலால், $|E_{ij}| = -1$; $|E_i(\alpha)| = \alpha \neq 0$; $|E_{ij}(\alpha)| = 1$ என்பது எளிதில் விளங்கும். எனவே ஆதார அணிகள் ஒருமையில் அணிகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ என்றால்

$$E_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = F_{23} \quad ; E_2(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} = F_2(\alpha)$$

$$E_{23}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = F_{32}(\alpha) \quad \text{மேலும்,} \quad E^{T}_{23}(\alpha) = F_{23}(\alpha)$$

என்பதை இங்கு கவனிக்கவும்.

§ 4·5. தேற்றம் :

(i) $m \times n$ அஃதரங்கொண்ட ஓர் அணியில் செய்யப்படும் ஒவ்வொரு ஆதார நிரை மாற்றங்களையும், அவ்வணியை இம் மாற்றங்களை யொத்த $m \times m$ ஆதார அணிகளால் முன் பெருக்கு வதன் மூலமும்,

(ii) அவ்வணியில் செய்யப்படும் ஒவ்வொரு ஆதார நிரல் மாற்றங்களையும், அவ்வணியை இம்மாற்றங்களையொத்த $n \times n$ ஆதார அணிகளால் பின் பெருக்குவதன் மூலமும், பெறலாம்.

நிரூபணம் :

A, B என்பவை முறையே $m \times n$, $n \times p$ அணித்தரமுடைய அணிகளென்போம்.

$$A = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \cdots \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix}, \quad B = [C_1 \ C_2 \ \ldots \ C_p] \quad \text{என்க.}$$

அப்படியானால்,

$$C = AB = \begin{bmatrix} R_1 C_1 & R_1 C_2 & \ldots & \ldots & \ldots & R_1 C_p \\ R_2 C_1 & R_2 C_2 & \ldots & \ldots & \ldots & R_2 C_p \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_m C_1 & R_m C_2 & \ldots & \ldots & \ldots & R_m C_p \end{bmatrix} \text{ ஆகும்.}$$

இவ்வடிவிலிருந்து, A-ன் நிரைகளில் யாதானுமொரு ஆதார நிரைமாற்றம் நிகழ்வுறுமானால் AB-ன் நிரைகளிலும் அதே வகை ஆதார நிரைமாற்றம் நிகழ்வுறும் என்றும்,

B-ன் நிரல்களில் யாதானுமொரு ஆதார நிரல்மாற்றம் நடைபெறுமானால், அதே வகை ஆதார நிரல்மாற்றம் AB-ன் நிரல்களிலும் நடைபெறுமென அறிகிறோம். இதிலிருந்து, AB-ல் நடைபெற வேண்டிய எந்தவொரு ஆதார நிரைமாற்றத்தையும், முன் பெருக்கலணி A-ல் செய்வதன் மூலமும், AB-ல் செய்யவேண்டிய எந்தவொரு ஆதார நிரல்மாற்றத்தையும் பின் பெருக்கல் அணி B-ல் செய்வதன் மூலமும், பெறலாம் என அறிகிறோம். ....(1)

(இது ஒரு கிளைக் கோட்பாடு (lemma) ஆகும்)

இப்பொழுது A யாதானுமொரு $m \times n$ அணி என்க.

$A = I_m A$ என அறிவோம். எனவே கிளைக்கோட்பாட்டின்படி A-ல் செய்யப்பட வேண்டிய எந்தவொரு ஆதார நிரை மாற்றத்தையும் முன் பெருக்கலணி I_m-ல் செய்வதன்மூலம் பெறலாம் – அதாவது A-யை இம்மாற்றத்தையொத்த ஆதார அணியால் முன் பெருக்குவதன் மூலம் பெறலாம்.

இதுபோல் $A = A\,I_n$ ஆதலால், A-ல் செய்யவேண்டிய எந்த வொரு ஆதார நிரல் மாற்றத்தையும், A-யை இம்மாற்றத்தை யொத்த ஆதார அணியால் பின் பெருக்குவதன்மூலம் பெறலாம்.

§ 4·6. ஆதார அணிகளின் எதிர்மறைகள் (Inverses of Elementary Matrices)

ஆதார அணிகள் ஒருமையில் என முன்பே பார்த்துள்ளோம். எனவே இவ்வாதார அணிகளுக்கு எதிர்மறை அணிகள் உளது.

மேலும், ஆதார அணி E_{ij}-ல் ஆதாரமாற்றம் H_{ij}-மூலம் I கிடைக்கும். ஆனால், § 4·5-ன்படி இத்தகைய ஆதார நிரை மாற்றங்களை இவற்றையொத்த ஆதார அணிகளால் முன் பெருக்குவதால் பெறலாம். எனவே

$$E_{ij} . \; E_{ij} = I \text{ ஆகும்.} \quad \therefore \; E_{ij}^{-1} = E_{ij} \text{ ஆகும்.}$$

இதுபோல் $E_i\,(1/\alpha) . \; E_i\,(\alpha) = I$ ஆதலால், $E_i^{-1}(\alpha) = E_i\,(1/\alpha)$ எனவும்

$E_{ij}\,(-\alpha) . \; E_{ij}\,(\alpha) = I$ ஆதலால், $E_{ij}^{-1}(\alpha) = E_{ij}\,(-\alpha)$ எனவும் அறிகிறோம்.

இம்மூன்று முடிவுகளிலிருந்தும், ஓர் ஆதார அணியின் எதிர்மறையானது அதையொத்த மற்றொரு ஆதார அணி

என்பது விளங்குகின்றது. மேலும்,

$\overset{-1}{H_{ij}}$ என்பதானது ஒரு மாற்றத்தின் எதிர் செயலையும், $\overset{-1}{E_{ij}}$ என்பது ஓர் அணியின் எதிர்மறை அணியையும் குறிக்கின்றது என்பதையும் கவனிக்கவும்.

§ 4·7. அணி அளவை :

ஒரு பூச்சியமில்லா (non zero) அணியில்,

(i) குறைந்தது யாதானுமொரு r சதுர சிற்றணிக் கோவை யாவது (minor of order r) பூச்சியமில்லாமலும்,

(ii) எல்லா $(r+1)$ சதுர சிற்றணிக்கோவைகளும் பூச்சியமாகவும் இருக்குமானுல், அவ்வணியின் அளவை (Rank) r எனப்படும்.

எல்லா $(r+2)$ சதுர சிற்றணிக்கோவைகளும், $(r+1)$ சதுர சிற்றணிக் கோவைகளின் எண்பெருக்கல்களின் கூடுதலாதலால், (ii) ஆவது நிபந்தனை நிறைவு செய்யப்படுமானுல், எல்லா $(r+2)$, $(r+3)$... சதுர சிற்றணிக்கோவைகளும் பூச்சியமாகும். எனவே இவ்வரையறையானது ஓர் அணியின் அளவையை நன்கு தெளிவுபடுத்தியுள்ளது. ஓர் அணி A-ன் அளவையை $R(A)$ என்று குறிப்போம். மேலும், வரையறையிலிருந்து எல்லா n தர ஒருமையில் அணிகளின் அளவையும் n எனவும், முற்றிலும் பூச்சியமில்லா எல்லா அணிகளின் அளவையும் $\geqslant 1$ எனவும் நன்கு அறிவோம். ஆதலால், பூச்சிய அணியின் அளவை 0 என வரையறுக்கப்படுகிறது.

அணிக்கோவைகள், இணைச்சிக்கலெண்கள் இவற்றின் பண்புகளிலிருந்தும், நமது வரையறையின்படியும்

(i) $R(A^{\top}) = R(A)$

(ii) $R(A^*) = R(A)$

(iii) $R(\alpha A) = R(A)$ ($\alpha \neq 0$ எண்ணி)

என்பன நன்கு விளங்கும். எடுத்துக்காட்டாக,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 3 \\ 5 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ என்ருல், இதன் எல்லா 3-சதுர சிற்றணிக்கோவைகளும் பூச்சியமாகும். ஆனுல்,

$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$. எனவே $R(A) = 2$ ஆகும்.

மேலும், $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$-ன் அளவை 1 ஆகும். ஏனெனில், $|-1| \neq 0$.

ஓர் அணியின் அளவையைக் கணக்கிட ஒவ்வொரு முறையும் சிற்றணிக்கோவைகளை எடுத்து மதிப்பு காண்பதென்பது கடினமானதொரு வேலையாகும்.

எனவே நாம், ஓர் அணியின் அளவை மாறுதிருக்கத் தக்கதாகவும், அதே நேரத்தில் அளவையைக் கணக்கிடுவதைச் சுலபமாக்கவும் தக்கதாக சில செயல்களை அணிகளில் வரையறுக்கத் தேவையுள்ளது. இச்செயல்களே நாம் முன் வரையறை செய்துள்ள ஆதாரமாற்றங்களாகும். பின்வரும் தேற்றமானது, ஓர் அணியின் அளவைக் கணக்கிட நமக்கு எளிய ஒரு வழியைக் காண்பிக்கின்றது.

§ 4·8. தேற்றம் : அளவை மாறுதிருக்கும் பண்பு (Invariance of the Rank)

ஓர் அணியில் செய்யப்படும் ஆதாரமாற்றங்களால், அவ்வணியின் தரமோ, அளவையோ மாறுவதில்லை.

நிரூபணம் :

ஆதாரமாற்றங்களால், நிரை நிரல்களின் எண்ணிக்கை மாறுவதில்லையாதலால், அணியின் தரம் மாறுவதில்லை என்பது வெளிப்படையாகும். அடுத்து A என்ற ஒரு $m \times n$ அணியின் அளவை r என்போம். அப்படியானால், A-க்கு $(r+1)$ சதுர சிற்றணிக்கோவைகள் இருக்குமானால் அவையெல்லாம் 0 ஆகும். A-ல் யாதானுமொரு ஆதார நிரைமாற்றத்தால் கிடைக்கப்பெறும் அணியை B என்றும் A-ன் யாதானுமொரு $(r+1)$சதுர சிற்றணிக் கோவையை $|R|$ என்றும், இதையொத்த B-ன் $(r+1)$ சதுர சிற்றணிக்கோவையை $|S|$ என்றும் குறிப்போம்.

A-ன் அளவை r ஆதலால் $|R| = 0$ ஆகும்.

ஆதாரமாற்றங்களால் அணியளவை மாறுவதில்லை என நிரூபிக்க, நாம் ஒவ்வொரு வகை ஆதாரமாற்றத்தையும் எடுத்துக்கொண்டு அதன் விளைவைக் கவனிக்கவேண்டும். எனவே முதலில் முதல் வகை ஆதாரமாற்றமான H_{ij}-யை

எடுத்துக்கொள்வோம். இம்மாற்றத்தால் $|R|$-ல் பின்வரும் மூன்று விளைவுகளில் யாதானுமொன்று நடைபெறலாம்.

(i) $|R|$-ல் எந்தவொரு மாற்றமுமில்லாதிருக்கலாம். (ஏனெனில், $|R|$-ல் இல்லாத எந்த இரு நிரைகளும் இடமாற்றம் பெற்றிருக்கலாம்.)

அப்படியானல், $|R| = |S| = 0$ ஆகும்.

(ii) $|R|$-ல் யாதானுமிரு நிரைகள் இடமாற்றம் பெறலாம்.

அப்படியானல், $|S| = -|R| = 0$

(iii) $|R|$-ன் யாதானுமொரு நிரையும், $|R|$-ல் இல்லாத யாதானுமொரு நிரையும் இடமாற்றம் பெறலாம்.

அப்படியானல், $|S| = \pm\, |A|$-ன் மற்ருெரு $(r+1)$ சதுர சிற்றணிக்கோவை

$= 0$ ($\because$ A-ன் அளவை r)

அடுத்து ஆதார நிரைமாற்றம் $H_{i(\alpha)}$ $(\alpha \neq 0)$ ன் விளைவு என்னவென்று பார்க்கலாம். இம்மாற்றத்தால் $|R|$-ல் பின்வரும் இரு விளைவுகளில் யாதானுமொன்று நடைபெறலாம்.

(i) $|R|$-ல் எந்தவொரு மாற்றமுமிராது (அதாவது i^{th} நிரையானது $|R|$-ல் இடம் பெருமலிருக்கலாம்). எனவே $|R| = |S| = 0$

(ii) $|R|$-ல் யாதானுமொரு நிரையானது $\alpha \neq 0$ தடவை பெருக்கப்படலாம். அப்படியானல், $|S| = \alpha\, |R| = 0$ ஆகும்.

இறுதியாக, ஆதார நிரைமாற்றம் $H_{ij}(\alpha)$-ன் விளைவைக் கவனிப்போம். இம்மாற்றத்தால் $|R|$-ல் பின்வரும் மூன்று விளைவுகளில் யாதானுமொன்று இடம் பெற வாய்ப்புண்டு.

(i) $|R|$-ல் எந்தவொரு மாற்றமுமிராது.

$\therefore \quad |S| = |R| = 0$

(ii) $|R|$-ல் உள்ள ஒரு நிரையோடு, அதன் மற்ருெரு நிரையை α தடவை பெருக்கிக் கூட்டலாம். இப்பொழுதும் $|S| = |R| = 0$

(iii) $|R|$-ன் ஒரு நிரையோடு அதிலில்லாத, $|A|$-ன் ஒரு நிரையை α தடவை பெருக்கிக் கூட்டலாம். அப்படியானல்,

$|S| = |R| \pm \alpha . |A|$-ன் மற்ளுெரு $(r+1)$ சதுர சிற்றணிக்கோவை

$$= 0 \pm \alpha . 0 = 0$$

எனவே A-ல் எந்தவொரு நிரைமாற்றத்தாலும் கிடைக்கப் பெறும் அணி B என்ருல் $R(B) \leqslant R(A)$ ஆகும். ....(1)

மேலும், B-ல் ஆதார எதிர் நிரைமாற்றங்களைச் செய்வதால் A கிடைப்பதால், முன்போல் $R(A) \leqslant R(B)$ என நிறுவலாம் ......(2)

$$\therefore \quad R(A) = R(B) \text{ ஆகும்.}$$

இதே வழியில், A-ல் நிகழ்வுறும் எந்தவொரு ஆதார நிரல் மாற்றத்தாலும் அதன் அளவை மாறுவதில்லை என நிறுவலாம்.

கிளைத்தேற்றம் 1 :

சரிநிகரணிகளின் அளவை சமமாகும்.

கிளைத்தேற்றம் 2 :

ஓர் அணியில் நிகழ்வுறும் ஆதாரமாற்றங்களால் அதன் அளவை மாறுவதில்லை என நிரூபித்துள்ளோம். ஆனுல், இத்தகைய மாற்றங்களை, அவ்வணியை இம்மாற்றங்களையொத்த ஆதார அணிகளால் முன், பின் பெருக்குவதால் பெறலாம் எனவும் அறிவோம். எனவே ஓர் அணியை ஆதார அணிகளால் பெருக்குவதால் அதன் அளவை மாறுவதில்லை.

§ 4·8. ஆனது ஓர் அணியின் அளவையை சிற்றணிக் கோவைகளை எடுக்காது, ஒரு சில ஆதாரமாற்றங்கள் செய்வதன் மூலம், பார்த்த மாத்திரத்திலேயே கணிப்பதற்கு வழி செய்கிறது. எடுத்துக்காட்டாக,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 5 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

B-ன் எல்லா 3-சதுர சிற்றணிக்கோவைகளும் 0.

$$\therefore \quad R(B) = R(A) = 2 \text{ ஆகும்.}$$

ஓர் அணியின் அளவையைக் கணிப்பதற்கு நாம், தேவையில்லாதபோது நிரை, நிரல் மாற்றங்கள் ஒருங்கே செய்து குழப்பத் தேவையில்லை. மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டில் நாம் முற்றிலும் ஆ. நிரை மாற்றங்களே செய்துள்ளோம் என்பதைக் கவனிக்கவும்.

எ.கா. **1.**
$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ \hline -1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$
-ன் எதிர்மறையைக் கூறிடல் மூலம் காண்க.

$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ என்க. இங்கு $|A_{11}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ ஆதலால், A_{11}^{-1} வரையறுக்கப்படவில்லை. எனவே ஆதாரமாற்றங்கள் வழியில் செல்லலாம்.

இப்பொழுது $E_{23}.A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = P$

என்க.

$|P_{11}| \neq 0$. எனவே கூறிடல் மூலம் $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

என்று எளிதில் கிடைக்கும்.

$$\therefore \quad (E_{23}A)^{-1} = P^{-1}$$

$$(\text{அ-து}) \quad A^{-1}E_{23}^{-1} = P^{-1} \quad \therefore \quad A^{-1} = P^{-1}E_{23} = P^{-1}F_{23}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ ஆகும்.}$$

§ 4·9. ஓர் அணியின் ஏறுபடி வடிவம் (Echelon form of a Matrix).

ஒரு $m \times n$ அணி A யானது பின்வரும் கட்டுப்பாடுகளுக்கு உட்பட்டிருந்தால் A ஆனது ஏறுபடி வடிவத்தில் (Echelon form) உள்ளது எனப்படும்.

அக்கட்டுப்பாடுகளாவன :—

(i) முதல் r நிரைகள் ஒவ்வொன்றிலும் குறைந்தபட்சம் ஓர் உறுப்பாவது பூச்சியமில்லாமலும், மற்றெல்லா நிரைகளும் முற்றிலும் பூச்சியமாகவும் இருக்கவேண்டும்.

(ii) i^{th} நிரையிலுள்ள முதல் பூச்சியமில்லா உறுப்பு $(i = 1, 2, \ldots, r)$ 1 ஆகும். இவ்வுறுப்பு இடம்பெறும் நிரல் j_i என்ற எண்ணால் குறிக்கப்படுமானால்,

(iii) $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$ ஆகும்.

(iv) $j_i \, (i = 1, 2, \ldots r)$ என்ற எண்ணால் குறிக்கப்படும் நிரலிலுள்ள பூச்சியமில்லா ஒரே எண்ணனது i^{th} நிரையிலுள்ள 1 மட்டுமே ஆகும்.

இக்கட்டுபாடுகளுக்கு உட்பட்ட அணியை சிலர் canonical matrix எனவும் அழைப்பதுண்டு. மேலும், சிலர் A-யை நிரை ஏறுபடி வடிவத்திலுள்ளது எனவும் (Row Echelon form) இதனை யொத்து நிரல்களில் விதிக்கப்படும் கட்டுப்பாடுகளுக்குட்பட்ட அணியை நிரல் ஏறுபடி வடிவத்தில் (Column Echelon form) உள்ளது எனவும் அழைப்பதுண்டு. எவ்வாறுயினும், நாம் மேற்கூறிய கட்டுப்பாடுகளை நிறைவு செய்யும் அணிகளை வெறுமனே, ஏறுபடி வடிவத்திலுள்ளன என்போம். ஓர் அணியை இவ்வடிவிற்கு சில ஆதாரமாற்றங்கள் மூலம் கொண்டு வருவது இன்றியமையாத ஒன்றாகும் என்பதை ஒருபடிச் சமன் பாடுகளைப் பற்றிய தலைப்பில் காணலாம்.

§ 4·10. தேற்றம் :

ஒவ்வொரு $m \times n$ அணி A-யும், ஏறுபடி வடிவத்திலுள்ள ஓர் அணிக்கு சரி நிகராகும். (அதாவது ஒவ்வொரு அணியையும் ஆதார நிரை மாற்றங்கள் மூலமாக ஏறுபடி வடிவத்திலமைக்க முடியும்)

நிரூபணம் :

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$-யை ஏறுபடி வடிவிலமைக்கவேண்டும் என்க. அணி A-ல் முற்றிலும் பூச்சியமில்லா முதல் நிரலை j_1 எனக் குறிப்போம். $a_{1j_1} \neq 0$ என்றால் ஆதார நிரைமாற்றம் $H_{1}(1/a_{1j_1})$ மூலமாக இவ்வுறுப்பை 1 ஆக மாற்றுவோம். இப்படியில்லாது $a_{1j_1} = 0$ ஆகவும், $a_{pj_1} \neq 0$ ஆகவும் இருந்தால் ஆதார நிரைமாற்றம் H_{1p} (அதாவது p^{th} நிரையையும் முதல் நிரையையும் இடமாற்றுதல்) மூலம் நிரைக்குக் கொண்டு வருக. இம்மாற்றத்தால் $A \backsim B = [b_{ij}]$ கிடைக்குமானால் $b_{1j_1} \neq 0$

ஆகும். எனவே முன் கூறியது போல் B-ல் ஆதார நிரை மாற்றம் $H_{1}(_{1/b_{1j_1}})$ செய்ய இவ்வுறுப்பு 1 ஆகும். இவ்வாருன பின் j_1 நிரலில் மற்றெல்லா உறுப்புகளும் பூச்சியமாகத் தக்கதாக, முதல் நிரையை தகுந்த எண்ணிகளால் பெருக்கி, மற்ற நிரைகளோடு கூட்ட வேண்டும். அதாவது, B-ல் $b_{hj_1} \neq 0$ என்ருல் $(2 \leqslant h \leqslant m)$, h ஆவது நிரையோடு முதல் நிரையை $(-b_{hj_1})$ தடவைப் பெருக்கிக் கூட்டுக. அப்படியாளுல், j_1 நிரலிலுள்ள மற்றெல்லா உறுப்புகளும் பூச்சியமாகிவிடும். மேலும், இம்மாற்றமானது மூன்ருவது வகை ஆதார நிரைமாற்றம் $H_{pq(\alpha)}$ ஆகும். எனவே நாம் இதுவரை ஆதார நிரைமாற்றங்களை மட்டுமே உபயோகித்துள்ளோம்.

B-ல் இம்மாற்றங்களை எல்லாம் செய்தபின் அதன் முதல் நிரையை நீக்கிக் கிடைக்கும் $(m-1) \times n$ அ.தரங்கொண்ட கிளை அணி $C = [c_{ij}]$ யை எடுத்துக்கொள்வோம். இதில் எல்லா நிரைகளும் முற்றிலும் பூச்சியமெனின் இதுவே நமக்குத் தேவையான வடிவமாகும். அப்படியில்லாது, j_2 ஆனது பூச்சியமில்லா உறுப்பைக் கொண்டுள்ள அடுத்த முதல் நிரலைக் குறிக்குமாளுல்,

(i) $C_{2j_2} \neq 0$ என்ருல் முன்போல் $H_{2}(_{1/b_{2j_2}})$ என்ற ஆ.மாற்றம் செய்க.

(ii) $C_{2j_2} = 0$ ஆளுல் $C_{qj_2} \neq 0$ என்ருல் H_{2q} என்ற ஆ.மாற்றம் செய்து முன்போல் செயல்படுக.

(iii) அதன்பின் $H_{st(\alpha)}$ என்ற வகை ஆ.மாற்றம் மூலம் j_2 நிரலிலுள்ள மற்றெல்லா உறுப்புகளையும் பூச்சியமாக்குக.

இவ்வாறு தொடர்ந்து செயல்பட இறுதியாக நமக்கு A-ன் ஏறுபடி வடிவம் கிடைக்கும். மேற்கூறிய வழிமுறைகளில் நாம் ஒவ்வொரு கட்டத்திலும் ஆதார நிரைமாற்றங்களை மட்டும் உபயோகித்துள்ளதால் A ஆனது இந்த ஏறுபடிவடிவிற்கு நிரை சரிநிகராகும்.

குறிப்பு: A ஆனது F என்ற களத்தின் மீதமையுமாளுல், மேலே கூறப்பட்ட வழிமுறைகளை ஆராயுமிடத்து, நமக்கு ஒவ்வொரு கட்டத்திலும் கிடைக்கும் சரிநிகர் அணிகளும் F-ன் மீதமையும் என்பது நன்கு புலஞுகும்.

எ–கா **2.** $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$-க்கு நிரை சரி நிகராக ஏறுபடி வடிவிலுள்ள ஓர் அணி C-யைக் காண்க.

$$A \backsim \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{H_{12}} \backsim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{H_{1}\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\backsim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}_{H_{31}(-2)} \backsim \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{H_{23}}$$

$$\backsim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{H_{2}\left(\frac{1}{2}\right)} \backsim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{H_{12}(1)}$$

$$\backsim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{H_{3}(-1)} \backsim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{H_{13}\left(-\frac{3}{2}\right),\ H_{23}(-1)} = C$$

இங்கு C ஆனது ஏறுபடி வடிவிலுள்ளது. A ஆனது C-க்கு நிரை சரிநிகராகும்.

§ 4·11. ஓர் அணியின் இயல்பு வடிவம்: (Normal form of a Matrix)

ஒரு $m \times n$ அணி A-ன் அளவை $r > 0$ என்க. அப்படியானால், நாம் மேலே விவரித்துள்ள ஆதார நிரை, நிரல் மாற்றங்கள் மூலமாக, அணியளவை r உடைய எந்தவொரு $m \times n$ அணி A-யையும் $\begin{bmatrix} I_r, & 0_{r,\, n-r} \\ 0_{m-r,\, r} & 0_{m-r,\, n-r} \end{bmatrix}$ என்றவடிவிற்கு மாற்றமுடியுமானால், இவ்வடிவானது A-ன் இயல்பு வடிவம் எனப்படும். இங்கு I_r என்பது n அ·தரமுடைய அணி அலகையும், 0 ஆனது பூச்சிய அணியையும் குறிக்கும்.

§ 4·12. தேற்றம்:

அணி அளவை $r > 0$ உடைய எந்தவொரு $m \times n$ அணியையும், முடிவுள்ள, தொடர்ச்சியான ஆதாரமாற்றங்கள் மூலம் $\begin{bmatrix} I_r, & 0_{r,\, n-r} \\ 0_{m-r,\, r} & 0_{m-r,\, n-r} \end{bmatrix}$ என்ற வடிவிற்கு மாற்றமுடியும்.

நிரூபணம் :

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$ என்க. $r>0$ ஆதலால், $A\neq 0$ எனவே A-ல் குறைந்தபட்சம் ஓர் உறுப்பாவது பூச்சியமில்லாது இருக்கும். இவ்வுறுப்பை a_{ij} என்க. அப்படியானால், முதல் நிரையையும் i^{th} நிரையையும், முதல் நிரலையும் j^{th} நிரலையும் முறையே இடமாற்றம்செய்ய [(அ-து) ஆதாரமாற்றங்கள் H_{1i}, K_{1j}] $B=[b_{ij}]$ என்ற அணி கிடைக்கும். இதில் $b_{11}\neq 0$ ஆகும்.

B-ன் முதல் நிரையை b_{11}-ஆல் வகுக்க $C = [C_{ij}]$ என்ற அணியானது $C_{11} = 1$ என்றவாறு கிடைக்கும். அடுத்து C-ன் i^{th} நிரையோடு $(2 \leqslant i \leqslant m)$ முதல் நிரையை $(-C_{i1})$ தடவை பெருக்கிக்கூட்ட $D= [d_{ij}]$ என்ற அணியானது $d_{11} = 1$, $d_{i1} = 0$ $(2 \leqslant i \leqslant m)$ என்றவாறு கிடைக்கும்.

மேலும், D-ன் j^{th} நிரலோடு $(2 \leqslant j \leqslant n)$ முதல் நிரலை $(-d_{1j})$ தடவை பெருக்கிக்கூட்ட நமக்கு $M = (m_{ij})$ என்றவொரு அணியானது $m_{11}=1$, $m_{i1}=0 = m_{1j}$ $(2 \leqslant i \leqslant m,$ $2 \geqslant j \leqslant n)$ என்றவாறு கிடைக்கும்.

எனவே M ஆனது $\begin{bmatrix} 1 & 0_{1,\, n-1} \\ 0_{m-1,\, 1} & A_{1\, m-1,\; n-1} \end{bmatrix}$ என்ற வடிவிலிருக்கும்.

இங்கு $(m-1) \times (n-1)$ அணி A_1 ஆனது 0 என்றால் இதுவே [(அ-து) M] A-ன் இயல்பு வடிவாகும். அப்படியில்லாவிடில் நாம் A_1-ல் முன்பு A-ல் செய்துள்ளது போல் ஆதார மாற்றங்கள் செய்யலாம். இம்மாற்றங்களால், A-ன் முதல் நிரை, முதல் நிரல்களில் எந்தவொரு மாற்றமும் நிகழாது. எனவே இவ்வாறு நாம் தொடர்ந்து செயல்பட, நமக்கு ஒரு மூலைவரை அணி கிடைக்கும்.

A-ன் அளவை r ஆதலாலும், ஆதாரமாற்றங்களால் அணி அளவை மாறுததாலும் இம்மூலை வரை அணியில் r உறுப்புகள், அவை மட்டுமே பூச்சியமில்லாதிருக்க வேண்டும். எனவே இறுதியாக நமக்கு

$$A \sim \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,\, r-r} \\ 0_{m-r,\, r} & 0_{m-r,\, n-r} \end{bmatrix} = N$$ என்ற A-ன் இயல்பு வடிவம் கிடைக்கும்.

கி. தேற்றம் :

A ஒருமையில் $n\times n$ எனின் $A \sim I_n$ ஆகும். (அ-து) A-ன் இயல்பு வடிவ அணி அலகு I_n ஆகும்.

§ 4·13. தேற்றம் :

A, B என்பன சரி நிகர் அணிகளெனின், P, Q என்ற ஒருமையில் அணிகள் $PAQ = B$ என்றவாறு உள்ளன.

நிரூபணம் :

A-யை B ஆக உருமாற்றம் செய்யும் ஆதார நிரை, நிரல் மாற்றங்களையொத்த ஆதார நிரை, நிரல் அணிகளை முறையை வரிசைக் கிரமமாக $E_1, E_2, \ldots, E_s$; $F_1, \ldots, F_t$ என்க. A-ல் நிகழும் ஒவ்வொரு ஆதார நிரை மாற்றத்தையும் A-யை, இம்மாற்றத்தையொத்த ஆதார நிரை அணியால் முன் பெருக்குவதன் மூலமும், நிரல் மாற்றத்தை, இம்மாற்றத்தையொத்த ஆதார நிரல் அணிகளால் பின் பெருக்குவதன் மூலமும் பெறலாம் என அறிவோம். ஆதலால், $A \sim B$ என்றால்,

$$E_s . E_{s-1} \ldots E_1 . A . F_1 . F_2 \ldots F_t = B \text{ ஆகும்.} \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$P = E_s . E_{s-1} \ldots E_1 \,;\; Q = F_1 . F_2 \ldots F_t \text{ என்க.}$$

ஆதார அணிகள் ஒருமையில் ஆதலால், இவற்றின் பெருக்கல்களும் ஒருமையில் ஆகும். (அ-து) P, Q ஒருமையில் அணிகள்.

$\therefore\ PAQ = B$ ஆகும். (1) லிருந்து.

கி. தேற்றம் 1:

ஒரு $m \times n$ அணி A-ன் அளவை $r > 0$ என்றால், P, Q என்ற ஒருமையில் அணிகள் $PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,\, n-r} \\ 0_{m-r,\, r}, & 0_{m-r,\, n-r} \end{bmatrix}$ என்றவாறு உள்ளன.

மேலும், A ஆனது F என்ற களத்தின் மீதமைந்துள்ளது என்றால், ஒவ்வொரு கட்டத்திலும் நாம் A-ன் உறுப்புகளை களத்தில் வரையறுக்கப்பட்டுள்ள செயல்களுக்கே உட்படுத்துவதால் கிடைக்கும் சரி நிகர் அணிகளும் F-ன் மீதே அமைந்திருக்கும். எனவே நாம் மேலேயுள்ள தேற்றத்தைப் பொதுப் படுத்தி,

"ஒரு களம் F-ன் மீதமைந்த அணி $A \sim B$ என்றால், P, Q என்ற ஒருமையில் அணிகள் $PAQ = B$ என்றவாறு F-ன் மீது அமைந்துள்ளன" எனக் கூறலாம்.

கி. தேற்றம் 2:

A ஆனது ஒருமையில் n சதுர அணியென்றால், P, Q என்ற ஒருமையில் அணிகள் $P\ A\ Q = I_n$ என்றவாறு உள்ளன.

§ 4·14. தேற்றம் :

ஒவ்வொரு ஒருமையில் அணியும், ஆதார அணிகளின் பெருக்கலாகும்.

நிரூபணம் :

n சதுர அணி A ஆனது ஒருமையில் என்க. அப்படியானால், P, Q என்ற ஒருமையில் அணிகள் $P\ A\ Q = I_n$ என்றவாறு உள்ளன.

$P = E_s . E_{s-1} \ldots E_1,\qquad Q = F_1 . F_2 \ldots F_t$ என்போமானால் (§ 4·13 பார்க்க)

$E_s . E_{s-1} \ldots E_1 . A . F_1 . F_2 \ldots F_t = I_n$ ஆகும்.

$$\therefore\ A = E_1^{-1} . E_2^{-1} \ldots E_s^{-1}\ I_n\ F_t^{-1} \ldots\ldots F_1^{-1}$$

$$= E_1^{-1} . E_2^{-1} \ldots E_s^{-1} . F_t^{-1} \ldots F_1^{-1}$$ ஆகும்.

இவ்வாதார எதிர்மறை அணிகளும் ஒருமையில் ஆதார அணிகளாதலால் தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டுள்ளது.

§ 4·15. தேற்றம் :

ஓர் அணியை மற்றொரு ஒருமையில் அணியால், முன் பெருக்குவதாலோ அல்லது பின் பெருக்குவதாலோ அதன் அளவை மாறுவதில்லை.

நிரூபணம் :

ஒவ்வொரு ஒருமையில் அணியும் ஆதார அணிகளின் பெருக்கலாகும்.

ஓர் அணியை ஆதார அணிகளால் முன், பின் பெருக்குவதால் அதன் அளவை மாறுவதில்லை. (§ 4·8 கி. தே 2)

ஆதலால், ஒருமையில் அணிகளால் ஓர் அணியை முன் (பின்) பெருக்குவதால் அவ்வணியின் அளவை மாறுவதில்லை.

கி. தேற்றம் :

P, Q ஒருமையில் அணிகளெனின் $R(P\ A\ Q) = R(A)$

§ 4·16. தேற்றம் :

(i) ஒரே அணித்தரங்கொண்ட இரு அணிகளின் அளவைகள் சமமாக இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே அவை சரி நிகராகும்.

(ii) $PAQ = B$ என்றமையுமாறு P, Q என்ற ஒருமையில் அணிகள் இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே $A \backsim B$ ஆகும்.

இவ்விரு தேற்றங்களின் நிரூபணங்களும் பயிற்சியாக விடப்பட்டுள்ளது.

§ 4·17. தேற்றம் :

ஒரு $n \times n$ அணி A ஆனது ஒருமையில் என்முல், A ஆனது அணி அலகு I_n-க்கு நிரை சரிநிகராகும்.

$A = [a_{ij}]$ ஒருமையில் ஆதலால், இதன் எந்தவொரு நிரலும் முற்றிலும் பூச்சியமாக இருக்காது. அதாவது ஒவ்வொரு நிரலும் குறைந்த பட்சம் ஓர் உறுப்பாவது பூச்சியமின்றி இருக்கும். இவ்வுறுப்பு a_{i1} என்றுல் ஆ. நிரைமாற்றம் H_{i1} மூலம் கிடைக்கும் அணி $B = [b_{ij}]$-ல் $b_{11} \neq 0$ ஆகும். இப்பொழுது B-ன் முதல் நிரையை b_{11}-ஆல் வகுக்க $\left[\text{ஆ.மாற்றம் } H_1 \; (1/b_{11})\right]$ கிடைக்கும் அணி $C = [c_{ij}]$ ல் $C_{11} = 1$ ஆகும். C-ன் முதல் நிரலிலுள்ள மற்றெல்லா உறுப்புகளும் பூச்சியமாக இருக்கத் தக்கதாக (அ-து) $C_{i1} = 0 \quad (2 \leqslant i \leqslant n)$ முதல் நிரையை தகுந்த எண்ணிகளால் பெருக்கி மற்ற நிரைகளோடு கூட்ட $A \backsim \begin{bmatrix} 1 & B_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$ கிடைக்கும்.

அடுத்து A_1-ன் அளவை $(n-1)$ ஆதலால், A_1-ல் முன்போல் செயல்படலாம். இவ்வாறு தொடர்ந்து செயல்பட இறுதியாக நமக்கு $A \backsim I_n$ என்று கிடைக்கும்.

ஒவ்வொரு கட்டத்திலும் நாம் ஆதார நிரைமாற்றங்களை மட்டுமே உபயோகித்துள்ளதால் A ஆனது I_n-க்கு நிரை சரி நிகராகும்.

கி. தேற்றம் 1:

ஒரு சதுர அணி A ஆனது I_n-க்கு நிரை சரிநிகராக இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே A ஆனது ஒருமையில் அணியாகும்.

கி. தேற்றம் 2 :

ஒரு சதுர அணி A ஆனது மற்றொரு அணி B-க்கு நிரை சரிநிகர் என்க. B-ல் ஒரு நிரையாவது முற்றிலும் பூச்சியமாக இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே A ஆனது ஒருமைசேராகும்.

§ 4·18. தேற்றம் :

$m \times n$ அ. தரங்கொண்ட A-ன் அளவை r என்ருல்,

(i) P என்ற ஒருமையில் அணியானது $PA = \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix}$ என்றமையுமாறுள்ளது. இங்கு G-ன் அ. தரம் $r \times n$ ஆகவும் அளவை r ஆகவும் 0-ன் அ. தரம் $(m-r) \times n$ ஆகவுமிருக்கும்.

(ii) Q என்ற ஒருமையில் அணியானது $AQ = [\,H\ 0\,]$ என்றமையுமாறுள்ளது. இங்கு H-ன் அ. தரம் $m \times r$ ஆகவும் அளவை r ஆகவும் 0-ன் அ. தரம் $m \times (n-r)$ ஆகவுமிருக்கும்.

நிரூபணம்:

A-ன் அளவை r ஆதலால், P, Q என்ற ஒருமையில், அணிகள் $PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,\,n-r} \\ 0_{m-r,\,r} & 0_{m-r,\,n-r} \end{bmatrix}$ என்றமையுமாறுள்ளது.

Q ஒருமையில் இருப்பதால் $Q = Q_1 \cdot Q_2 \ldots Q_t$ என்று ஆதார அணிகளின் பெருக்கலாகக் கொள்வோம். அப்படியானுல்,

$$PAQ_1 \cdot Q_2 \ldots Q_t = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,\,n-r} \\ 0_{m-r,\,r} & 0_{m-r,\,n-r} \end{bmatrix} \text{ ஆகும்.}$$

இடப்பக்கத்தை முறையே $Q_t^{-1}, Q_{t-1}^{-1}, \ldots Q_1^{-1}$ களால் பின் பெருக்குவோம். அப்படியானுல், வலப்புறத்தில் இதனை யொத்த ஆதார நிரல்மாற்றங்கள் செய்தால் போதும். எவ்வகையான இவ்வாதார நிரல்மாற்றங்களாலும், கடைசி $(m-r)$ பூச்சிய நிரைகளில் எந்தவொரு மாற்றமும் நேராதாகையால்,

$PA = \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix}$ என்ற வடிவம் கிடைக்கும். இங்கு G-ன் அ. தரம் $r \times n$; 0-ன் அ. தரம் $(m-r) \times n$ ஆகும்.

மேலும், ஆதார மாற்றங்களால் அணி அளவைகள் மாருதாகையால் $R(G) = R(PA) = r$ ஆகும்.

இதுபோல் (ii) ஐயும் நிறுவலாம்.

4·19. பெருக்கல் அணிகளின் அளவை (Rank of the Product)

இரு அணிகளின், பெருக்கலின் அளவையானது, அவை ஒவ்வொன்றின் அணி அளவைகளை விட அதிகமாக இருக்க முடியாது.

நிருபணம் :

$m \times n$ அணி A-ன் அளவை r எனக் கொள்வோம். B-ன் அ.தரம் $n \times p$ என்க. அப்படியானால், P, Q என்ற ஒருமையில் அணிகள்

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,\, n-r} \\ 0_{m-r,\, r} & 0_{m-r,\, n-r} \end{bmatrix} = N \text{ என்றமையுமாறு}$$

உள்ளன.

$$\therefore \quad A = P^{-1} N Q^{-1} \text{ ஆகும். எனவே,}$$

$$= AB = P^{-1} N Q^{-1} B.$$

P^{-1} ஒருமையில் ஆதலால், $R(P^{-1} N Q^{-1} B) = R(N Q^{-1} B)$ ஆகும். மேலும், $N Q^{-1} B$-ல் முதல் r நிரைகளும் $Q^{-1} B$-ன் முதல் r நிரைகளாகவும் மீதமுள்ள $(m-r)$ நிரைகளும் முற்றிலும் பூச்சியமாகவுமிருக்கும்.

$$\therefore \quad R(AB) \leqslant r = R(A) \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

மேலும், $R(AB) = R(AB)^{T}$

$$= R(B^{T}A^{T})$$

$$\leqslant R(B^{T}) = R(B)$$

எனவே $R(AB) \leqslant R(B)$ $\qquad \ldots\ldots\ldots(2)$

$\therefore$ $R(A), R(B)$ க்களில் எது மிகக் குறைவாக இருக்குமோ, அதற்குச் சமமாகவோ அல்லது குறைவாகவோ $R(AB)$ இருக்கும். இதனை $R(AB) \leqslant$ குறைந்த $[R(A), R(B)]$ என எழுதுவோம்.

பிரிதொருமுறை : (Aliter)

A-ன் அளவை r எனின் P என்ற ஒருமையில் அணியானது $PA = \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix}$ என்றமையுமாறு உள்ளது. இங்கு G ஆனது r நிரைகள் கொண்டுள்ளதாயும், அளவை r உடையதாயுமிருக்கும்.

$\therefore \quad PAB = \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} B$. மேலும், P ஒருமையில் ஆதலால்,

$R(PAB) = R(AB)$.

மேலும், G-ன் முற்றிலும் பூச்சியமில்லா r நிரைகளையும் B-ன் நிரல்களால் பெருக்குவதால் $\begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} B$-ல் அதிகபட்சம் r முற்றிலும் பூச்சியமில்லா நிரைகளே உள்ளன.

$\therefore \quad R(PAB) \leqslant r$

(அ-து) $R(AB) \leqslant r = R(A)$ ....(1)

$R(AB) \geqslant R(B)$ என்பதை முன்போல் (§ 4·19) நிறுவுக.

§ 4·20. தேற்றம் :

$m \times n$ அணி A-ன் அளவை r ஆகவும், $n \times p$ அணி B ஆனது $AB = 0$ என்றவாறும் இருக்குமானுல் $R(B) \geqslant n-r$ ஆகும்.

நிரூபணம் :

$m \times n$ அணி A-ன் அளவை r ஆதலால், P, Q என்ற ஒருமையில் அணிகள் $PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0_{m-r,\, r} \\ 0_{m-r,\, r} & 0_{m-r,\, n-r} \end{bmatrix} = N$ என்றவாறு உள்ளன.

எனவே $A = \overset{-1}{P} N \overset{-1}{Q} \quad \therefore \quad AB = \overset{-1}{P} N \overset{-1}{Q} B$ ஆகும்.

ஆனுல், $AB = 0$ ஆதலால், $\overset{-1}{P} N \overset{-1}{Q} B = 0$

$\therefore \quad N \overset{-1}{Q} B = 0 \quad (\therefore \quad \overset{-1}{P}$ ஒருமையில்)

ஆதலால், $\overset{-1}{Q} B$-ன் முதல் r நிரைகளும் பூச்சிய உறுப்புகள் கொண்டிருக்கவேண்டும்.

$\therefore \quad R(\overset{-1}{Q} B) \leqslant n-r$. ஆனுல்,

$\overset{-1}{Q}$ ஒருமையில் ஆதலால், $R(\overset{-1}{Q} B) = R(B)$

$\therefore \quad R(B) \leqslant n-r$ ஆகும்.

எ. கா· 3: P ஒருமையில் என்ருல் $R(PA) = R(A)$ என நிறுவுக.

$PA = B$ என்க. அப்படியானால், $R(B) = R(PA) \leqslant R(A)$ ....(1)

மேலும், P ஒருமையில் ஆதலால், P^{-1} உள்ளது.

$\therefore \; A = P^{-1} B$ ஆகும்.

எனவே $R(A) = R(P^{-1} B) \leqslant R(B)$ ....(2)

(1), (2) லிருந்து $R(A) = R(B)$ ஆகும்.

எ-கா. 4: ஒரு n-சதுர அணி A-க்கு வலப்புற எதிர்மறை உண்டென்றால், அதற்கு இடப்புற எதிர்மறையுமுண்டு என நிறுவுக.

(அ-து) n சதுர அணி A-க்கு $AB = I_n \Longrightarrow BA = I_n$ ஆகும்.

$AB = I_n$ என்க. அப்படியானால், A ஒருமையில் இருக்க வேண்டும். ஏனெனில், A ஒருமைசேரானால், A ஆனது, ஒரு நிரையை முற்றிலும் பூச்சியமாகக் கொண்ட ஓர் அணி C-க்கு நிரை சரி நிகராகும்.

$E_1, E_2, \ldots, E_s$ ஆதார அணிகளெனின்

$C = E_s.\; E_{s-1} \ldots, E_1.A$ ஆகும்.

$\therefore \; CB = E_s.E_{s-1} \ldots, E_1.AB$. அதாவது CB ஆனது AB-க்கு நிரைசரி நிகராகும். மேலும்,

CB-ல் ஒரு நிரை முற்றிலும் பூச்சியமாதலால் AB ஆனது ஒருமைசேராகும். ஆனால், $|AB| = |I_n| = 1$ ஆதலால், இது ஒரு முரண்பாடு. எனவே A ஒருமையில் அணியாகும்.

$\therefore \; A^{-1}$ உள்ளது.

$AB = I_n$ ஆதலால், $A^{-1}(AB) = A^{-1} I_n = A^{-1}$

$$ie \; (A^{-1} A) B = A^{-1}$$

$$(\text{அ-து}) \; B = A^{-1}$$

$\therefore \; AB = I_n \Longrightarrow BA = I_n$

எ-கா. 5: அணிகளின் சரிநிகர் தன்மையானது ஒரு சரிநிகர் தொடர்பு (Equivalence of Matrices is an equivalence relation) என நிறுவுக.

பிரதிபலிக்கும் தன்மை:

$A = IAI$ ஆதலால், ஒவ்வொரு அணியும் தனக்கு சரிநிகர் ஆகும்.

சமச்சீர் தன்மை:

$A \backsim B$ என்றால் P, Q என்ற ஒருமையில் அணிகள் $PAQ = B$ என்றவாறு உள்ளன.

$P^{-1} B Q^{-1} = A$ ஆகும். P^{-1}, Q^{-1} ஒருமையில் ஆதலால், $B \backsim A$ ஆகும். $\therefore A \backsim B \Longrightarrow B \backsim A$

கடத்தல் தன்மை:

$A \backsim B, B \backsim C \Longrightarrow A \backsim C$ ஆகும். ஏனெனில், $A \backsim B$ ஆதலால் P, Q என்ற ஒருமையில் அணிகள்

$PAQ = B$ என்றவாறு உள்ளன.

இதுபோல் $B \backsim C$ ஆதலால், $RBS = C$, R, S ஒருமையில் இப்பொழுது $C = RBS = RPAQS = (RP)A(QS) = LAM$

இங்கு $L = RP$, $M = QS$ ஒருமையில்

$\therefore A \backsim C.$

$\therefore A \backsim B, B \backsim C \Longrightarrow A \backsim C.$

எனவே இது ஒரு சரிநிகர் தொடர்பாகும்.

எ. கா. 6: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ வை இயல்பு வடிவிற்கு மாற்றுக.

$$A \backsim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\backsim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\backsim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\backsim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [I_3 \; 0]$$

§ 4. 21. ஆதார மாற்றங்கள் மூலம் ஓர் அணியின் எதிர்மறை காணல் (Inverse of a Matrix by Elementary Transformations)

ஓர் அணியின் எதிர்மறை காண ஏற்கெனவே இரு முறைகளை அறிவோம். இப்பொழுது ஆதாரமாற்றங்கள் வழியாக எவ்வாறு ஓர் அணியின் எதிர்மறையை சுலபமாகக் காணலாம் எனப் பார்ப்போம்.

A ஒரு $n \times n$ ஒருமையில் அணியென்க. அப்படியானால், A ஆனது I_n-க்கு நிரை சரிநிகரென அறிவோம். அதாவது $E_1, E_2, \ldots E_s$ என்ற ஆதார அணிகள் $E_s. \; E_{s-1} \ldots E_1. A = I_n$ என்றவாறு உள்ளன.

$$\therefore \; A = E_1^{-1}. \; E_2^{-1}. \ldots E_s^{-1}$$

ஆதலால், $A^{-1} = (E_1^{-1}. \; E_2^{-1} \ldots E_s^{-1}) = E_s. \; E_{s-1}. \ldots E_1.$

அதாவது, A-ஆனது I_n ஆக உருமாறத்தக்கதாக ஆதார நிரைமாற்றங்கள் செய்வோம். இம் மாற்றங்களை யொத்த ஆதார நிரை அணிகள் வரிசைக்கிரமமாக $E_1, E_2, \ldots E_s$ என்றால் $A^{-1} = E_s. E_{s-1} \ldots E_1$ என அறிகிறோம்.

இதனைச் சுலபமான வழியில் செய்ய அணி $[A : I_n]$ ஐ எடுத்துக் கொள்க.

அப்படியானால், $(E_s. E_{s-1}. \ldots E_1) \; [A : I_n] = [E_s. E_{s-1} \ldots E_1. A : E_s. E_{s-1}. \ldots E_1] = [I_n : A^{-1}]$

ஆதலால், அணி $[A : I_n]$-ல் ஆதாரமாற்றங்கள் மூலம் A ஆனது I_n ஆக உருமாறும் போது I_n உள்ள இடத்தில் A^{-1} கிடைக்கும்.

எ. கா. 7: $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ என்றால் ஆதாரமாற்றங்கள் மூலம் A^{-1} காண்க.

$$[A : I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

§ 4·22. நிரை நிரல் அளவைகள் (Row Rank and column Rank)

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ என்க. இவ்வணியின் ஒவ்வொரு நிரையும் ஒரு n வெக்டராகவும், ஒவ்வொரு நிரலும் ஒரு m வெக்டராகவும் இருக்கும். இந்த m நிரை வெக்டர்களாலும் உருவாக்கப்படும் வெளியை (space) அணி A-ன் நிரை வெளி (Row space) எனவும், n நிரல்களாலும் உருவாக்கப்படும் வெளியை A-ன் நிரல் வெளி (column space) எனவும் அழைப்போம்.

மேலும், A-ன் நிரைவெளியின் பரிமாணத்தை, அதன் நிரை அளவை (*R*ow Rank) எனவும், நிரல் வெளியின் பரிமாணத்தை (dimension) அதன் நிரல் அளவை (Column rank) எனவும் வரையறை செய்கின்றோம்.

ஒரு முடிவுள்ள கணத்திலுள்ள வெக்டர்களால் உருவாக்கப் படும் வெக்டர் வெளியின் பரிமாணமானது அக்கணத்திலுள்ள அதிகபட்ச ஒருபடிச்சாரா வெக்டர்களின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாதலால், ஓர் அணியின் நிரை, நிரல் அளவைகள் முறையே அவ்வணியில் உள்ள அதிகபட்ச ஒருபடிச்சாரா நிரை, நிரல் வெக்டர்களின் எண்ணிக்கையாகும். நமது வரையறையி லிருந்து அணி அலகு I_n-ன் நிரை அளவை $= n =$ நிரல் அளவை $=$ அணி அளவை என்பது புலனாகும்.

§ 4·23. தேற்றம்:

நிரை சரி நிகரணிகள் ஒரே நிரைவெளி, நிரை அளவை உடைத்தனவாகும்.

நிரூபணம்:

ஒரு களம் F-ன் மீதமைந்துள்ள $m \times n$ அணி $A = [a_{ij}]$ என்க.

A-ன் நிரை வெக்டர்களை $R_1, R_2, \ldots R_m$ என்போம்.

அப்படியானால், A-ன் நிரை வெளி V ஆனது $\left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i R_i \;;\; \lambda_i \in F \right\}$ என்ற வடிவில் அமைந்துள்ள எல்லா வெக்டர்களையும் கொண்ட கணமாகும்.

முதல் இருவகை ஆதார நிரைமாற்றங்களான H_{ij}, $H_i(\alpha)$ $(\alpha \neq 0 \in F)$க்களால் A-ன் நிரைவெளியானது மாறுவ தில்லை என்பது வெளிப்படை. அடுத்து மூன்றுவது வகை ஆ. நிரை மாற்றமான $H_{ij}(k)$ $(k \neq 0, k \in F)$ ஐ எடுத்துக்கொள் வோம். இவ்வகை மாற்றத்தால் அணி A ஆனது $B = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix}$ ஆக உருமாறுமானால், $X_1 = R_1$; $X_2 = R_2$; … ; $X_i = R_i + kR_j$; … , $X_j = R_j$, … , $X_m = R_m$ ஆகும். அணி B-ன் நிரை வெளியை V_1 என்க.

வெக்டர் $Y \in V_1$ என்றால், Y ஆனது $X_1, X_2, \ldots, X_m$ களின் ஒருபடிச்சேர்வாகும். (அ-து) Y ஆனது $R_1, R_2, \ldots R_m$ களின் ஒருபடிச்சேர்வு.

$\therefore \quad V_1 \subseteq V$. மேலும்,

$R_1 = X_1$; $R_2 = X_2$; ... ; $R_i = X_i - k\,R_j = X_i - k\,X_j$; ... $R_j = X_j$; ... $R_m = X_m$ ஆதலால், முன்போல் V-ல் உள்ள ஒவ்வொரு வெக்டரும் V_1 ல் உள்ளது என நிறுவலாம்.

$\therefore \quad V \subseteq V_1$.

$\therefore \quad V = V_1$ ஆகும்.

இவ்வாறு நிரை சரி நிகரணிகள் ஒரே நிரை வெளியைக் கொண்டுள்ளதால் இவ்வணிகளின் நிரை அளவை சமமாகும்.

கி. தேற்றம் :

நிரல் சரி நிகரணிகள் ஒரே நிரல் வெளி, நிரல் அளவை உடையனவாகும்.

§ **4·24. தேற்றம் :**

ஒரு களம் F-ன் மீதமைந்தவொரு அணியை இடப்புறமாக ஒரு இடப்புற ஒருமையில் அணியால் பெருக்கும்போது அதன் நிரை அளவையும், வலப்புறமாக ஒரு வலப்புற ஒருமையில் அணியால் பெருக்கும்போது அதன் நிரல் அளவையும் மாறுவதில்லை.

$A = [\,a_{ij}\,]_{p\times m}$ ஆனது ஒரு இடப்புற ஒருமையில் அணியாகவும் B ஆனது அளவை r கொண்ட ஒரு $m \times n$ அணியாகவும் இருக்கட்டும். B-ன் நிரைகளை R_i $(i = 1,\ 2,\ \ldots\ m)$ எனக் குறிப்போமானால்

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & \cdots & a_{pm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_p \end{bmatrix}_{p\times 1} \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு $C_r = \sum_{j=1}^{m} a_{rj}\,R_j \quad (r = 1,\ 2,\ \ldots\ p)$

B-ன் நிரைவெளியை V_1 எனவும், AB-யின் நிரை வெளியை V_2 என்றும் கொள்வோம். V_2 ல் உள்ள ஒவ்வொரு வெக்டரும் B-ல் உள்ள m நிரைகளின் ஒருபடிச்சேர்வாதலால் $V_2 \subseteq V_1$

$\therefore$ (AB)-ன் நிரை அளவை $r_2 \leqslant B$-ன் நிரை அளவை r_1...(1)

மேலும், A ஆனது இடப்புறத்தில் ஒருமையில் ஆதலால், F-ல் A' என்ற அணியானது $A'\,A = I_m$ என்றவாறு வரையறுக்கப் பட்டுள்ளது.

எனவே முன்போல், $A'(AB)$-ன் நிரை அளவை $\leqslant (AB)$-ன் நிரை அளவையாகும்.

(அ-து) B-ன் நிரை அளவை $r_1 \leqslant (AB)$-ன் நிரை அளவை r_2 ....(2)

$\therefore$ (1), (2) லிருந்து $r_1 = r_2$ ஆகும்.

இதுபோல் அடுத்த முடிவையும் நிறுவலாம்.

கி. தேற்றம் :

ஓர் அணியை, மற்றொரு ஒருமையில் அணியால் முன் பெருக்குவதால் அதன் நிரை அளவையும், பின் பெருக்குவதால் அதன் நிரல் அளவையும் மாறுவதில்லை.

§ 4·25. தேற்றம் :

(i) ஒரு களம் F-ன் மீதமைந்துள்ள $m \times n$ அணி A-ன் அளவை r என்றால், F-ன் மீது H என்ற ஒருமையில் அணியானது, $HA = \begin{bmatrix} L \\ 0 \end{bmatrix}$ என்றவாறு அமைந்துள்ளது. இங்கு L ஆனது $r \times n$ அணியாகவும் 0 ஆனது $(m-r) \times n$ ஆகவும் இருக்கும்.

(ii) மேற்கூறிய A-ன் நிரல் அளவை r என்றால், F-ன் மீது J என்ற ஒருமையில் அணியானது $AJ = [M \; 0]$ என்றவாறு அமைந்துள்ளது. இங்கு M ஆனது $m \times r$ ஆகவும் 0 ஆனது $m \times (n-r)$ ஆகவுமிருக்கும்.

நிரூபணம் :

(i) A-ன் நிரை அளவை r ஆதலால், இதிலுள்ள r ஒருபடிச்சாரா நிரைகள் A-ன் நிரை வெளியை அமைக்கும். ஆதார நிரைமாற்றங்கள் மூலம் இந்த r ஒருபடிச்சாரா நிரைகளையும் முதல் r நிரைகளாகக் கொண்டு வருவோம். மற்ற $(m-r)$ நிரைகளில் ஒவ்வொன்றும் இந்த r நிரைகளில் ஒருபடிச் சார்ந்துள்ளதால், இவை ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் ஒருபடிச்சாரா r நிரைகளின் தகுந்த ஒருபடிச் சேர்வுகளைக் கழிப்பதன் மூலம் இவற்றை முற்றிலும் பூச்சிய நிரைகளாக மாற்றலாம். இச் செயல்கள் ஒவ்வொன்றும் ஆதார நிரை மாற்றங்களாதலால், இவை ஒவ்வொன்றும் A-யை ஆதார நிரை அணிகளால் முன் பெருக்குவதற்குச் சமமாகும். இவ்வாதார அணிகள் வரிசைக்கிரமமாக $E_1, E_2 \ldots, E_s$ எனப்படுமாயின் $E_s . E_{s-1} \ldots . E_1$.

$A = \begin{bmatrix} L \\ O \end{bmatrix}$ ஆகும். இங்கு L ஆனது ஒரு $r \times n$ அணியாகவும் 0 ஆனது $(m-r) \times n$ ஆகவுமிருக்கும்.

$H = E_s. E_{s-1} \ldots, E_1$ என எழுதுவோமானுல் H ஒருமையில் ஆகும்.

$HA = \begin{bmatrix} L \\ 0 \end{bmatrix}$ ஆகும்.

இதுபோல் (ii) ஐயும் நிறுவலாம்.

§ 4·26. தேற்றம் :

ஓர் அணியின் நிரை அளவை = நிரல் அளவை = அணி அளவையாகும்.

நிருபணம் :

முதற் கட்டமாக ஓர் அணியின் அளவை r என்ருல், அவ் வணியில் r ஒருபடிச்சாரா நிரைகளே உள்ளனவென்றும், மற்றெல்லா நிரைகளேயும் இந்த r ஒருபடிச்சாரா நிரைகளின் ஒருபடிச் சேர்வாக எழுத முடியுமென்றும் நிறுவலாம்.

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$-ன் அளவை r என்க.

A-ன் அளவை r ஆதலால், பொதுத் தன்மைக்குப் பங்க மேற்படாதவாறு A-ன் இடது மூலேயிலுள்ள r சதுர சிற்றணிக் கோவை பூச்சியமல்ல என எடுத்துக்கொள்வோம். அதாவது,

$$\Delta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & \ldots & a_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & \ldots & a_{rr} \end{bmatrix} \neq 0 \text{ என்க.}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ என்பன எண்ணிகளாக இருக்கட்டும்.

$\lambda_1 (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1r}) + \lambda_2 (a_{21}, \ldots, a_{2r}) + \ldots\ldots\ldots +$

$\lambda_r \; (a_{r1}, a_{r2}, \ldots, a_{rr}) = 0$ என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம். இடப்புற வெக்டரின் முதல் r கூறுகளேயும் 0-க்கு சமப்படுத்த

$$\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \ldots + \lambda_r a_{r1} = 0$$
$$\lambda_2 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \ldots + \lambda_r a_{r2} = 0$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$\lambda_1 a_{1r} + \lambda_2 a_{2r} + \ldots + \lambda_r a_{rr} = 0$$

அதாவது $A'\lambda = 0$ ஆகும். ஆனால் $|A'| = \triangle \neq 0$ ஆதலால், $A'\lambda = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வானது வெளிப்படைத்தீர்வு $\lambda = 0$ ஆகும் (ஒருபடிச்சமன்பாடுகள் என்ற தலைப்பில் பார்க்கவும்)

அதாவது $\lambda_1 = 0 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r$ எனவே $(a_{11}, \ldots, a_{1r}), \ldots\ldots,$ $(a_{r1}, \ldots, a_{rr})$ என்பன ஒருபடிச்சாராதவை.

$\therefore$ A-ன் முதல் r நிரைகளும் ஒருபடிச்சாராதவையாகும் இப்பொழுது A-ன் அளவை r ஆதலால், அதன் எந்தவொரு $(r+1)$ சதுர சிற்றணிக்கோவை $\triangle'$ யை எடுத்துக்கொண்டாலும்,

$$\triangle' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & \ldots & a_{1r} & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & \ldots & a_{2r} & r_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & \ldots & a_{pr} & a_{pq} \end{vmatrix} = 0 \text{ ஆகும். இங்கு}$$

a_{pj} ஆனது $\triangle$-ல் இல்லாத $(m-r)$ நிரைகளில் யாதானுமொரு நிரையிலுள்ள உறுப்பாகவும் a_{iq} என்பது $\triangle$-ல் இல்லாத $(n-r)$ நிரல்களில் யாதானுமொரு நிரலிலுள்ள உறுப்பாகவும் இருக்கும்.

$\triangle'$-ன் கடைசி நிரலிலுள்ள உறுப்புகள் $a_{1r}, a_{2q}, \ldots, a_{pq}$ இவற்றின் இணைக்காரணிகளை முறையே $K_1, K_2, \ldots, K_{r+1}$ என்று குறிப்போமானால் $K_{r+1} = \triangle \neq 0$ என்பது தெரியும். மேலும், அணிக்கோவைகளின் பண்புகளிலிருந்து

$$K_1 a_{1i} + K_2 a_{2i} + \ldots + K_{r+1} a_{pi} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$
$$(i = 1, 2, \ldots r)$$

மேலும், $K_1 a_{1q} + K_2 a_{2q} + \ldots + K_{r+1} a_{pq} = \triangle_1 = 0$

அடுத்து $\triangle'$-ன் கடைசி நிரலை எடுத்துவிட்டு மீதமுள்ள $(n-r-1)$ நிரலில் யாதானுமொரு நிரல் C-ஆல் இவ்விடத்தை நிரப்புவோம். இந்நிரலின் உறுப்புகளின் இணைக்காரணிகளும் $K_1, K_2, \ldots, K_{r+1}$ ஆதலால், முன்போல்,

$$K_1 a_{1c} + K_2 a_{2c} + \ldots + K_{r+1} a_{pc} = 0 \text{ ஆகும்.}$$

இவ்வாறு $\triangle$-ல் இல்லாத எலலா நிரல்களுக்கும் இத்தகைய தொடர்பு பொருந்தும் ஆதலால்,

$$K_1 a_{1j} + K_2 a_{2j} + \ldots + K_{r+1} a_{pj} = 0 \; (j = r+1, \ldots, n) \quad \ldots\ldots\ldots(2)$$

எனவே (1), (2) லிருந்து,

$$K_1 a_{1t} + K_2 a_{2t} + \dots + K_{r+1} a_{pt} = 0 \qquad (t = 1, 2, \dots, n)$$

t-ன் எல்லா மதிப்புகட்கும் கூட்ட,

$K_1 R_1 + K_2 R_2 + \dots + K_r R_r + K_{r+1} R_p = 0$ ஆகும்.

இங்கு $R_1, R_2, \dots, R_n$ என்பன A-ன் நிரைகளாகும்.

$K_{r+1} \neq 0$ ஆதலால், R_p ஆனது $R_1, R_2, \dots, R_r$ என்ற r ஒருபடிச்சாரா நிரைகளின் ஓர், ஒருபடிச்சேர்வாகும். மேலும், R_p ஆனது $R_{r+1}, R_{r+2}, \dots R_m$ என்ற $(m-r)$ நிரைகளில் யாதானுமொரு நிரையாதலால் இவை ஒவ்வொன்றையுமே $R_1, R_2, \dots, R_r$ என்ற ஒருபடிச்சாரா நிரைகளின் ஒருபடிச்சேர்வாக எழுத முடியும்.

எனவே ஓர் அணியின் அளவை r என்றால், அதில் r ஒருபடிச்சாரா நிரைகளே உள்ளனவென்றும், மற்ற நிரைகள் ஒவ்வொன்றையும் இந்த r நிரைகளின் ஒருபடிச்சேர்வாக எழுத முடியும் என்றும் நிரூபித்துள்ளோம்.

ஆதலால், அணி அளவை = அணியின் நிரை அளவையாகும். ....(3)

மேலும், அணி A-ன் நிரல் அளவை = அணி A^{T}-ன் நிரை அளவை

= அணி A^{T}-ன் அளவை

= அணி A-ன் அளவை.

∴ நிரை அளவை = அணி அளவை = நிரல் அளவை

குறிப்பு **1**: ஓர் அணியின் அளவையை அதிலுள்ள அதிக ஒருபடிச்சாரா நிரைகள் (அல்லது நிரல்கள்) எனவும் வரையறுக்கலாம்.

குறிப்பு **2**: § 4·26 தேற்றத்தை பிறிதொரு முறையிலும் நிறுவலாம்.

ஓர் அணியை மற்றொரு ஒருமையில் அணியால் முன் பெருக்குவதால் அதன் அளவை, நிரை அளவை மாறுவதில்லை.

A என்ற அணியின் அளவை r எனவும், நிரை அளவை s எனவும் கொள்வோம். அப்படியானால், P என்ற ஒருமையில் அணியானது $PA = \begin{bmatrix} L \\ 0 \end{bmatrix}$ என்றவாறுள்ளது. இங்கு P ஆனது $s \times n$ ஆகும்.

$\therefore \quad R(PA) = R(A) = r.$

மேலும், PA-ல் உள்ள பூச்சியமில்லா நிரைகளின் எண்ணிக்கை s ஆதலால் $R(PA) \leqslant s$. (அ-து) $r \geqslant s$ ஆகும். ....(1)

அடுத்து A-ன் அளவை r ஆதலால் Q என்ற ஒருமையில் அணியானது

$QA = \begin{bmatrix} M \\ 0 \end{bmatrix}$ என்றவாறு அமைந்துள்ளது. இங்கு Q ஆனது $r \times n$ ஆகும்.

QA-ன் நிரை அளவை $=$ A-ன் நிரை அளவை $= s$

மேலும், QA-ல் உள்ள பூச்சியமில்லா நிரைகளின் எண்ணிக்கை r ஆதலால், QA-ன் நிரை அளவை அதிக பட்சம் r ஆகத்தான் இருக்கமுடியும்.

எனவே $s \leqslant r$ ஆகும். ....(2)

$\therefore \quad r = s.$

§ 4·27. தேற்றம்:

ஒரு களம் F-ன் மீதமைந்த ஒரே அணித்தரங் கொண்ட அணிகள் A, B என்றால் $R(A+B) \leqslant R(A) + R(B)$ ஆகும்.

நிரூபணம் :

S_A, S_B, S_{A+B} என்பன முறையே A, B, $(A+B)$ க்களின் நிரை வெளிகளைக் குறிக்கட்டும்.

A, Bக்களின் நிரைகள் சேர்ந்து F-ன் மீதமைக்கும் வெக்டர் வெளியை S என்போம். அப்படியானால்,

S-ல் உள்ள அதிகபட்ச ஒருபடிச்சாரா வெக்டர்கள் $\leqslant$ (S_A-ல் உள்ள அதிகபட்ச ஒருபடிச்சாரா வெக்டர்கள் $+ S_B$-ல் உள்ள.........)

(அ-து) S-ன் பரிமாணம் $\leqslant$ S_A-ன் பரிமாணம் $+ S_B$-ன் பரிமாணம்

(அ-து) $R(A+B) \leqslant R(A) + R(B)$ ஆகும்.

பயிற்சி 4

1. பின்வரும் அணிகளுக்கு சரிநிகர் அணிகள் கண்டு, அவற்றைப் பார்த்த மாத்திரத்தில், தரப்பட்டுள்ள அணியின் அளவைக் கூறுக.

$$(a) \begin{bmatrix} -3 & 3 & -8 \\ 4 & 4 & -5 \\ 7 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad (b) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1-i & -i & 2 \\ 1+2i & 1+2i & 1+3i \\ 2+i & 1+i & 3+2i \end{bmatrix}$$

2. பின்வரும் அணிகளுக்கு ஏறுபடி வடிவில் நிரை சரிநிகர் அணிகள் காண்க :

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 1 & 7 \end{bmatrix} \qquad (b) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

3. பின்வரும் அணிகளை இயல்பு வடிவிற்கு மாற்றுக :

$$(a) \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (b) \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & -1 & 2 & -3 \\ 11 & 6 & 4 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 9 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 9 \\ 3 & 1 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

4. பின்வரும் அணிகளின் எதிர்மறைகளை ஆதார மாற்றங்கள் மூலம் காண்க.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ யை ஆதாரஅணிகளின் பெருக்கலாக எழுதவும்.

6. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ என்க. P, Q என்ற ஒருமையில் அணிகள் $PAQ = N$ (இயல்பு வடிவம்) என்றமையுமாறு உளதாயின், P, Q-க்களை காண்க.

7. எல்லா அணிகளையும் இயல்பு வடிவிற்கு, ஆதார நிரை மாற்றங்களால் மட்டும் கொண்டு வர இயலாதென்பதை ஓர் எடுத்துக்காட்டோடு விளக்குக.

8. A-ன் அ.தரம் n, அளவை $(n-1)$ என்றால் (சேர்ப்பு A)ன் அளவை 1 என நிறுவுக. [குறிப்பு: A-ன் அளவை $(n-1)$ ஆதலால், $|A|$ ல், குறைந்தது ஒரு பூச்சியமில்லா இணைக் காரணியாவது இருக்கும். எனவே (சேர்ப்பு A)-ன் அளவை $\geqslant 1$. அடுத்து $A\cdot$(சேர்ப்பு A)$=0$ ஆதலால், சேர்ப்பு A-ன் அளவை $\leqslant n-(n-1)$. (அ-து) (சேர்ப்பு A)-ன் அளவை $\leqslant 1$.]

9. ஓர் அணியின் எல்லா உறுப்புகளும் சமமென்றால், அவ்வணியின் அளவை என்ன?

10. A, B என்பன முறையே பூச்சியமில்லா $1\times m$, $m\times 1$ அணிகளென்றால் AB-ன் அளவை என்ன?

11. A, B என்பன ஒரே அ.தரமுடைய அணிகள் A^T ஆனது B^T-க்கு நிரை சரி நிகராக இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே A ஆனது B-க்கு நிரைசரி நிகராகுமென நிறுவுக.

12. இரு அணிகளின் இயல்பு வடிவங்களின் பெருக்கலானது, அவ்வணிகளின் பெருக்கலின் இயல்பு வடிவிற்குச் சமமாக இருக்கத் தேவையில்லையென ஓர் எடுத்துக்காட்டுடன் விளக்குக.

13. யாதானுமிரு அணிகளைப் பெருக்கி § 4·19 தேற்றத்தைச் சரி பார்க்கவும்.

14. $A_1 \backsim A_2$; $B_1 \backsim B_2$ என்றால் $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$ என நிறுவுக.

15. A ஆனது ஒருமையில் சமச்சீரணி என்றால், P என்ற ஒருமையில் அணியானது $A^{-1} = P^{T} P$ என்றமையுமாறு உளதென நிறுவுக.

16. $R(A^* A) = R(A A^*) = R(A)$ என நிறுவுக.

17. $m \times n$ மெய்யணி A-ன் அளவை m $(\leqslant n)$ என்க. அப்படியானால், $R(A A^{T}) = m$ எனவும், இதிலிருந்து $A A^{T}$ ஆனது ஒருமையில் $m \times m$ சமச்சீரணியெனவும் நிறுவுக. $A A^{T}$-ன் மூலே வரை உறுப்புகளைப் பற்றி என்ன கூறமுடியும் ?

18. பின்வரும் கணக்கிலுள்ள வெக்டர்கள் ஒருபடிச்சார்ந்துள்ளன என அணி மூலமாக நிறுவுக. ஒவ்வொன்றிலுமுள்ள அதிகபட்ச ஒருபடிச்சாரா வெக்டர்களைக் கண்டு, மற்றெல்லா வெக்டர்களையும் இவற்றின் ஒருபடிச் சேர்வாக எழுதுக.

(a) $X_1 = [1, 2, 3, -2]$
$X_2 = [2, -2, 1, 3]$
$X_3 = [3, 0, 4, 1]$

(b) $X_1 = [1, 1+i, -i]$
$X_2 = [0, i, 1+2i]$
$X_3 = [1, 1+2i, 1+i]$

(c) $X_1 = [1, 2, 1, 3]; X_2 = [1, 3, 5, 2]; X_3 = [3, 6, 2, 9]$
$X_4 = [2, 4, 3, 6]$

19. $X_1, X_2, \ldots, X_r$ என்பன ஒருபடிச்சாராதவை.

$Y_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} X_j$ என்றவாறு அமையும் $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ என்ற r வெக்டர்களும் ஒருபடிச்சாராதிருக்கத் தேவையான, போதுமான நிபந்தனை $A = [a_{ij}]$ ஒருமையில் அணியாக இருக்க வேண்டும் என்பதாகுமென நிறுவுக.

5. முற்றிசைவு அணிகள்

(Congruent Matrices)

A, B என்பன F என்ற களத்தின் மீதமைந்த, ஒரே அணித்தரங்கொண்ட இரு சதுர அணிகளென்க. F-ன் மீது P என்ற ஒருமையில் அணியானது $A = P^{\mathsf{T}} B P$ என்றமையுமாறு உளதாயின் A ஆனது B-யோடு முற்றிசைவு உடையது எனப்படும். இதனை $A \overset{c}{\backsim} B$ எனக் குறிப்போம். மேலும், $A \overset{c}{\backsim} B$ என்றால் $B \overset{c}{\backsim} A$ என்பது வெளிப்படை. ஏனெனில் $B = (P^{\mathsf{T}})^{-1} A P^{-1} = \left(P^{-1}\right)^{\mathsf{T}} A P^{-1} = Q^{\mathsf{T}} A Q\left(Q = P^{-1}\right.$ ஒருமையில்$\left.\right)$ ஆகும். மேலும், $A \overset{c}{\backsim} B$ என்றால்,

$R(A) = R(P^{\mathsf{T}} B P) = R(B)$ ($\because$ P^{T}, P ஒருமையில்) எனவே A-யும், B-யும் சரிநிகர் அணிகளாகும். உண்மையில், அணிகளின் முற்றிசைவுத் தன்மையானது சரிநிகர்த் தன்மையின் ஒரு சிறப்பு வகையேயாகும்.

$A = P^{\mathsf{T}} B P$-ல் ஒருமையில் அணி P ஆனது ஆதார நிரல் அணிகளின் பெருக்கலாக எழுதப்படுமானால் P^{T} ஆனது அதைச் சார்ந்த ஆதார நிரை அணிகளின் எதிர் வரிசைப் பெருக்கலாக அமையும் என்பதை எளிதில் சரி பார்க்கலாம். ஏனெனில்,

$P = F_1 . F_2 . \dots F_t$ என்க. $F_1, F_2, \dots,$ என்பன ஆ. நிரல் அணிகள். அப்படியானால்,

$P^{\mathsf{T}} = (F_1 . F_2 . \dots F_t)^{\mathsf{T}} = F^{\mathsf{T}}_t \; F^{\mathsf{T}}_{t-1} \dots, F^{\mathsf{T}}_1$. இங்கு $F^{\mathsf{T}}_t, \dots, F^{\mathsf{T}}_1$ என்பன ஆதார நிரை அணிகளாகும்.

$$\therefore \quad P^{\mathsf{T}} B P = F^{\mathsf{T}}_t . F^{\mathsf{T}}_{t-1} \dots, F^{\mathsf{T}}_1 \; B F_1, F_2 \dots, F_t$$

$$= F_t^{\mathsf{T}} \left[\cdots\cdots\cdots \left\{ F_2^{\mathsf{T}} \left(F_1^{\mathsf{T}} B F_1\right) \; F_2 \right\} \cdots\cdots\cdots \right] F_t .$$

இதிலிருந்து B-யை ஆ.மாற்றங்கள் மூலம் A-ஆக உருமாற்ற எளிய ஒரு வழி தெரிகிறது. B-ல் முதலில் F_1 ஐச் சார்ந்த ஓர் ஆதார நிரல்மாற்றம் செய்யப்படுகிறது என்போம். உடன் B-ல் F_1 ஐச் சார்ந்த ஆதார நிரை மாற்றமான $F^T{}_1$-யையும் செய்ய வேண்டும். இவ்விரு மாற்றங்கள் மூலமும் நமக்கு $F^T{}_1\, B\, F$ கிடைக்கும். இவ்விரு மாற்றங்களும் ஒரு ஜோடி ஆதார முற்றிசைவு மாற்றங்கள் (a pair of elementary congruent transformations) எனப்படும். இவ்வாறு முடிவுள்ள, தொடர்ச்சியான பல ஜோடி ஆதார முற்றிசைவு மாற்றங்கள் மூலம் $A \overset{c}{\sim} B$ கிடைக்கும்.

மேற்கூறிய ஒவ்வொரு ஜோடி மாற்றங்களாலும் ஓர் அணியின் முற்றிசைவுத் தன்மை மாறுவதில்லை என்பதைக் கவனிக்கவும்.

அணிகளின் சரிநிகர்த் தன்மையானது ஒரு சரிநிகர் தொடர்பென முன்பு நிரூபித்துள்ளது போல்,

(i) $A \overset{c}{\sim} A$ (பிரதிபலிக்கும் தன்மை)

(ii) $A \overset{c}{\sim} B \Longrightarrow B \overset{c}{\sim} A$ (சமச்சீர் தன்மை)

(iii) $A \overset{c}{\sim} B,\ B \overset{c}{\sim} C \Longrightarrow A \overset{c}{\sim} C$ (கடத்தும் தன்மை)

என்பனவற்றை நிறுவலாம். ஆதலால், அணிகளின் முற்றிசைவுத் தன்மை ஒரு சரிநிகர் தொடர்பு (Equivalence relation) ஆகும்.

§ 5·1. தேற்றம் :

$A \overset{c}{\sim} B$ என்க. அப்படியானால்,

(i) B சமச்சீராக இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே A சமச்சீராகும்.

(ii) A எதிர்சீராக இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே B-யும் எதிர்சீராகும்.

நிரூபணம் :

(i) முதலில் B சமச்சீரணி என்போம். அப்படியானால் $B^T = B$ ஆகும்.

$A \overset{c}{\sim} B$ ஆதலால், P என்ற ஒருமையில் அணியானது.

$A = P^T\, B\, P$ என்றவாறு உள்ளது.

இப்பொழுது $A^{\mathsf{T}} = (P^{\mathsf{T}}\, B\, P)^{\mathsf{T}}$

$$= P^{\mathsf{T}}\, B^{\mathsf{T}}\, (P^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}}$$
$$= P^{\mathsf{T}}\, B^{\mathsf{T}}\, P$$
$$= P^{\mathsf{T}}\, B\, P \;(\because B^{\mathsf{T}} = B)$$
$$= A$$

ஆதலால், A-யும் சமச்சீராகும்.

அடுத்து A சமச்சீரென்க. அப்படியானால், $A^{\mathsf{T}} = A$ ஆகும்.

$A \overset{c}{\sim} B$ ஆதலால், P என்ற ஒருமையில் அணியானது $A = P^{\mathsf{T}} B\, P$ என்றவாறு உள்ளது.

$$\therefore \quad B = \left(P^{-1}\right)^{\mathsf{T}} A\, P^{-1}$$
$$= Q^{\mathsf{T}}\, A\, Q \;\left(Q = P^{-1}\right)$$

$$\therefore\; B^{\mathsf{T}} = (Q^{\mathsf{T}}\, A\, Q)^{\mathsf{T}}$$
$$= Q^{\mathsf{T}}\, A\, Q = B$$ ஆகும்.

$\therefore$ B சமச்சீராகும்.

(ii) இதன் நிரூபணம் பயிற்சியாக விடப்பட்டுள்ளது.

கி. **தேற்றம் :**

சமச்சீரணிகளோடு (எதிர்ச்சீர் அணிகளோடு) முற்றிசைவு கொண்ட எல்லா அணிகளும் சமச்சீர் (எதிர்ச்சீர்) ஆகும்.

§ 5·2. தேற்றம் :

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த சமச்சீரணி A-யின் அளவை $r > 0$ என்றால், F-ன் மீது P என்ற ஒருமையில் அணியானது,

$P^{\mathsf{T}}\; A\; P =$ மூலை வரை $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r,\; 0\;, 0\;, \ldots, 0)$ என்றமையுமாறு உள்ளது. இங்கு $\alpha_i \neq 0 \in F\,(i = 1,\, 2, \ldots, r)$

நிரூபணம் :

A-ன் அளவை $r > 0$ ஆதலால், $A \neq 0$ ஆகும்.

$A = [\,a_{ij}\,]_{n\times n}$ என்க. A சமச்சீராதலால் $a_{ij} = a_{ji}$ ஆகும். முதற் கட்டமாக $a_{11} \neq 0$ என்க.

$a_{1p} = a_{p1} = k_p \;(P = 2, \ldots, n)$ என்றால் P^{th} நிரையிலிருந்து $(a_{11}^{-1}\, k_p)$ தடவை முதல் நிரையையும், p^{th} நிரலிலிருந்து $(a_{11}^{-1}\, k_p)$

தடவை முதல் நிரலையும் கழித்தால் $\Big\{$(அ-து) ஆதார மாற்றங்கள் $\mathbf{H}_{p1}\left(-\dfrac{k_p}{a_{11}}\right)$, $\mathbf{K}_{p1}\left(-\dfrac{k_p}{a_{11}}\right)\Big\}$ $B=[b_{ij}] \overset{c}{\backsim} A$ கிடைக்கும். ($\because$ ஜோடி ஆதார முற்றிசைவு மாற்றங்களே உபயோகித்துள்ளோம்). A சமச்சீராதலால் B-யும் சமச்சீராகவும், $b_{11}=a_{11}$, $b_{1p}=b_{p1}=0$ $(p=2, 3, \ldots n)$ ஆகவுமிருக்கும்.

அடுத்து $b_{22}\neq 0$ என்றல் அணி B-ன் முதல் நிரை, நிரலுக்குப் பங்கமேற்படாதவாறு முன்போல் தகுந்த ஜோடி ஆதாரமுற்றிசைவு மாற்றங்கள் மூலம் $D=[d_{ij}] \overset{c}{\backsim} A$ என்ற அணியானது $d_{11}=a_{11}$, $d_{22}=b_{22}$, $d_{2j}=d_{j2}=0$ $(j=3, \ldots n)$ என்றவாறு கிடைக்கும். இங்கு D-யும் சமச்சீரே. அடுத்து $d_{33}\neq 0$ என்றல், மீண்டும் முன்போல் செயல்படலாம். இவ்வாறு நாம் தொடர்ந்து செயல்பட ஒரு கட்டத்தில் நமக்கு $Q=[q_{ij}] \overset{c}{\backsim} A$ என்ற சமச்சீரணி கிடைக்கின்றது என்போம். அதன் வடிவம்,

$$Q=\begin{bmatrix}
a_{11} & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0\\
0 & b_{22} & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0\\
0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & q_{ss} & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 & q_{s+1,\,s+2} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & q_{s+1,\,n}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & q_{s+2,\,s+1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & q_{n,\,s+1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & q_{n,\,n}
\end{bmatrix}$$

என்போம். அதாவது அணி Q-ல் மூலைவரை உறுப்பு $q_{s+1,\,s+1}=0$ என்க. இப்பொழுது ஒவ்வொரு $q_{ij}=0$ என்றல் தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டு விட்டது, A-ன் அளவை r ஆதலால், $s=r$ ஆகவுமிருக்கும். இப்படியில்லாது யாதானுமொரு $q_{ij}\neq 0$ என்க. இதனை $q_{s+t,\,s+u}\neq 0$ என்று குறிப்போம்.

(i) $u=t$ என்றல் அதாவது $q_{s+t,\,s+t}\neq 0$ என்றல், ஒரு ஜோடி ஆதார முற்றிசைவு மாற்றங்களான $H_{s+1,\,s+t}$, $K_{s+1,\,s+t}$ மூலம் இவ்வுறுப்பை $(s+1, s+1)$-ஆவது இடத்திற்குக் கொண்டு வரலாம்.

(ii) $u \neq t$ என்றால் $(s+t)^{th}$ நிரையை $(s+u)^{th}$ நிரையோடும், பின் $(s+t)^{th}$ நிரலை $(s+u)^{th}$ நிரலோடும் கூட்ட, இதனால் கிடைக்கும் முற்றிசைவு அணி $R = [R_{ij}]$-ல்,

$$R_{s+t,\, s+t} = q_{s+t,\, s+u} + q_{s+u,\, s+t}$$
$$= 2.\ q_{s+t,\, s+u} \neq 0 \quad [\because\ q_{s+u,\, s+t} = q_{s+t,\, s+u} \neq 0]$$

இங்கு நாம் $H_{s+u,\, s+t\, 1}$, $K_{s+u,\, s+t\, 1}$ என்ற ஒரு ஜோடி ஆதார முற்றிசைவு மாற்றங்களை உபயோகித்துள்ளோம். எனவே இப்பொழுது அணி R-ல் (i) ல் கூறியுள்ளபடி மீண்டும் செயல் படலாம்.

(iii) $a_{11} = 0$ என்க. அப்படியானால், $q_{s+1,\, s+1} = 0$ ஆக இருக்கும் போது எவ்வாறு செயல்படுகின்றோமோ அதேபோல் செயல்பட ஆரம்பிக்கவேண்டும்.

இவ்வாறு தொடர்ந்து ஒவ்வொரு கட்டத்திலும் செயல்படு வோமானால், A-ன் அளவை r ஆதலாலும், ஆதாரமாற்றங் களால் அளவை மாறாததாலும், இறுதியாக A ஆனது மூலை வரை $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, 0, 0, \ldots, 0)$ என்று உருமாற்றம் பெறும்.

மேலும், இங்கு ஜோடியான ஆதார முற்றிசைவு மாற்றங் களையே பயன்படுத்தியுள்ளதாலும், இம்மாற்றங்களை, A யை இவற்றை யொத்த ஆதார அணிகளால் முன், பின் பெருக்குவ தால் பெறலாமாதலாலும், $P^{\mathsf{T}} A P =$ மூலை வரை $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, 0, \ldots 0)$ என்றவாறு P என்ற ஒருமையில் அணி உளதாகும். மேலும், A-ன் உறுப்புகளில், களத்தில் வரையறுக்கப்பட்டுள்ள செயல்களே நடைபெறுவதால் Pஆனது F-ன் மீதமைந்திருக்கும்.

§ 5·3. தேற்றம்:

மெய்யெண் களம் R-ன் மீதமைந்துள்ள அணி A-ன் அளவை r என்றால், R-ன்மீது P என்ற ஒருமையில் அணியானது.

$P^{\mathsf{T}} A P =$ மூலை வரை $(1, 1, 1, \ldots, -1, -1 \ldots -1, 0, \ldots, 0)$ என்றமையுமாறு உள்ளது. இங்கு 1ஆனது s தடவைகள் இடம் பெற்றால், -1 ஆனது $(r-s)$ தடவைகள் இடம் பெறும்.

நிரூபணம்:

A ஆனது களம் R-ன் மீதமைந்த சமச்சீரணி ஆதலால், தேற்றம் § 5·2-ன்படி R-ன் மீது Q என்ற ஒருமையில் அணி யானது $Q^{\mathsf{T}} A Q =$ மூலை வரை $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, 0, \ldots, 0\}$ என்றவாறு உள்ளது. இங்கு $\alpha_t \in R$ ஆகும்.

மூலை வரை உறுப்புகளில் s எண்ணிக்கை $+ve$ எனவும் $(r-s)$ எண்ணிக்கை $-ve$ எனவும் கொள்வோம். பொதுத் தன்மைக்குப் பங்க மேற்படாதவாறு (without loss of generality) இம் மூலைவரை அணியின் முதல் s உறுப்புகள் $+ve$ எனவும், மீதி $(r-s)$ உறுப்புகள் $-ve$ எனவும் கொள்ளலாம். ஏனெனில் வேறு எவ்வாறிருப்பினும் ஜோடி ஆதார முற்றிசைவு மாற்றங்கள் H_{ij}, K_{ij} மூலம் இவ்வாறு இடம்பெறச் செய்யலாம். இம் மாற்றங்களால் அணிகளின் முற்றிசைவுத்தன்மை மாறுவதில்லை.

எனவே, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_s$ என்பன $+ve$; $\alpha_{s+1}, \alpha_{s+2}, \cdots, \alpha_r$ என்பன $-ve$ என்க. அப்படியானல், $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_r \in R$ என்ற மெய்யெண்கள் $\beta_1^2 = \alpha_1$, $\beta_2^2 = \alpha_2$, $\ldots$ $\beta_s^2 = \alpha_s$; $\beta^2_{s+1} = -\alpha_{s+1}$, $\ldots$ $\beta_r^2 = -\alpha_r$ என்றவாறு உள்ளன.

$$B = \text{மூலை வரை} \left(\frac{1}{\beta_1}, \frac{1}{\beta_2}, \ldots, \frac{1}{\beta_r}, 1, \ldots, 1\right)$$ என்ற அணியை எடுத்துக்கொள்வோம். $P = Q\,B$ என்க.

அப்படியானல்,

$$\begin{aligned} P^T A\, P &= (QB)^T A\,(QB) = B^T (Q^T A\,Q)\, B \\ &= \text{மூலை வரை} \left(\frac{1}{\beta_1}, \frac{1}{\beta_2}, \ldots, \frac{1}{\beta_r}, 1, 1, \ldots 1\right) \cdot \\ &\qquad \text{மூலை வரை} (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r, 0, \ldots 0) \cdot \\ &\qquad \text{மூலை வரை} \left(\frac{1}{\beta_1}, \frac{1}{\beta_2}, \ldots, \frac{1}{\beta_r}, 1, 1, \ldots 1\right). \\ &= \text{மூலை வரை} \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1^2}, \ldots, \frac{\alpha_s}{\beta^2_s}, \frac{\alpha_{s+1}}{\beta^2_{s+1}}, \ldots, \frac{\alpha_r}{\beta_r^2}, 0, \ldots, 0\right) \\ &= \text{மூலை வரை} (1, 1, \ldots 1, -1, \ldots, -1, 0, \ldots, 0) \end{aligned}$$

இங்கு 1 ஆனது s தடவையும் -1 ஆனது $(r-s)$ தடவையுமிருக்கும்.

இவ்வடிவமானது அவ்வணியின் நியமன வடிவம் (canonical form) எனப்படும்.

கு. தேற்றம் :

மெய் சமச்சீரணி A-ன் அளவை r என்றல்,

$$A \overset{c}{\backsim} \begin{bmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ஆகும். (I ஆனது அணி அலகாகும்.)

இங்கு s ஆனது A-ன் Index எனவும் $p = s - (r - s)$ ஆனது அதன் signature எனவும் அழைக்கப்படும்.

§ 5·4. தேற்றம் :

சிக்கலெண் களம் C-ன் மீதமைந்த சமச்சீரணி A-ன் அளவை r என்றால் C-ன் மீது P என்ற ஒருமையில் அணியானது

$P^T A P =$ மூலை வரை $(1, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ என்றவாறு உள்ளது.

இங்கு 1 ஆனது r தடவைகள் இடம் பெறும்.

நிரூபணம் :

C-ன் மீது Q என்ற ஒருமையில் அணியானது $Q^T A Q =$ மூலை வரை $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, 0, \ldots, 0)$ என்றவாறு உள்ளது. $(\alpha_i \neq 0 \in C)$. இப்பொழுது $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ என்ற C-யில் உள்ள எண்கள் $\beta_1^2 = \alpha_1$, $\beta_2^2 = \alpha_2$, $\ldots$, $\beta_r^2 = \alpha_r$ என்றவாறு உள்ளன. (C சிக்கலெண் களமாதலால் α_i ஆனது $-ve$ ஆக இருந்தாலும் சிக்கலெண்ணாக இருந்தாலும் இந்த தொடர்புகள் உண்மையாகும். ஆனால், மெய்யெண்களத்தில் இவை உண்மையல்ல). எனவே,

$B =$ மூலைவரை $\left(\frac{1}{\beta_1}, \frac{1}{\beta_2}, \ldots, \frac{1}{\beta_r}, 1, \ldots, 1\right)$ என்க.

$P = Q B$ என்றால் P ஒருமையில் ஆகும். மேலும்,

$P^T A P = B^T (Q^T A Q) B$

$=$ மூலைவரை $\left(\frac{1}{\beta_1}, \frac{1}{\beta_2}, \ldots, \frac{1}{\beta_r}, 1, \ldots, 1\right)$.

மூலைவரை $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, 0, \ldots, 0)$.

மூலைவரை $\left(\frac{1}{\beta_1}, \frac{1}{\beta_2}, \ldots, \frac{1}{\beta_r}, 1, \ldots, 1\right)$.

$=$ மூலைவரை $(1, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ ஆகும்.

இங்கு 1 ஆனது r தடவைகள் உண்டு.

கி. தேற்றம் :

சிக்கல் சமச்சீரணி A-ன் அளவை r என்றால்,

$A \overset{c}{\sim} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ஆகும். இது A-ன் நியமன வடிவம் எனப்படும்.

§ 5·5. தேற்றம் :

F-என்ற களத்தின் மீதமைந்த எதிர் சீரணி *A*-ன் அளவை $2r\ (r\neq 0)$ என்றால் *F*-ன் மீது *P* என்ற ஒருமையில் அணியானது $P^{T}AP=[D_1, D_2, \ldots, D_r, 0, \ldots, 0]$ என்றமையுமாறு உள்ளது.

இங்கு $D_t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $(t=1, \ldots r)$ ஆகும்.

நிரூபணம் :

ஓர் எதிர் சீரணியில் ஆதார முற்றிசைவு மாற்றங்கள் செய்வதால் கிடைக்கும் அணியும் எதிர்சீர் அணியாகுமென அறிவோம்.

மேலும், எதிர்சீர் அணியின் எல்லா மூலைவரை உறுப்புகளும் பூச்சியமென்பதையும் அறிவோம்.

$A=[a_{ij}]_{n\times n}$ எதிர்சீர் ஆதலால், $a_{ii}=0$, $a_{ij}=-a_{ji}$ ஆகும். *A*-ன் அளவை $2r\neq 0$ ஆதலால் $A\neq 0$. எனவே, யாதானுமொரு உறுப்பு $a_{ij}\neq 0$ ஆகும். இப்பொழுது ஜோடி ஆதார முற்றிசைவு மாற்றங்கள் H_{i_1}, K_{i_1} ; H_{j_2}, K_{j_2} செய்வதால் கிடைக்கும் அணி $B=[b_{ij}] \overset{c}{\backsim} A$-ல் $b_{12}=a_{ij}\neq 0$ $b_{21}=a_{ji}=-a_{ij}=-b_{12}\neq 0$ ஆகவுமிருக்கும். இவ்வணி *B*-ல் ஆதார முற்றிசைவு மாற்றங்கள் $H_1(\overset{-1}{b_{12}})$, $K_1(\overset{-1}{b_{12}})$ களால் கிடைக்கும் அணி $D=[d_{ij}] \overset{c}{\backsim} B$-ல் $d_{12}=1$, $d_{21}=-1$ ஆகும்.

அடுத்து *D*-ல் $H_{i_1}(-d_{i_2}) = H_{i_1}(d_{2i})$, $K_{i_1}(d_{2i})$

$$H_{i_2}(d_{i_1}) = H_{i_2}(-d_{1i}),\ K_{i_2}(-d_{1i})\ i=3, \ldots n$$

என்ற இரு ஜோடி ஆதார முற்றிசைவு மாற்றங்கள் செய்வோம். $H_{i_2}(d_{i_1})$, $H_{i_1}(-d_{i_2})$ மாற்றங்களால் முறையே முதல், இரண்டாவது நிரலிலுள்ள மற்றெல்லா உறுப்புகளும் $K_{i_2}(-d_{1i})$, $K_{i_1}(d_{2i})$ மாற்றங்களால் முறையே முதல், இரண்டாவது நிரையிலுள்ள மற்றெல்லா உறுப்புகளும் பூச்சியமாகும். எனவே இம் மாற்றங்களால் கிடைக்கும் அணி *G* ஆனது,

$G=\begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$ என்ற கூறிட்ட வடிவிலிருக்கும். இங்கு

$D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ஆகவும், A_1 ஆனது $(n-2) \times (n-2)$ அ. தரம் கொண்ட எதிர் சீரணியாகவும் இருக்கும். $A_1 = 0$ என்றால் G ஆனது நமக்குத் தேவையான வடிவமாகும். $A_1 \neq 0$ என்றால், கிளை அணி A_1 ல் நாம் முன் விவரித்துள்ள முறைப்படி ஜோடி, ஜோடியான ஆதார முற்றிசைவு மாற்றங்கள் செய்யலாம். எனவே $A_1 \overset{c}{\sim} \begin{bmatrix} D_2 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$ என்று கிடைக்கும். A_1 ன் அ. தரம் $(n-2)$ ஆதலால், A_2-ன் அ. தரம் $(n-4) \times (n-4)$ ஆக இருக்கும். இங்கு $D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ஆதலால், $A \overset{c}{\sim}$ மூலைவரை $[D_1, D_2, A_2]$

$A_2 = 0$ என்றால் இதுவே தேவையான வடிவமாகும். அப்படியில்லாவிடில் மீண்டும் இவ்வாறு தொடர்ந்து செயல்பட இறுதியாக நமக்கு, A-ன் அளவை $2r$ ஆதலாலும், மேலே விவரிக்கப்பட்ட மாற்றங்களால் அளவை மாறுததாலும் $A \overset{c}{\sim}$ மூலைவரை $[D_1, D_2, \ldots, D_r, 0, \ldots, 0]$ என்று கிடைக்கும்.

மேற்கூறிய வழி முறைகளில் நாம் ஒவ்வொரு கட்டத்திலும் ஜோடியான ஆதார முற்றிசைவு மாற்றங்களையே உபயோகித்துள்ளோம். இவ்வொவ்வொரு ஜோடி மாற்றங்களையும் நாம், A யை இவற்றை யொத்த ஜோடியான ஆதார அணிகளால் முன், பின் பெருக்குவதால் பெறலாம். மேலும், இவ்வொவ்வொரு ஜோடியிலும் உள்ள ஓர் ஆதார அணியான மற்றதன் நிரை, நிரல் மாற்றுக (Transpose) இருக்கும். இவற்றை நாம்

P_1, P_1^{T} ; P_2, P_2^{T} ; …, P_t, P_t^{T} ; என்போமானால்

$$P_t^{T} . P_{t-1}^{T} \cdots P_1^{T} A P_1 . P_2 \cdots P_t$$
$$= \text{மூலைவரை } (D_1, D_2, \ldots, D_r, 0, \ldots, 0)$$

(அ-து) $P^{T} A P =$ மூலைவரை $(D_1, D_2, \ldots, D_r, 0, \ldots, 0)$

மேலும், P ஆனது F-ன் மீதே அமைந்திருக்கும் என்பது வெளிப்படை.

இவ்வடிவமானது எதிர்சீரணியின் நியமன வடிவம் எனப்படும்.

குறிப்பு : ஓர் எதிர்சீரணியின் அளவையானது $P^{T} A P =$ மூ. வரை $(D_1, D_2, \ldots D_r, 0, \ldots 0)$-ல் D_i-க்கள் எத்தனை தடவை இடம் பெறுகின்றதோ அதுபோல் இரு மடங்காகும். எனவே

எல்லா எதிர்சீரணிகளின் அளவைகளும் இரட்டையெண் களாகும்.

§ 5·6. ஹெர்மைட் முற்றிசைவு அல்லது ஒருங்கிசைவு (Hermitely congruent or Conjunctive)

A, B என்பன ஒரே அ. தரங்கொண்ட சதுர அணிகளென்க. P என்ற ஒருமையில் அணியானது,

$A = P^* B P$ என்றமையுமாறு உளதாயின் A ஆனது B-க்கு ஹெர்மைட் முற்றிசைவாக உள்ளது என்போம். இதனை $A \overset{HC}{\backsim} B$ என்றும் குறிப்பது வழக்கம்.

அணிகளின் ஹெர்மைட் முற்றிசைவுத் தன்மையானது (i) பிரதிபலிக்கும் (ii) சமச்சீர் (iii) கடத்தும் பண்புகள் உடையது என எளிதில் நிறுவலாம். எனவே இது ஒரு சரிநிகர் தொடர்பாகும். மேலும், $\underline{\wedge}$ ஹெர்மைட் முற்றிசைவுத் தன்மை யும் சரிநிகர்த் தன்மையின் ஒரு சிறப்பு வடிவமேயாகும்.

$A \overset{HC}{\backsim} B$ என்க. அப்படியானுல், P என்ற ஒருமையில் அணி யானது,

$A = P^* B P$ என்றவாறு உள்ளது. P ஒருமையில் ஆதலால், இதனை ஆதார அணிகளின் பெருக்கலாக எழுத முடியும். எனவே

$P = P_1 P_2 \ldots P_t$ என்க. (P_i ஆதார அணிகள்)

அப்படியானுல், $P^* = P^*_t\ P^*_{t-1} \ldots , P^*_1$. ஆதலால்,

$A = P^*_t P^*_{t-1} \ldots\ldots \{ P^*_2 (P^*_1 B P_1) P_2 \} \ldots , P_t$. இவ் வடிவிலிருந்து B ஐ ஆதார மாற்றங்கள் மூலம் A ஆக உருமாற்ற ஒரு வழி புலப்படுகிறது. B-ல் P_1 ஐச் சார்ந்த ஓர் ஆதார நிரல் மாற்றம் செய்வோமானுல், உடன் $P_1{}^*$ ஐச் சார்ந்த ஆதார நிரை மாற்றமும் செய்தல் வேண்டும். இவ்விரண்டும், ஒரு ஜோடி ஆதார ஒருங்கிசைவு மாற்றங்களெனப்படும். இவ்வாறு தொடர்ச்சி யான பல ஜோடி ஆதார ஒருங்கிசைவு மாற்றங்கள் மூலம் A கிடைக்கும்.

ஒரு ஜோடி ஆதார ஒருங்கிசைவு மாற்றங்களால் ஓர் அணியின் ஒருங்கிசைவுத்தன்மை பாதிக்கப்படுவதில்லை எனப் பார்த்தோம். பின்வருவன ஜோடியான ஆதார ஒருங்கிசைவு மாற்றங்களா என எளிதில் சரி பார்க்கலாம்.

(i) H_{ij}, K_{ij} (ii) $H_{i}(\alpha)$, $K_{i}(\bar{\alpha})$ (iii) $H_{ij}(\alpha)$, $K_{ij}(\bar{\alpha})$, $\alpha \neq 0$ மேலும், P_1 ஆனது K_{ij}, $K_{i}(\bar{\alpha})$, $K_{ij}(\bar{\alpha})$ என்பனவற்றுள் யாதானுமொரு நிரல்மாற்றத்தை யொத்த ஆதார அணி யென்றால் P_1^* ஆனது முறையே H_{ij}, $H_{i}(\alpha)$, $H_{ij}(\alpha)$ என்பன வற்றுள் ஒன்றைக் குறிக்கும்.

§ 5·7. தேற்றம்:

A ஆனது B யோடு ஒருங்கிசைவு கொண்டதாக இருக்கட்டும். B ஆனது ஹெர்மிசியன் (எதிர் ஹெர்மிசியன்) அணியாக இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே A-யும் ஹெர்மிசியன் (எதிர் ஹெர்மிசியன்) ஆகும்.

நிரூபணம்:

B ஹெர்மிசியன் என்க. அப்படியானால், $B^* = B$ ஆகும்.

$A = P^* B P$ என்றவாறு P என்ற ஒருமையில் அணி உளது. எனவே $A^* = (P^* B P)^* = P^* B^* (P^*)^* = P^* B P = A$ எனவே A-யும் ஹெர்மிசியன்.

அடுத்து A ஹெர்மிசியன் என்றால்

$$B^* = \left\{\left(P^{-1}\right)^* A P^{-1}\right\}^* = (Q^* A Q)^* \quad \left(Q = P^{-1}\right)$$
$$= Q^* A Q. \quad \therefore \ B\text{யும் ஹெர்மிசியன் ஆகும்.}$$

எதிர் ஹெர்மிசியனுக்கான நிரூபணம் பயிற்சியாகும்.

§ 5·8. தேற்றம்:

A என்ற ஹெர்மிசியன் அணியின் அளவை r என்றால் P என்ற ஒருமையில் அணியானது $P^* A P =$ மூலைவரை $[1, 1, \ldots, 1, -1, -1, \ldots, -1, 0, \ldots, 0]$ என்றமையுமாறு உள்ளது. இங்கு 1 ஆனது s தடவைகள் உளதாயின் (-1) ஆனது $(r-s)$ தடவைகள் உள்ளன.

நிரூபணம்:

$r > 0$ என்க. அப்படியானால், $A \neq 0$ ஆகும்.

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$ என்போம். A ஹெர்மிசியன் ஆதலால், $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ மேலும், ஹெர்மிசியன் அணிகளின் மூலைவரை உறுப்புகள் மெய்யெண்களாதலால் $\overline{a_{ii}} = a_{ii}$. முதற்கட்டமாக $a_{11} \neq 0$ என்க.

அப்படியானல்,

$$H_{p1}\left(-\frac{a_{p1}}{a_{11}}\right),\ K_{p1}\left(\overline{-\frac{a_{p1}}{a_{11}}}\right) = K_{p1}\left(-\frac{a_{1p}}{a_{11}}\right)$$ என்ற ஒரு ஜோடி ஆதார ஒருங்கிசைவு மாற்றங்கள் செய்ய ($p=2, 3, \dots, n$) $B = [b_{ij}] \overset{HC}{\backsim} A$ என்ற அணி கிடைக்கும். இதில் $b_{11} = a_{11}$ ஆகவும் $b_{1p} = b_{p1} = 0$ ஆகவுமிருக்கும்.

அடுத்து $b_{22} \neq 0$ என்ருல் B-ன் முதல் நிரை, நிரலுக்குப் பங்கமேற்படாதவாறு முன்பு கூறியது போல் தகுந்த ஜோடி ஆதார ஒருங்கிசைவு மாற்றங்கள் செய்வதன்மூலம் $D = [d_{ij}] \overset{HC}{\backsim} A$ என்ற அணியானது $d_{11} = a_{11}, d_{22} = b_{22}, d_{2j} = d_{j2} = 0$ $(j = 3, \dots n)$ என்று கிடைக்குமாறு செய்யலாம். அடுத்து $d_{33} \neq 0$ என்ருல் மீண்டும் முன்போல் செயல்படலாம்.

இவ்வாறு தொடர்ந்து செயல்படும்போது ஒரு கட்டத்தில் நமக்கு $Q = [q_{ij}] \overset{HC}{\backsim} A$ என்ற அணி பின்வரும் வடிவில் கிடைக்கட்டும்.

$$Q = \begin{bmatrix}
a_{11} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & b_{22} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & q_{s,s} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & q_{s+1,\,s+2} & & \cdots & \cdots & \cdots & q_{s+1,\,n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & q_{s+2,\,s+1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & q_{n,\,s+1} & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & q_{n,\,n}
\end{bmatrix}$$

அதாவது Q-ன் மூலே வரை உறுப்பு $q_{s+1,\,s+1} = 0$ என்க. எல்லா $q_{ij} = 0$ என்ருல் $(i, j = s+1, \dots n)$ $s = r$-க்குத் தேற்றம் நிருபிக்கப்பட்டுவிட்டது. அப்படியில்லாவிடில்,

(i) $q_{s+1,\,s+1} = 0$ ஆகவும், யாதானுமொரு $q_{s+t,\,s+t} \neq 0$ ஆகவும் இருக்கட்டும் $(t = 1, 2, \dots \overline{n-s})$. ஜோடி ஆதார ஒருங்கிசைவு மாற்றங்கள் $H_{s+1,\,s+t}$, $K_{s+1,\,s+t}$ மூலம் இவ்வுறுப்பை $(s+1, s+1)$ ஆவது இடத்திற்குக் கொண்டு வந்து முன்போல் தொடர்ந்து செயல்படுவோம்.

(ii) $q_{s+t,\ s+t} = 0$ ஆகவும், யாதானுமொரு $q_{s+t,\ s+u} \neq 0$ ஆகவும் $(u = 1, 2, \ldots, \overline{n-s})$ இருந்தால் ஜோடி ஆதார ஒருங்கிசைவு மாற்றங்கள் $H_{s+1,\ s+t\ 1}$, $K_{s+1,\ s+t\ 1}$ மூலம் $Q' = [\,q'_{ij}\,] \overset{HC}{\backsim} Q$ கிடைக்கட்டும்.

இதில் $q_{s+t,\ s+t} = q_{s+t,\ s+u} + q_{s+u,\ s+t} = q_{s+t,\ s+u} + \overline{q_{s+t,\ s+u}}$ ஆகும். $q_{s+t,\ s+u}$ தனிகற்பனை யெண் (purely imaginary) இல்லை யென்றால் $q'_{s+t,\ s+t} \neq 0$ ஆகும். எனவே இது (i) வகை ஆதலால், (i)-ல் கூறியுள்ளபடி செயல்படலாம்.

$q_{s+t,\ s+u}$ தனிக்கற்பனையெண் என்றால் ஜோடி ஆதார ஒருங்கிசைவு மாற்றங்கள் $H_{s+t,\ s+u}\sqrt{-1}$, $K_{s+t,\ s+u}\sqrt{-1}$ மூலம் $M = [m_{ij}]$ என்ற அணி கிடைக்கும். இதில்

$$\begin{aligned} m_{s+t,\ s+t} &= \sqrt{-1}\,(m_{s+t,\ s+u} - m_{s+u,\ s+t}) \\ &= \sqrt{-1}\,(m_{s+t,\ s+u} - \overline{m_{s+t,\ s+u}}) \\ &\neq 0 \text{ ஆகும்.} \end{aligned}$$

மேலும், இது ஒரு மெய்யெண் ஆதலால், (i) வகையாகும்.

(iii) $a_{11} = 0$ என்றால் இதை $q_{s+1,\ s+1} = 0$ என்ற பிரிவாகக் கருதி அவ்வகைப்படியே செய்வோம்.

ஆதலால், இவ்வாறு ஒவ்வொரு கட்டத்திலும் தொடர்ந்து செயல்பட இறுதியாக நமக்கு $A \overset{HC}{\backsim}$ மூலைவரை $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, 0, \ldots, 0)$ என்று கிடைக்கும்.

மேற்கூறிய வழிமுறைகளில் ஒவ்வொரு கட்டத்திலும் நாம், ஜோடி, ஜோடியான ஆதார ஒருங்கிசைவு மாற்றங்களையே உபயோகித்துள்ளதால், இவ்வொவ்வொரு ஜோடி மாற்றங்களையும், இவற்றை யொத்த ஆதார அணிகளால் முன் பின் பெருக்குவதால் பெறலாம். மேலும், இவ்வொவ்வொரு ஜோடியிலும் உள்ள ஓர் ஆதார அணியானது மற்றதன் நிரை, நிரல் மாற்று இணைச்சிக்கலணியாக (Conjugate Transpose) இருக்கும் இவை வரிசைக்கிரமமாக $P_1, P^*_1;\ P_2, P_2^*;\ \ldots;\ P_t, P^*_t$ என்றால்,

$P_t^*\, P^*_{t-1} \ldots P^*_1\, A\, P_1\, P_2 \ldots P_t =$ மூலைவரை $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, 0, \ldots, 0\}$

(அ-து) $Q^*AQ =$ மூலைவரை $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, 0, \ldots, 0\} \ldots (1)$

இங்கு $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ என்பன மெய்யெண்களாகும், $Q = P_1 \ldots P_t$ ஆனது ஒருமையில் அணி.

அடுத்து பொதுத்தன்மைக்குப் பங்கமேற்படாதவாறு, முதல் s மூலைவரை உறுப்புகளும் $+ve$ எனவும் மீதி $(r-s)$ மூலைவரை உறுப்புகளும் $-ve$ எனவும் கொள்வோம். அப்படியானல், $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ என்பன $\beta^2{}_1 = \alpha_1, \ldots, \beta^2{}_s = \alpha_s ; \beta^2{}_{s+1} = -\alpha_{s+1}, \ldots, \beta_r = -\alpha_r$ என்றவாறு உள்ளன.

$$R = \text{மூலைவரை} \left\{ \frac{1}{\beta_1}, \frac{1}{\beta_2}, \ldots, \frac{1}{\beta_r}, 1, \ldots, 1 \right\} \text{ என்க,}$$

$P = Q\ R$ என்ருல்

$$P^* A P = R^* (Q^* A Q) R = \text{மூலைவரை} \left\{ \frac{\alpha_1}{\beta^2{}_1}, \ldots, \frac{\alpha_r}{\beta^2{}_r}, 0, \ldots, 0 \right\}$$

$= \text{மூலைவரை } \{1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, 0, \ldots, 0\}$ இங்கு 1 ஆனது s தடவையும் -1 ஆனது $(r-s)$ தடவையும் இடம் பெறும்.

இம் மூலைவரை வடிவானது ஹெர்மிசியன் A-ன் நியமன வடிவம் எனப்படும். மேலும், s ஆனது A-ன் குறியீட்டெண் (index) எனவும் $s-(r-s) = 2s-r$ ஆனது A-ன் ராசிஎண் (Signature) எனவும் அழைக்கப்படும்.

கி. தேற்றம் :

A என்ற ஒரு ஹெர்மிசியன் அணியின் அளவை r எனின், P என்ற ஒருமையில் அணியானது

$$P^* A P = \begin{bmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ என்றவாறிருக்கும்.}$$

(I_p ஆனது தரம் p கொண்ட அணி அலகு)

§ 5·9. தேற்றம் :

ஓர் எதிர் ஹெர்மிசியன் அணி A-ன் அளவை r என்ருல், P என்ற ஒருமையில் அணியானது,

$P^* A P = \text{மூலைவரை } \{i, i, \ldots, i, -i, \ldots, -i, 0, \ldots, 0\}$ என்றவாறு உளது. இங்கு i ஆனது s தடவை இடம் பெறுமென்ருல் $-i$ ஆனது $(r-s)$ தடவை இடம் பெறும்.

நிரூபணம் :

A ஆனது எதிர் ஹெர்மிசியன் ஆதலால், $A^* = -A$ ஆகும். இப்பொழுது $(-iA)^* = -\bar{i}\,A^* = +iA^* = -iA$.

எனவே $(-iA)$ ஆனது ஹெர்மிசியன் ஆகும்.

$(-iA)$ ஹெர்மிசியன் ஆதலால், முந்திய தேற்றத்தின்படி P என்ற ஒருமையில் அணியானது $P^*(-iA)P =$ மூலைவரை $(1, 1, \ldots, 1, \ldots, 1, -1, -1, \ldots, -1, 0, \ldots, 0)$ என்றமையுமாறு உளது. இங்கு 1 ஆனது s தடவையென்றால் -1 ஆனது $(r-s)$ தடவை இடம் பெறும்.

i ஆல் இருபுறமும் பெருக்க,

$P^*AP =$ மூலைவரை $(i, i, \ldots, i, -i, \ldots, -i, 0, \ldots, 0)$ ஆகும். இங்கு i ஆனது s தடவையும், $(-i)$ ஆனது $(r-s)$ தடவையும் இடம் பெறும். இவ்வடிவம், A-ன் நியமன வடிவமெனப்படும்.

குறிப்பு 1 : A ஹெர்மிசியன் என்றால் (iA) யும் ஹெர்மிசியன் ஆகும்.

குறிப்பு 2 : § 5·9 தேற்றத்தை, "A எதிர் ஹெர்மிசியன் என்றால் P என்ற ஒருமையில் அணியானது,

$$P^*AP = \begin{bmatrix} iI_s & 0 & 0 \\ 0 & -iI_{r-s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ என்றமையுமாறு உளது."

என்றும் கூறலாம்.

பயிற்சி 5

1. பின்வரும் கணக்குகளில் தரப்பட்டுள்ள அணிகளை A என்க. ஒவ்வொன்றையும் கேட்கப்பட்டுள்ள நியமன வடிவிற்கு மாற்றுக. P என்ற ஒருமையில் அணியானது $P^T AP =$ இந் நியமன வடிவம் என்றால் P-யை காண்.

(i) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$-ன் § 5·2 நியமன வடிவம்.

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$-ன் § 5·3 நியமன வடிவம்.

(iii) $\begin{bmatrix} i & 1-i & 2+i \\ 1-i & 0 & -1+i \\ 2+i & -1+i & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1+i & 2i \\ 1+i & 2 & -i \\ 2i & -i & 1-i \end{bmatrix}$க்களின் § 5·4 நியமன வடிவம்.

(iv) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$க்களின் § 5·5 நியமன வடிவம்.

(v) $\begin{bmatrix} 1 & 1+i & 1+2i \\ 1+i & 2 & -i \\ 1+2i & i & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & i & -i \\ -i & 1 & 2-i \\ i & 2+i & 3 \end{bmatrix}$க்களின் § 5·8 நியமன வடிவம்.

(vi) $\begin{bmatrix} i & 1+i & -2+3i \\ -1+i & 0 & 1-i \\ 2+3i & -1-i & 2i \end{bmatrix}$-ன் § 5·9 நியமனவடிவம்

2. எல்லா மெய் எதிர் சீரணிகளின் அணிக்கோவைகளின் மதிப்பும் + *ve* ஆகவோ அல்லது 0 ஆகவோ இருக்குமென நிறுவுக.

3. ஒற்றைப்படை அணித்தரங்கொண்ட எல்லா எதிர் சீரணிகளும் ஒருமைசேர் என நிறுவுக.

4. ஒரே அ. தரங்கொண்ட இரு மெய் சமச்சீரணிகளின் அளவையும் (Index) சமமாக இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே அவை முற்றிசைவாகுமென நிறுவுக.

5. ஒரே அ. தரங்கொண்ட இரு ஹெர்மிசியன் அணிகளின் அளவையும், குறியீட்டெண்ணும் சமமாக இருந்தால் மட்டுமே அவை ஒருங்கிசைவனவாகும்.

6. அணிகளின் ஒருங்கிசையும் தன்மையானது ஒரு சரிநிகர் தொடர்பென நிறுவுக.

6. ஒருபடிச் சமன்பாடுகள்

(Linear Equations)

இப்பகுதியில், அணிகளானது எவ்வாறு ஒருபடிச்சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் தீர்வு காண உதவுகின்றன எனப் பார்க்கலாம்.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்ற n தெரியாதனவற்றில் (unknown) உள்ள $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = h$ என்ற ஓர், ஒருபடிச் சமன்பாட்டில் (linear equation) $h = 0$ என்ருல் இச்சமன்பாடு சமபடித்தானது (homogeneous) எனவும், $h \neq 0$ என்ருல், இது சமபடித்தானதல்ல (non homogeneous) எனவும் அழைக்கப்படும்.

n தெரியாதனவற்றில் உள்ள சமன்பாடுகளின் தொகுதிக்கு ஒரு தீர்வோ, முடிவில்லா தீர்வுகளோ, அல்லது தீர்வே இல்லாமலோ இருக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக, x, y என்ற இரு தெரியாதனவற்றில் $x + y = 5$, $x - y = 1$ என்ற இரு சமன்பாடுகளை எடுத்துக் கொள்வோம். இத்தொகுதிக்கு $x = 3$, $y = 2$ என்ற ஒற்றைத் தீர்வுண்டு. $x - 2y = 1$, $2x - 4y = 5$ என்ற தொகுதிக்குத் தீர்வில்லை. $x - 2y = 1$, $2x - 4y = 2$ என்ற தொகுதிக்கு முடிவில்லா தீர்வுகள் உள்ளன. ஏனெனில் $y = t$, $x = 1 + 2t$ (t-சாராமாறி-parameter) என்ற தீர்வில் t-க்கு எந்த மதிப்பும் கொடுக்கலாம்.

ஒரு சமன்பாட்டுத் தொகுதிக்குத் தீர்வு இல்லையெனின் அத்தொகுதியிலுள்ள சமன்பாடுகளை பொருத்தமற்றவை அல்லது இசைவற்றவை (inconsistent) எனவும், தீர்வு இருப்பின் இவற்றை பொருத்தமுடையன அல்லது இசைவுடையன (consistent) எனவும் அழைப்போம். இசைவுள்ள சமன்பாட்டுத் தொகுதிக்கு ஒன்று அல்லது முடிவில்லா தீர்வுகள் இருக்கலாம். n தெரியாதனவற்றில் ஒரு m சமன்பாடுகளை எடுத்துக்கொள்வோம். ($m \leqslant n$ அல்லது $> n$ ஆக இருக்கலாம்)

$$\begin{array}{cccccccccccc} a_{11} & x_1 & + & a_{12} & x_2 & + & \cdots & + & a_{1n} & x_n & = & h_1 \\ a_{21} & x_1 & + & a_{22} & x_2 & + & \cdots & + & a_{2n} & x_n & = & h_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & x_1 & + & a_{m2} & x_2 & + & \cdots & + & a_{mn} & x_n & = & h_m \end{array}$$

இதனை அணி வடிவில்,

$$\underset{m\times n}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}} \underset{n\times 1}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}} = \underset{m\times 1}{\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ h_m \end{bmatrix}}$$ என்றும்,

சுருக்கமாக $AX = H$ என்றும் எழுதலாம். இங்கு A ஆனது இச் சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் குணக அணி (coefficient Matrix) எனவும், அணி $[A, H]$ ஆனது இத்தொகுதியின் **மிகுநிப் படுத்திய** அணி (Augmented Matrix) எனவும் அழைக்கப்படும். மேலும், $AX = H$-ல் $H = 0$ என்றால், இதனை **சமபடித்தான ஒருபடிச்** சமன்பாட்டுத் தொகுதி (System of homogenous linear equations) என்போம்.

$AX = H$ என்ற சமன்பாட்டுத் தொகுதியில், ஒவ்வொரு a_{ij} யும், ஒவ்வொரு h_t யும் ஒரு களம் F-ல் இருக்குமானால், இத் தொகுதி F **என்ற களத்தின் மீதமைந்துள்ளது** எனப்படும். ஒரு களம் F-ன் மீதமைந்த, ஒரே எண்ணிக்கை தெரியாதனவற்றில் உள்ள இரு சமன்பாட்டுத் தொகுதிகளில், ஒன்றின் ஒவ்வொரு தீர்வும், மற்றதன் தீர்வாகுமென்றால், இத்தொகுதிகள் **சரிநிகர்** (equivalent) எனப்படும்.

§ 6·1. சமபடித்தான ஒருபடிச் சமன்பாடுகள்

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{11} & x_1 & + & a_{12} & x_2 & + & \cdots & \cdots & + & a_{1n} & x_n = 0 \\ a_{21} & x_1 & + & a_{22} & x_2 & + & \cdots & \cdots & + & a_{2n} & x_n + 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & x_1 & + & a_{m2} & x_2 & + & \cdots & \cdots & + & a_{mn} & x_n = 0 \end{array}$$ என்ற

n தெரியாதனவற்றில் m சமன்பாடுகளைக் கொண்ட தொகுதிக்கு $x_1 = 0 = x_2 = \ldots\ldots = x_n$ என்பது ஒரு தீர்வாகும். இதனை நாம் வெளிப்படைத் தீர்வென்போம் (Trivial solution). இதனை விடுத்து, வெளிப்படையற்ற (Non trivial) தீர்வுகளைப்பற்றி மட்டும் நாம் பொதுவாகப் பார்க்கலாம்.

§ **6.2.** தேற்றம் :

ஒரு களம் F-ன் மீதமைந்த $m \times n$ அணி A-ன் அளவை r என்றால், அணிச் சமன்பாடு $AX = 0$ விற்கு F-ல் $(n-r)$ ஒருபடிச்சாரா தீர்வுகள் உள்ளன.

நிரூபணம் :

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $a_{ij} \in F$ என்க.

அணிச்சமன்பாடு $AX=0$-விற்கு X_1, X_2 என்பன இரு தீர்வுகளென்றால் $AX_1 = 0$, $AX_2 = 0$ ஆகும்.

$\lambda \in F$ என்றால், $A(\lambda X_1) = \lambda AX_1 = 0$ ஆதலால், λX_1-ம் ஒரு தீர்வாகும். மேலும், $\lambda_1, \lambda_2 \in F$ என்றால்,

$$A(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) = A(\lambda_1 X_1) + A(\lambda_2 X_2) = \lambda_1 (AX_1) + \lambda_2 (AX_2)$$

$= 0$. எனவே $(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)$ ம் ஒரு தீர்வாகும்.

எனவே $AX = 0$-ன் தீர்வுகளின் கணமானது மொத்த வெளி (Total Space) $V_n(F)$-ன் ஓர் உள்ளடங்கு வெளி (Sub space) V ஆகும்.

A-ன் அளவை r ஆதலால், களம் F-ல் P, Q என்ற ஒருமையில் அணிகள்

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,\, m-r} \\ 0_{m-r,\, r} & 0_{m-r,\, n-r} \end{bmatrix}$$ என்றமையுமாறு உள்ளன.

$X \in V$ என்க. அப்படியானால், $AX = 0$ ஆகும்.

$\therefore \quad PAX = 0$.

மேலும், Q ஒருமையில் ஆதலால் $\overset{-1}{Q}$ உள்ளது. எனவே $Y = \overset{-1}{Q} X$ அதாவது $X = QY$ என்க. Y-ன் ஒவ்வொரு மதிப்பையும் சார்ந்து ஒரு, ஒரே ஒரு மதிப்பு Xற்கு உண்டு எனவும், X-ன் ஒவ்வொரு மதிப்பையும் சார்ந்து Y-க்கு ஒரு, ஒரே ஒரு மதிப்பு உண்டு எனவும் இதிலிருந்து அறிகிறோம். இப்பொழுது,

$$0_{m,1} = PAX = PA(QY)$$

$$= \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,\,n-r} \\ 0_{m-r,\,r} & 0_{m-r,\,n-r} \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,\,n-r} \\ 0_{m-r,\,r} & 0_{m-r,\,n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

எனவே, இதிலிருந்து Y-ன் முதல் r உறுப்புகளும் பூச்சிய மெனவும், கடைசி $(n-r)$ உறுப்புகள் $y_{r+1}, y_{r+2}, \ldots, y_n$ என்பன வற்றை F-லிருந்து, நமது விருப்பப்படி சாரா மாறிகளாகத் (parameters) தேர்ந்தெடுக்கலாமெனவும் அறிகிறோம்.

இப்பொழுது,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} = X = QY = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ y_{r+1} \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

$$\{\because \; y_i=0,\; i=1, 2, \ldots r\}$$

$$\therefore \quad x_1 = q_{1,\,r+1}\, y_{r+1} + q_{1,\,r+2}\, y_{r+2} + \ldots + q_{1n}\, y_n$$

$= \sum\limits_{j=r+1}^{n} q_{1j}\, y_j$ ஆகும். இதுபோல்

$x_2 = \sum\limits_{j=r+1}^{n} q_{2j}\, y_j, \ \ldots, y_n = \sum\limits_{j=r+1}^{n} q_{ij}\, y_j$ ஆகும்.

எனவே, $x_i = \sum\limits_{j=r+1}^{n} q_{ij}\, y_j. \quad i=1, 2, \ldots n$ ....(1)

இவ்வாறாக $x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்ற n தெரியாதனவற்றின் மதிப்பு களை $y_{r+1}, y_{r+2}, \ldots, y_n$ என்ற $(n-r)$ சாராமாறிகள் வாயிலாக எழுத முடியும். ....(2)

y_j-க்களுக்கு $(j=r+1, \ldots n)$ குறுப்பிட்ட மதிப்புகள் கொடுக்க, உதாரணமாக $y_{r+1}=1,\; y_{r+2}=y_{r+3}=\ldots=y_n=0$ என்போமானல், $x_1=q_{1,\,r+1};\; x_2=q_{2,\,r+1};\; \ldots;\; x_n=q_{n,\,r+1}$ அதாவது $x_t=q_{t,\,r+1}$ $(t=1, \ldots n)$ என்பது ஒரு தீர்வாகும்.

ஆனால், $\begin{bmatrix} q_{1,\ r+1} \\ q_{2,\ r+1} \\ \vdots \\ q_{n,\ r+1} \end{bmatrix}$ ஆனது அணி Q-ன் $(r+1)^{th}$ நிரலாதலால், Q-ன் $(r+1)^{th}$ நிரலானது சமன்பாடு $A\ X=0$-விற்கு ஒரு தீர்வென அறிகிறோம். இதுபோல் மற்றொரு சாராமாறிக்கு 1 என்றும் மீதி உள்ளவற்றிற்கு 0 என்றும் மதிப்பிட, Q-ன் கடைசி $(n-r)$ நிரல்களும் சமன்பாடு $A\ X=0$-விற்குத் தீர்வுகளென அறியலாம். ....(3)

ஆனால், $Q=[Q_1, Q_2, \ldots, Q_n]$ ஆனது ஒருமையில் ஆதலால், அதனுடைய எல்லா நிரல்களும், குறிப்பாக கடைசி $(n-r)$ நிரல்களும் ஒருபடிச் சாராதவையாகும். மேலும், (1) ஐ

$X = Q_{r+1}\ y_{r+1} + Q_{r+2}\ y_{r+2} + \ldots + Q_n\ y_n\ \ (y_i \in F)$ என்றும் மாற்றி எழுதமுடியும் ......(4)

எனவே, $A\ X=0$ வின் ஒவ்வொரு தீர்வும் $Q_{r+1}, Q_{r+2}, \ldots, Q_n$ என்ற $(n-r)$ ஒருபடிச்சாரா தீர்வுகளின் ஒருபடிச்சேர்வாகும்...(5)

குறிப்பு: (4), (5) லிருந்து $V_n(F)$ ன் உள்ளடங்கு வெளி V-ன் பரிமாணமானது $(n-r)$ என்பது தெளிவு.

§ 6·3. தேற்றம்:

§ 6·2 ன் மறுதலையாக, $A\ X=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு சரியாக (exactly) $(n-r)$ ஒருபடிச் சாரா தீர்வுகளே இருக்குமென்றால் அணி A-ன் அளவை r ஆகும்.

நிரூபணம்:

$A\ X=0$ வில் $(n-r)$ ஒருபடிச்சாரா தீர்வுகள் உள்ளன. V ஆனது இத்தீர்வுகளின் கணமென்றால், V-ன் பரிமாணம் $(n-r)$ ஆகும். A-ன் அளவை s என்க.

அப்படியானால், § 6·2ன் படி V-ன் பரிமாணம் $(n-s)$ ஆகும்.

$\therefore\ (n-s)=n-r\ \ \therefore\ r=s.$ எனவே, A-ன் அளவை r ஆகும்.

கி. தேற்றம் 1:

$m \times n$ அணி A-ன் அளவை r என்றால், $A\ X=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு ஒரு வெளிப்படையற்ற தீர்வாவது இருக்கத் தேவையான, போதுமான நிபந்தனை $n-r>0$ ஆகும்.

கி. தேற்றம் 2:

A ஆனது ஒரு சதுர அணி என்றால், $AX = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு ஒரு வெளிப்படையற்ற தீர்வாவது இருக்கத் தேவையான, போதுமான நிபந்தனை A ஆனது ஒருமைசேர் (Singular) அணியாக இருக்கவேண்டுமென்பதாகும்.

கி. தேற்றம்3 :

$m \times n$ அணியின் அளவை r என்க. $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]$ என்றால் அணிச் சமன்பாடு $YA = 0$ விற்கு $(m-r)$ ஒருபடிச் சாரா தீர்வுகள் உள்ளன.

கி. தேற்றம் 4:

A ஒரு சதுர அணி என்க. அப்படியானால், அதன் நிரைகளில் (நிரல்களில்) $(n-r)$ ஒருபடிச் சாரா தொடர்புகள் (linearly independent relations) இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே அதன் அளவை r ஆகும்.

§ 6·4. ஓர் அணியின் பூச்சிய வெளியும், பரிமாணமும் (Null Space and Nullity of a Matrix)

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அணி A-ன் அ. தரம் $m \times n$, அளவை r என்க. $AX = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளால் உருவாகும் $V_n(F)$-ன் உள்ளடங்கு வெளி V ஆனது A-**நிரல் பூச்சிய** வெளி (column Null Space) எனவும், இவ்வுள்ளடங்கு வெளி V-ன் பரிமாணம் $(n-r)$ ஆனது A-**ன் நிரல் பூச்சிய பரிமாணம்** (column Nullity) எனவும் அழைக்கப்படும். அணி அளவை + நிரல் பூச்சிய பரிமாணம் = நிரல்களின் எண்ணிக்கையாகும்.

இதுபோல் $YA = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளால் உருவாகும் உள்ளடங்கு வெளியானது A-ன் **நிரை பூச்சிய வெளி** (Row Null space) எனவும், இதன் பரிமாணம் $(m-r)$ ஆனது A-ன் **நிரை பூச்சிய பரிமாணம்** (Row Nullity) எனவும் அழைக்கப்படும். முன்போல் அணி அளவை + நிரை பூச்சிய பரிமாணம் = நிரைகளின் எண்ணிக்கை என்பது தெளிவு.

A ஒரு n சதுர அணி என்றால், அதன் நிரை நிரல்களின் பூச்சிய பரிமாணங்கள் (Nullity) சமமாதலால், இங்கு நாம் இதனைப் பொதுவாக, அணி A-ன் **பூச்சிய பரிமாணம்** $\gamma(A)$ என்றே குறிப்பிடுவோம்.

§ **6·5.** அணியின் வீச்சு (Range of a Matrix)

களம் F-ன் மீதமைந்த அணி A-ன் அளவை r என்ருல், பரிமாணம் r கொண்ட $V_n(F)$ ன் உள்ளடங்கு வெளியானது A-ன் வீச்சு (Range) எனப்படும்.

§ **6·6.** சமபடியில்லாத ஒருபடிச் சமன்பாடுகள் : (Non Homogeneous Linear Equations)

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} \quad H = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ h_m \end{bmatrix}_{m\times 1} \neq 0 \text{ என்க.}$$

$A X = H$ ஆனது அணிவடிவில் ஒரு சமன்பாட்டுத் தொகுதியாகும்.

$A X = H$ இசைவுடையது (consistent) என்ருல், X_1, X_2 என்பன இச்சமன்பாட்டின் இரு வெவ்வேறு தீர்வுகளென்க. அப்படியாளுல்,

$A X_1 = H$; $A X_2 = H$ ஆகும். எனவே,

$A(X_1 - X_2) = 0$. ஆதலால்,

$Y = X_1 - X_2$ ஆனது $A X = 0$ ன் ஒரு வெளிப்படையல்லாத தீர்வாகும். இதன் மறுதலையாக,

$A X = H$-ன் ஒரு தீர்வு X_1 ஆகவும்,

$A X = 0$-ன் ,, ,, Y ஆகவும் இருக்கட்டும்.

$A X = H$-ல் $X = X_1 + Y$ எனப் பிரதியிடுவோம். அப்படியாளுல், $A(X_1 + Y) = A X_1 + A Y = H + 0 = H$.

$\therefore$ $Z = X_1 + Y$ ஆனது $A X = H$ ஐ நிறைவு செய்கிறது. எனவே இதுவும் ஒரு தீர்வாகும். இவ்வாறு,

$A X = H$-ன் ஒரு தீர்வு X_1 ஆகவும், $A X = 0$-ன் ஒரு தீர்வு Y ஆகவும் இருந்தால் $Z = X_1 + Y$ ஆனது $A X = H$-ன் ஒரு தீர்வென அறிகிறேம். எனவே, $A X = H$ என்ற சமன்பாட்டுத்தொகுதி இசைவுடையது என்ருல், இதன் எல்லா (முழு) தீர்வுகளும் (Complete Solution) காண, $A X = H$-ன் ஒரு குறிப்பிட்ட (particular) தீர்வும், இச் சமன்பாட்டைச் சார்ந்த சமபடித்தான

சமன்பாட்டுத் தொகுதி $AX = 0$-ன் எல்லா தீர்வுகளும் காண்போம்.

$AX = 0$ ன் ஒவ்வொரு தீர்வோடும் இந்த குறிப்பிட்ட தீர்வைக் கூட்ட, $AX = H$ ன், மற்றெல்லாத் தீர்வுகளும் கிடைக்கும்.

§ 6·7. தேற்றம் :

ஒரு களம் F-ன் மீதமைந்த $AX = H$ என்ற சமபடியில்லாத ஒருபடிச் சமன்பாட்டுத் தொகுதி இசைவுடையதாயிருக்கத் தேவையான, போதுமான நிபந்தனை, குணக அணி A-யும் மிகுதிப்படுத்திய அணி $[A, H]$ம் சமஅளவைகள் உடையதாயிருக்க வேண்டும் என்பதாகும்.

நிரூபணம் :

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}\ ;\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} \qquad H = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix}_{m\times 1} \text{ என்க.}$$

A-ன் அளவை r என்போம்.

அப்படியானல், F-ன் மீது P, Q என்ற ஒருமையில் அணிகள்

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,\, n-r} \\ 0_{m-r,\, r} & 0_{m-r,\, n-r} \end{bmatrix} \text{ என்றமையுமாறு உள்ளன.}$$

$AX = H$ ஆனது இசைவுடைய சமன்பாட்டுத் தொகுதியாகட்டும். Q ஒருமையில் ஆதலால், $\overset{-1}{Q}$ உளது. $Y = \overset{-1}{Q}X$ என்க. அப்படியானல்,

$X = QY$ ஆகும். (இதன் அ. தரம் $n\times 1$)

எனவே, X, Y இவற்றிற்கிடையே ஓர் ஒன்றுக்கொன்றுன தொடர்பு (one to one correspondence) உள்ளது. இப்பொழுது

$$PH = P(AX) = PA(QY) = (PAQ)Y$$

$$= \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,\, n-r} \\ 0_{m-r,\, r} & 0_{m-r,\, n-r} \end{bmatrix}_{m\times n} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}_{\times 1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_r \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

எனவே, PH என்ற $m \times 1$ அணியில் கடைசி $(m-r)$ உறுப்புகளும் பூச்சியமாகும்.

இதன் மறுதலையாக,

PH என்ற $m \times 1$ அணியின் கடைசி $(m-r)$ உறுப்புகளும் பூச்சியமென்றால் Y என்ற $n \times 1$ அணியானது

$(PAQ)\, Y = PH$ என்றவாறு உள்ளது.

$\therefore\ (PAQ)\, Y = PH$ ஆனது இசைவுடைய சமன்பாட்டுத் தொகுதியாகும்.

(அ-து) $AQY = P^{-1}\ PH = H$ ஆனது இசைவுடையது.

(அ-து) $AX = H$ ஆனது இசைவுடையது.

எனவே PH என்ற $m \times 1$ அணியின் கடைசி $(m-r)$ உறுப்புகளும் பூச்சியமாக இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே $AX = H$ ஆனது ஓர் இசைவுடைய சமன்பாட்டுத் தொகுதியாகும்......(1) மிகுதிப்படுத்திய அணி $[A\ H]$-ன் அ. தரம் $m \times (n+1)$ என அறிவோம்.

Q ஒருமையில் ஆதலால், $\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & I_1 \end{bmatrix}$ ஆன ஒருமையில் $(n+1)$ சதுர அணியாகும். இங்கு $I_1 = [\,1\,]$ ஆகும். இப்பொழுது

$$P\,[A\ H] \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & I_1 \end{bmatrix} = [PA\ \ PH] \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & I_1 \end{bmatrix} = [PAQ\ \ PH].$$

அணிகள் Pயும், $\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & I_1 \end{bmatrix}$-ம் ஒருமையில் ஆதலால்,

அணிகள் $[PAQ\ \ PH]$-ம் $[A\ H]$-ம் ஒரே அளவை உடைத்தனவாகும். ....(2)

(i) $AX = H$ ஆனது இசைவுடைய தொகுதி என்க. அப்படியானால், (1) லிருந்து $m \times 1$ அணி PH ன் கடைசி $(m-r)$ உறுப்புகளும் பூச்சியமாகும்.

$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,\, n-r} \\ 0_{m-r,\, r} & 0_{m-r,\, n-r} \end{bmatrix}$ ஆகும். எனவே அணி $[PAQ\ \ PH]$ ன் கடைசி $(m-r)$ நிரைகளும் பூச்சியமாகும்.

அதாவது

$$[PAQ\ \ PH]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & y_r \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ என்ற}$$

வடிவிலிருக்கும்.

எனவே, $[PAQ\ \ PH]$-ன் அளவை r ஆகும்.

$\therefore$ (2) லிருந்து $[A\ H]$-ன் அளவையும் r ஆகும்.

(ii) மறுதலையாக, $[A\ H]$-ன் அளவையும் r என்றால் (2) லிருந்து $[PAQ\ \ PH]$-ன் அளவை r ஆகும்.

$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ஆதலால், PH-ன் கடைசி $(m-r)$ உறுப்புகளும் பூச்சியமாக இருக்கவேண்டும். எனவே ,(1) லிருந்து

$AX = H$ ஆனது ஓர் இசைவுடைய சமன்பாட்டுத் தொகுதியாகும்.

கி. தேற்றம் 1 :

A ஆனது ஒருமையில் n சதுர அணி என்க. அப்படியானால், A, $[A\ H]$ ன் அளவைகள் சமம்.

எனவே, $AX=H$ ஆனது இசைவுடைய சமன்பாட்டுத் தொகுதியாகும்.

A ஒருமையில் ஆதலால், A^{-1} உளது. A^{-1}-ஆல் முன்பெருக்க $A^{-1}AX=A^{-1}H$. அதாவது $X=A^{-1}H$. (ஒரு தீர்வு) மேலும், இத்தீர்வு தனித்தன்மை (unique) வாய்ந்தது. ஏனெனில் X_1, X_2 என்பன இச்சமன்பாட்டின் இரு தீர்வுகளென்றால் $AX_1=H$; $AX_2=H$. ஆதலால், $AX_1=AX_2$ ஆகும்.

A^{-1} ஆல் முன்பெருக்க, $X_1=X_2$ ஆகும்.

எனவே, n தெரியாதனவற்றில் உள்ள n சமபடியில்லாத ஒருபடிச் சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் குணக அணி A ஒருமையில் என்றால் $AX=H$-ற்கு ஒரே ஒரு தீர்வுதான் உண்டு.

கி. தேற்றம் 2:

A, B, X என்பன n சதுர அணிகள் $AX=B$ என்றவாறு அமைந்துள்ளனவென்க.

$X=[X_1, X_2, \ldots, X_n]$, $B=[B_1, B_2, \ldots, B_n]$ என்று எழுதுவோமானால் (X_t, B_t என்பன அணிகள் X, B-க்களின் நிரல்கள்; $t=1, \ldots n$) $A[X_1, X_2, \ldots, X_n]=[B_1, B_2, \ldots, B_n]$ ஆகும்.

எனவே $AX=B$ என்ற சமன்பாடானது,

$AX_t=B_t$ $(t=1, \ldots n)$ என்ற சமன்பாடுகளின் தொகுதிக்குச் சமமாகும்.

எனவே, $A, [AB_1], \ldots, [AB_n]$ என்பன சம அளவை உடைத்தாயின், உடைத்தாயின் மட்டுமே சமன்பாடு $AX=B$ ஆனது இசைவுடையதாகும்.

(i) A ஒருமையில் என்றால், A-யும் $[AB]$ யும் சம அளவை n உடையன.

$\therefore$ $X=A^{-1}B$ என்பது $AX=B$-ன் ஒரே தீர்வாகும்.

(ii) A ஆனது ஒருமைசேராகவும், B ஆனது ஒருமையில்லாகவும் இருக்குமானால் $A, [AB]$ என்பன சமஅளவை உடைத்தனவல்ல. எனவே, $AX=B$ ஆனது இசைவற்ற சமன்பாட்டுத் தொகுதியாகும்.

(iii) A-யும் B-யும் ஒருமைசேரென்றால் துணைச்சமன்பாடு (auxiliary equation) $AX=0$-ன் தீர்வுகள் தனித்தன்மை வாய்ந்தனவல்ல (not unique) ஆதலால், $AX=B$-க்கு தீர்வுகள் உளதாயின் அவை தனித்தன்மை வாய்ந்தனவல்ல.

நடைமுறையில் நாம் ஒரு சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் தீர்வு காண பின்வரும் வழிமுறையைக் கையாள்வோம்.

முதலில் குணக அணி A-யை நிரை ஏறுபடி வடிவிற்கு (row echelon form) நிரைசரிநிகராக மாற்ற வேண்டும் (அதாவது ஆ. நிரை மாற்றங்கள் மட்டுமே உபயோகித்தல் வேண்டும்). A-ன்

நிரை ஏறுபடி வடிவம் C என்றால் $A \backsim C$ ஆகும் போது மிகுதிப் படுத்திய அணி $[A\ H] \backsim [C\ K]$ ஆகட்டும்.

$$K = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \vdots \\ K_m \end{bmatrix}$$ என்க.

A-ன் அளவை r என்றால் C-ன் முதல் r நிரைகளிலும் குறைந்த பட்சம் ஓர் உறுப்பாவது பூச்சியமில்லாமலும், மற்றெல்லா நிரைகளும் முற்றிலும் பூச்சியமாகவும் இருக்கும். மேலும், இந்த முதல் r நிரைகள் ஒவ்வொன்றிலும் முதல் பூச்சிய மில்லா உறுப்பு 1 ஆகவும் இந்த 1 இடம் பெறும் நிரலிலுள்ள எல்லா உறுப்புகளும் பூச்சியமாகவும் இருக்கும்.

i^{th} நிரையில் $(i = 1, 2, \ldots, r)$ முதல் பூச்சியமில்லா உறுப்பு இடம்பெறும் நிரல் j_i என்ற எண்ணால் குறிக்கப்படுமானால் $[C\ K]$-ன் முதல் r நிரைகளிலிருந்து $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ என்பன மற்ற மாறிகள் $x_{j_{r+1}}, \ldots, x_{j_n}$ வழியாகவும் $K_1, K_2, \ldots, K_m$-ல் ஒன்றின் வழியாக கிடைக்கும்.

சமன்பாட்டுத் தொகுதி இசைவுடையது என்றால் A, $[A\ H]$, $[C\ K]$ ஒரே அ.தரமுடையன.

$\therefore\ K_{r+1} = K_{r+2} = \ldots, = 0.$ எனவே சாராமாறிகள் $x_{j_{r+1}}, \ldots, x_n$ களின் மதிப்புகளும் இவற்றின் வழியாகக் கிடைக்கும் $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots x_{j_r}$ களின் மதிப்பும் சேர்ந்து தீர்வாகும்.

மறுதலையாக, $K_{r+1}, K_{r+2}, \ldots K_m$ என்பனவற்றில் யாதானு மொன்று பூச்சியமில்லை என்க. அப்படியானால், A, $[AH]$-ன் அளவைகள் சமமல்ல. எனவே இச் சமன்பாட்டுத் தொகுதி இசைவற்றதாகும்.

எ.கா. 1: A, B என்பன $m \times n$, $n \times p$ அ.தரமுடைய அணிக ளென்றால்

$R(AB) \leqslant$ குறைந்த $[R(A), R(B)]$ என நிறுவுக.

$AB\ X = 0 \ldots (1)$

$B\ X = 0 \ldots (2)$ என்ற அணிச் சமன்பாடுகளை எடுத்துக் கொள்வோம். (X ஆனது $p \times 1$ என்க)

$BX = 0$-விற்கு $p-R(B)$ ஒருபடிச்சாரா தீர்வுகள் உள்ளன. மேலும், (2)-ன் ஒவ்வொரு தீர்வுகளும் (1)-ன் தீர்வுகளாகும். ஆனால், (1)-ன் ஒவ்வொரு தீர்வுகளும் (2)-ன் தீர்வுகளாக இருக்கத் தேவையில்லை. எனவே,

(2)-ன் ஒருபடிச்சாரா தீர்வுகளின் எண்ணிக்கை $\leqslant$ (1)-ன் ஒருபடிச்சாரா தீர்வுகளின் எண்ணிக்கை.

அதாவது $p - R(B) \leqslant p - R(AB)$

$\therefore \quad R(AB) \leqslant R(B)$ ....(3)

இதுபோல் $YAB = 0$, $YA = 0$ என்ற சமன்பாடுகளின் ஒருபடிச்சாரா தீர்வுகளின் எண்ணிக்கையைக் கொண்டு (Y ஆனது $1 \times m$)

$R(AB) \leqslant R(A)$ ......(4) என நிறுவலாம்.

(3), (4) லிருந்து $R(AB) \leqslant$ குறைந்த $[R(A), R(B)]$

§ 6·8. தேற்றம்:

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அணிகள் A, B, C-க்களின் அ. தரங்கள் முறையே $m \times n, n \times p, p \times t$ என்றால்,

$R(AB) + R(BC) \leqslant R(B) + R(ABC)$

$ABC = 0$...(1), $BCX = 0$...(2) என்ற அணிச் சமன்பாடுகளை எடுத்துக்கொள்வோம்.

(2)-ன் ஒவ்வொரு தீர்வும் (1)-ன் தீர்வாகும். ஆனால் இதன் மறுதலை உண்மையல்ல.

$ABCX = 0$-விற்கு $t-R(ABC)$ ஒருபடிச்சாரா தீர்வுகளும்
$BCX = 0$-விற்கு $t-R(BC)$,, ,, ,, உள்ளன.

$\therefore$ $ABCX = 0$-ஐ நிறைவு செய்யத்தக்கதாகவும், அதே நேரத்தில் $BCX = 0$-வை நிறைவு செய்யாமலும், ஒருபடிச்சாரா வெக்டர்கள் இருக்குமாயின் அவற்றின் எண்ணிக்கை.

$[t-R(ABC)-[t-R(BC)]=R(BC)-R(ABC) = s$ என்க.

இவ்வெக்டர்களை $X_1, X_2, \ldots, X_s$ என்க. அப்படியானால், $BCX_1, BCX_2, \ldots, BCX_s$ என்பன F-ன் மீது ஓர், ஒருபடிச்சாரா தொகுதியை அமைக்கும். ஏனெனில்,

$\lambda_1 BCX_1 + \lambda_2 BCX_2 + \ldots + \lambda_s BCX_s = 0$ என்க ($\lambda_i \in F$)

$\therefore \quad BC(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_s X_s) = 0$ ஆகும்.

$\therefore \quad \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_s X_s = 0$ ஆனல், $X_1, X_2, \ldots, X_s$ என்பன ஓர் ஒருபடிச்சாராதவை ஆதலால், $\lambda_1 = 0 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_s$ ஆகும்.

எனவே, $BCX_1, \ldots, BCX_s$ ஓர் ஒருபடிச்சாராத் தொகுதியை அமைக்கின்றது. மேலும், $CX_1, CX_2, \ldots, CX_s$-ம் ஓர், ஒருபடிச் சாராத் தொகுதியை அமைக்கும். ஏனெனில்,

$\mu_1 CX_1 + \mu_2 CX_2 + \ldots + \mu_s CX_s = 0$ என்க $(\mu_i \in F)$

$\therefore \quad B\mu_1 CX_1 + B\mu_2 CX_2 + \ldots + B\mu_s CX_s = 0$ ஆகும்.

(அ-து) $\mu_1 BCX_1 + \mu_2 BCX_2 + \ldots + \mu_s BCX_s = 0$

எனவே, $\mu_1 = 0 = \mu_2 = \ldots = \mu_s$.

எனவே, $CX_1, CX_2, \ldots, CX_s$ என்ற s ஒருபடிச்சாரா வெக்டர்கள் ஒவ்வொன்றும் $ABX = 0$-வை நிறைவு செய்யும்.

அதே நேரத்தில் $BX = 0$-வை நிறைவு செய்யாது.

எனவே, $s \leqslant [p - R(AB)] - [p - R(B)] = R(B) - R(AB)$

(அ-து) $R(BC) - R(ABC) \leqslant R(B) - R(AB)$

$\therefore \quad R(AB) + R(BC) \leqslant R(B) + R(ABC)$

கி. தேற்றம் 1 :

A, C என்பன முறையே $m \times n$, $n \times t$ அணிகளென்ருல் $R(A) + R(C) - n \leqslant R(AC)$

நிரூபணம் :

முந்தைய தேற்றத்தில் B ஆனது $n \times n$ அ. தரங்கொண்டதெனவும் $B = I_n$ என்றும் பிரதியிடுவோமாஞல்,

$R(A) + R(C) \leqslant R(I_n) + R(AC)$ ஆகும்.

(அ-து) $\leqslant n + R(AC)$

$\therefore \quad R(A) + R(C) - n \leqslant R(AC)$

கி. தேற்றம் 2 :

$R(AC) \leqslant$ குறைந்த $[R(A), R(C)]$ ஆதலால்,

$R(A) + R(C) - n \leqslant R(AC) \leqslant$ குறைந்த $[R(A), R(C)]$

§ 6·9. தேற்றம் :

A, B என்ற $m \times n, n \times p$ அணிகள் $AB = 0$ என்றவாறு அமையுமானால் $R(A) + R(B) \leqslant n$

நிரூபணம் :

$AB = 0$ ஆதலால், B-ன் ஒவ்வொரு நிரலும் $AX = 0$ வின் ஒரு தீர்வாகும்.

$\therefore$ B-ன் எல்லா ஒருபடிச்சாரா நிரல்களும் $AX = 0$-வின் ஒருபடிச்சாரா தீர்வுகளாகும். இப்பொழுது B-ன் ஒருபடிச்சாரா நிரல்களின் எண்ணிக்கை $= R(B)$ ஆகவும் $AX = 0$-வின் ஒருபடிச்சாரா தீர்வுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை $n - R(A)$ ஆகவும் இருக்கும்.

$\therefore$ $R(B) \leqslant n - R(A)$

$\therefore$ $R(A) + R(B) \leqslant n$

§ 6·10 பூச்சிய பரிமாணத்திற்கான சில்வெஸ்டரின் விதி (Sylvesteris Law of Nullity)

A, B என்பன இரு சதுர அணிகளென்றால்,

அதிகபட்ச $\{\gamma(A), \gamma(B)\} \leqslant \gamma(AB) \leqslant \gamma(A) + \gamma(B)$ ஆகும்.

நிரூபணம் :

$R(A) + R(B) - n \leqslant R(AB) \leqslant$ குறைந்த $[R(A), R(B)]$ என அறிவோம். மேலும்,

$R(A) = n - \gamma(A)$

$R(B) = n - \gamma(B)$, $R(AB) = n - \gamma(AB)$ ஆதலால், இவற்றைப் பிரதியிட,

$n - \gamma(A) + n - \gamma(B) - n \leqslant n - \gamma(AB) \leqslant$ குறைந்த $[n - \gamma(A), n - \gamma(B)]$

(அ-து) $n - \{\gamma(A) + \gamma(B)\} \leqslant n - \gamma(AB) \leqslant$ குறைந்த $[n - \gamma(A), n - \gamma(B)]$

$\therefore$ அதிகபட்ச $\{\gamma(A), \gamma(B)\} \leqslant \gamma(AB) \leqslant \gamma(A) + \gamma(B)$ ஆகும்.

எ. கா. 1 : $3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 10$

$x_1 \qquad - \quad x_3 = 1$

$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7$ என்பன ஓர் இசைவுள்ள சமன்பாட்டுத் தொகுதியென நிறுவி, தீர்வு காண்.

$$[A\ H] = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 & 10 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 10 \\ 1 & -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & 7 \\ 6 & -2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & -2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A, $[A\ H]$-ன் அளவைகள் சமம். எனவே, இச்சமன்பாட்டுத் தொகுதி இசைவுடையது. மேலும், $x_1 = 2$; $x_2 = -1$; $x_3 = 1$ ஆகும்.

பிறிதொரு வகை : $|A| = -2 \neq 0$. எனவே, $\overset{-1}{A}$ உள்ளது. எனவே, சமன்பாட்டுத் தொகுதி இசைவுடையது. மேலும், இத்தொகுதியின் தீர்வு தனித்தன்மை (unique) வாய்ந்ததாகும்

$$\overset{-1}{A} = -\tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -4 & 7 & 5 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -\frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \text{ என}$$

எளிதில் காணலாம்.

$$\therefore \quad X = \overset{-1}{A} H = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -\frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(\text{அ-து}) \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad x_1 = 2;\ x_2 = -1;$$

$x_3 = 1$.

$|A| \neq 0$ ஆதலால், இதனை அணிக்கோவைகளை மட்டும் உபயோகித்தும் தீர்க்கலாம்.

எ·கா. 2:
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 - 1 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 - 2 &= 0 \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 3x_5 - 5 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 - 3 &= 0 \end{aligned}$$
என்ற சமன்பாட்டுத் தொகுதி இசைவுடையதென நிறுவி தீர்வு காண்.

$$[A\ H] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 5 & 1 & -2 & -1 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ஆகும்.

A, $[A\ H]$-ன் அளவைகள் சமம் $(= 3)$.

எனவே, இத்தொகுதி இசைவுடையது. மேலும், இத்தொகுதிக்கு $5 - 3 = 2$ ஒருபடிச்சாரா தீர்வுகள் உள்ளன.

$[A\ H]$-ன் இயல்பு வடிவிலிருந்து,
$x_1 = 1$; $x_2 - 2x_3 = 0$; $x_4 + 3x_5 = 0$ என அறிகிறோம்.

$x_3 = a$; $x_5 = b$ (a, b சாராமாறிகள்—arbitrary constants) இத்தொகுதியின் முழுத்தீர்வு $x_1 = 1$; $x_2 = 2a$; $x_3 = a$; $x_4 = -3b$; $x_5 = b$ ஆகும்.

எ·கா 3:
$$\begin{aligned} x \qquad + 3z - t &= 4 \\ 2x + y + 4z - 2t &= 5 \\ 3x + 2y + 5z - 3t &= 11 \end{aligned}$$
என்ற சமன்பாட்டுத் தொகுதி இசைவற்றதென நிறுவுக.

$$[A\ H] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & -3 & 11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

இங்கு அணி A-ன் அளவை 2. ஆனால், $[A\ H]$-ன் அளவை 3. எனவே இச்சமன்பாட்டுத் தொகுதி இசைவற்றது.

எ-கா 4: λ, μ என்பன சாராமாறிகள் என்றால் (arbitrary)

$x+y-z=3$
$x+3y+5z=1$
$2x-y+\lambda z=\mu$ என்ற சமன்பாட்டுத் தொகுதியை ஆராய்க.

$$[A\ H]=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 3\\ 1 & 3 & 5 & 1\\ 2 & -1 & \lambda & \mu\end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 2 & 6 & -2\\ 0 & -3 & \lambda+2 & \mu-6\end{bmatrix}$$

$$\backsim \begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 3 & -1\\ 0 & -3 & \lambda+2 & \mu-6\end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix}1 & 0 & -4 & 4\\ 0 & 1 & 3 & 2\\ 0 & 0 & \lambda+11 & \mu-9\end{bmatrix}$$

ஆகும்.

(i) $\lambda=-11,\ \mu=9$ என்றால் $A, [A\ H]$-ன் அளவைகள் சமம் $(=2)$. எனவே, இச்சமன்பாட்டுத் தொகுதி இசைவுள்ளது. மேலும், இத்தொகுதிக்கு $n-r=3-2=1$ ஒருபடிச்சாரா தீர்வுகள் உண்டு. அத்தீர்வுகள் $x-4z=4;\ y+3z=2$ என்ற அடிப்படையிலிருக்கும். எனவே,

$x=4t+4;\ y=2-3t;\ z=t$ (t சாராமாறி) ஆனது இத்தொகுதியின் முழுத்தீர்வாகும்.

(ii) $\lambda=-11,\ \mu\neq 9$ என்றிருந்தால்,

A-ன் அளவை 2 ஆகவும், $[A\ H]$-ன் அளவை 3 ஆகவுமிருக்கும். எனவே, இத்தொகுதி இசைவற்றதாகும்.

(iii) $\lambda\neq -11$ என்றால் $|A|\neq 0$.

எனவே, இத்தொகுதிக்கு ஒரு தீர்வு உண்டு. மேலும், அத்தீர்வு தனித்தன்மை வாய்ந்ததாகும்.

எ.கா 5: $2x_1+3x_2-x_3-2x_4=0$
$2x_1-11x_2+7x_3+8x_4=0$
$4x_1-x_2+2x_3+x_4=0$
$7x_2-4x_3-5x_4=0$ என்ற தொகுதியின் எல்லா வெளிப்படையற்ற தீர்வுகளும் காண்க.

$$[A\ H] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -11 & 7 & 8 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & -5 & 0 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{14} & \frac{1}{14} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} & -\frac{5}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$R(A)=2$. எனவே இத்தொகுதிக்கு வெளிப்படைத்தீர்வுகள் உண்டு. மேலே உள்ள வடிவிலிருந்து,

$x_1 + \frac{5}{14} x_3 + \frac{1}{14} x_4 = 0$
$x_2 - \frac{4}{7} x_3 - \frac{5}{7} x_4 = 0$ என்று கிடைக்கும்.

$x_3 = a, x_4 = b$ என்றால், (a, b சாராமாறிகள்)

$x_1 = -\frac{5}{14} a - \frac{1}{14} b$; $x_2 = \frac{4}{7} a + \frac{5}{7} b$; $x_3 = a$; $x_4 = b$ ஆனது இத் தொகுதியின் முழுத்தீர்வாகும்.

எ-கா 6: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ -ன் நிரை, நிரல் பூச்சிய வெளிகளின் தளங்களைக் (Bases) காண்.

$A X = 0$ என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம். இங்கு $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T{}_{4\times 1}$ என்பது சொல்லாமலேயே விளங்கும்.

இங்கு

$$[A\ H] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{6} & -\frac{7}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ இத்தொகுதியின் முழுத் தீர்வு,

$x_1 = -\frac{4}{3} x_3 - \frac{1}{3} x_4 = -\frac{4}{3} a - \frac{1}{3} b$
$x_2 = -\frac{5}{6} x_3 + \frac{7}{6} x_4 = -\frac{5}{6} a + \frac{7}{6} b$
$x_3 = a$; $x_4 = b$ (a, b-க்கள் சாராமாறிகள்) ஆகும்:

$$\therefore\ X = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} a - \frac{1}{3} b \\ -\frac{5}{6} a + \frac{7}{6} b \\ a + 0 \\ 0 + b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} a \\ -\frac{5}{6} a \\ a \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} b \\ \frac{7}{6} b \\ 0 \\ b \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{5}{6} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} a + \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{7}{6} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} b.$$ எனவே,

$$\begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{5}{6} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{7}{6} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ என்ற இரு வெக்டர்களும் நிரல் பூச்சிய வெளியை உருவாக்குகின்றன. ஆதலால், இவ்விரு வெக்டர்களும் நிரல் பூச்சிய வெளியின் தளமாகும். மேலும், நிரல் பூச்சிய பரிமாணம் = நிரல் பூச்சிய வெளியின் பரிமாணம் = 2.

இதுபோல் $YA = 0$ என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொண்டு இதன் மூலம் A-ன் நிரை பூச்சிய வெளியின் தளத்தை யும், அவ்வெளியின் பரிமாணத்தையும் நிர்ணயிக்கலாம்.

முக்கிய குறிப்பு **1.** நிரை, நிரல் பூச்சிய வெளிகளை, வெளிப்படை வெளிகளோடு சேர்த்துக் குழப்பக்கூடாது. பூச்சிய வெளி என்பதன் மூலம் தீர்வுகளால் உருவாக்கப்படும் வெளியையே குறிப்பிடுகின்றோம். இதுபோல் பூச்சிய பரிமாணம் என்பது பூச்சிய வெளியின் பரிமாணத்தைத் தான் குறிக்கின்றதே யொழிய, பரிமாணம் பூச்சியம் என்ற தவறான கருத்திற்கு இடங்கொடுக்கக் கூடாது.

குறிப்பு **2.** மேலே எடுத்துக்காட்டியுள்ள எல்லா கணக்கு களிலும் நாம் ஆதார நிரை மாற்றங்கள் மட்டுமே செய்துள்ளோம் என்பதைக் கவனிக்கவும்.

பயிற்சி 6

1. பின்வரும் சமன்பாட்டுத் தொகுதிகள் இசைவுள்ளன எனக் காண்பித்து அவற்றின் முழுத்தீர்வுகளை காண்க.

(a)
$$x + 2y - z = 4$$
$$2x + 4y + 3z = 5$$
$$x + 2y + 6z = -7$$

(b)
$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 1 = 0$$
$$x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 - 6 = 0$$
$$2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 - 4 = 0$$
$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0$$

(c)
$$x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1$$
$$2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 2$$
$$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 = 3$$

(d) $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4$
$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$
$2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 9$
$3x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -1$

2. பின்வரும் சமன்பாடுகளின் வெளிப்படையல்லா தீர்வுகளை காண்க.

(a) $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$
$2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0$

(b) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$
$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$
$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$

(c) $3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 0$
$2x_1 + 3x_3 - 3x_2 + 2x_4 + 9x_5 = 0$
$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 = 0$
$x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 0$

3. (i) $x + 2y - z = 0$
$x - y - 2z = 0$ என்ற தொகுதிக்கு வெளிப்படை
$2x - y + z = 0$ யல்லா தீர்வில்லையெனக் காண்பி.

(ii) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0$
$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0$,, ,,
$3x_1 - 4x_2 - 5x_3 + 8x_4 = 0$

4. பின்வரும் சமன்பாட்டுத் தொகுதிகள் இசைவுடையன வல்ல எனக் காண்பி.

(i) $2x + 6y + 11 = 0$
$6x + 20y - 6z + 3 = 0$
$6y - 18z + 1 = 0$

(ii) $x_1 + x_2 + x_3 = 4$
$2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3$
$x_1 + 7x_2 - 7x_3 = 5$

5. பின்வரும் சமன்பாட்டுத் தொகுதிகளை ஆராய்க :—

(i) $x + y + z = 6$
$x + 2y + 3z = 10$
$x + 2y + \lambda z = \mu$

(ii) $\lambda x + y + z = 1$
$x + \lambda y + z = 1$
$x + y + \lambda z = -2$

6. பின்வரும் அணிகளின் நிரை, நிரல் பூச்சிய வெளிகளின் தளங்களை காண்க :—

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 9 & -4 & 9 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 9 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ -ன் பூச்சிய பரிமாணம் (Nullity) என்ன ?

7. அணி B-ன் நிரல்கள் $AX=0$-வின் தீர்வுகளுக்கு ஒரு தளமென்றால் அணி A-ன் நிரைகள் $YB=0$-ன் தீர்வுகளுக்கு ஒரு தளமென நிறுவுக.

8. ஒரு சதுர அணி A-ன் அளவை $(n-1)$ என்றால் எந்த இரு நிரை அல்லது நிரல்களிலுள்ள உறுப்புகளின் இணைக் காரணிகளும் விகிதசமத்தில் (proportional) இருக்குமென நிறுவுக.

9. n தெரியாதனவற்றிலுள்ள m சமன்பாடுகளின் $(m>n)$ ஒரு தொகுதியானது அதிகபட்சம் $(n+1)$ ஒருபடிச்சாரா சமன்பாடுகள் கொண்டதாக இருக்குமெனவும், $m=n+1$ என்றால் இத்தொகுதி இசைவற்றது என்றும் நிறுவுக.

10. $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} a + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} b$ ஐ முழுத் தீர்வாகக் கொண்ட, x_1, x_2, x_3, x_4-ல் ஒரு சமன்பாட்டுத் தொகுதியை அமைக்க. இதனை ஒரு தேற்றமாகப் பொதுப்படுத்தி நிறுவுக.

11. $AX=H_1$, $AX=H_2$ என்ற தொகுதிகளின் இரு தீர்வுகள் முறையே X_1, X_2 என்றால் $(\mu_1 X_1 + \mu_2 X_2)$ ஆனது $AX=\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2$ என்ற தொகுதியின் ஒரு தீர்வாகுமென நிறுவுக. இதிலிருந்து,

$AX = \mu_1 H_1 + \mu_2 H_2$-ன் முழுத் தீர்வையும் காண்க.

7. ஒருபடி நிலைமாற்றங்களும், அணிகளும்

[Linear Transformations And Matrices]

தளமாற்றத் தேற்றங்கள் (Change of Bases in Abstract Vector Spaces)

7·1 தேற்றம்:

களம் F-ன் மீதமைந்த வெளிப்படையல்லாத n—பரிமாணங் கொண்ட [n என்பது முடிவுள்ள மிகை முழு எண்] அரூப வெக்டர் வெளி V-ல் $B_1 = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ என்பது யாதானுமொரு தளமாகும். $B_2 = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ என்பது V-ல் யாதானுமொரு உள்ளடங்கு கணமாகும். $Y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} X_i$ [$j = 1$ முதல் n முடிய] [$a_{ij} \in F$] எனின், கணம் B_2, V-ல் ஒரு தளமாவதற்குத் தேவையான, போதுமான விதி $A = [a_{ij}]$ ($i, j = 1$ முதல் n முடிய) என்ற அணி ஒருமையில் அணியாக இருக்கவேண்டும்.

நிபந்தனை தேவையானது:

தரவு: $B_2 = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ என்ற கணம் V-ல் ஒரு தளமாகும்.

மேலும், $Y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} X_i$ [$j = 1$ முதல் n முடிய] (நி—வே)

$A = [a_{ij}]$ ($i, j = 1$ முதல் n முடிய) என்ற அணி ஒருமையில் அணியாகும். (non - singular matrix)

நிரூபணம்:

A என்ற அணி ஒருமையில் அணியாக இல்லாவிடில், ஒருமைசேர் அணியாக இருக்கட்டும். (அ-து) $|A| = 0$ என்று கொள்வோம். ....(1)

$|A| = 0$ ஆதலால், அணிக்கோவையைப்பற்றிய தேற்றத்தின்படி, (by a theorem on determinants)

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\, t_1 + a_{12}\, t_2 + \dots + a_{1n}\, t_n = 0 \\ a_{21}\, t_1 + a_{22}\, t_2 + \dots + a_{2n}\, t_n = 0 \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{n1}\, t_1 + a_{n2}\, t_2 + \dots + a_{nn}\, t_n = 0 \end{array}\right\} \quad \dots\dots\dots(2)$$

என்ற சமன்பாடுகளை நிறைவு செய்யக்கூடிய, எல்லாம் பூச்சியமல்லாத, (not all zero) $t_1, t_2, \dots, t_n$ என்ற எண்ணிகள் F-ல் உண்டு.

$\sum_{j=1}^{n} t_j Y_j$ ஐ எடுத்துக்கொள்வோம். [இதில் $t_1, t_2, \dots, t_n$ என்பவை எல்லாம் பூச்சியமல்ல]

$$\sum_{j=1}^{n} t_j Y_j = \sum_{j=1}^{n} t_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} X_i = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} t_j \right] X_i$$

$$= 0 \quad [\,(2)\text{ விருந்து}]$$

∴ $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ என்ற கணம் ஒருபடிச்சார்ந்த நிலையிலுள்ளதாகும். ஆனால், $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ என்ற கணம் தரவின்படி, ஒரு தளமாதலால் இது ஒரு முரண்பாடாகும். ஆகையால் (1)ல் அணி A ஒருமைசேர் அணி எனக் கொண்டது தவறு.

∴ A என்ற அணி ஒருமையில் அணியாகும்.

நிபந்தனை போதுமானது :

தரவு: $A = [a_{ij}]$ ($i, j = 1$ முதல் n முடிய) என்ற அணி ஒருமையில் அணியாகும் (அ-து) $|A| \neq 0$

(நி-வே) $B_2 = \{Y_1, Y_2, \dots\dots Y_n\}$ என்ற கணம் V-ல் ஒரு தளமாகும்.

நிரூபணம் :

$t_1, t_2, \dots\dots t_n \in F$, $\sum_{j=1}^{n} t_j Y_j = 0$ எனின்,

$$\sum_{j=1}^{n} t_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} X_i = 0 \quad (\text{அ-து}) \quad \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} t_j \right] X_i = 0 \quad \dots\dots\dots(3)$$

$\{X_1, X_2, \ldots\ldots X_n\}$ என்ற கணம் ஒரு தளமாதலால், இக்கணம் ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ளது.

$$\therefore\ (3) \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, t_j = 0 \quad [i = 1 \text{ முதல் } n \text{ முடிய}]$$

(அ-து)
$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\, t_1 + a_{12}\, t_2 + \ldots + a_{1n}\, t_n = 0 \\ a_{21}\, t_1 + a_{22}\, t_2 + \ldots + a_{2n}\, t_n = 0 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{n1}\, t_1 + a_{n2}\, t_2 + \ldots + a_{nn}\, t_n = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots(4)$$

தரவின்படி $|A| \neq 0$ ஆதலால்,

$$(4) \Longrightarrow t_1 = 0,\ t_2 = 0,\ \ldots,\ t_n = 0$$

[அணிக்கோவையைப்பற்றிய தேற்றத்தின்படி]

$$\therefore\ t_1, t_2, \ldots, t_n \in F,\ \sum_{j=1}^{n} t_j\, Y_j = 0 \Longrightarrow t_1 = 0,\ t_2 = 0,\ \ldots,\ t_n = 0$$

$\therefore\ B_2 = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ என்ற கணம் ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ளது. இக்கணத்தில் n–உறுப்புகள் உள்ளதாலும், $d(V) = n$ ஆதலாலும், கணம் B_2, V-ல் ஒரு தளமாகும்.

குறிப்பு 1: தேற்றத்தில் $Y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, X_i$

$$[j = 1 \text{ முதல் } n \text{ முடிய}] \quad \ldots\ldots\ldots(5)$$

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix},\quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$$ என்றால் (5) ஐ

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{21}, & \ldots, & a_{n1} \\ a_{12}, & a_{22}, & \ldots, & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n}, & a_{2n}, & \ldots, & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$$ என எழுதலாம்.

(அ-து) $A^{T} X = Y$ ஆகும். (அ-து) $CX = Y$ $[C = A^{T}]$ மேலும், C ஒருமையில் அணியாகும்.

குறிப்பு 2: B_1 ஐக் கணமாகவும், B_2-வைத் தளமாகவும் கருதுவோம். B_1 என்ற கணம் ஒருபடிச்சாரா நிலையிலுள்ளதால் $BY=X$ என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் B என்ற ஒருமையில் அணி ஒன்றுண்டு. $CX=Y$ ஆதலால், $C^{-1}=B$ என நிரூபிக்கலாம்.

குறிப்பு: 3. மேற்கூறிய தேற்றத்தைப் பின்வருமாறும் கூறலாம். "ஒரு அருபவெக்டர் வெளி V-ல், எந்தத் தளமாற்றமும் ஒருமையில் அணி ஒன்றைத் தருகின்றது. மேலும், ஒருமையில் அணி ஒன்றையும், V-ல் ஒரு தளத்தையும் கொடுத்தால் மற்றொரு தளத்தை இயல்பான முறையில் (in the natural way) அமைக்கலாம்."

§ 7·2. தேற்றம்:

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த n—பரிமாணமுள்ள வெளிப்படையல்லாத {n என்பது முடிவுள்ள மிகை முழு எண்} அருபவெக்டர் வெளி V-ல் $B=\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$, $B'=\{B'_1, B'_2, \ldots, B_n'\}$ என்பவை யாதானுமிரு தளங்களாகும். X என்பது M-ல் யாதானுமொரு உறுப்பாகும். $x = R(X, B)$, $x' = R(X, B')$ $[x, x' \in V_n(F)]$ எனின், $x' = Ax$ எனும் சமன்பாட்டைப் பூர்த்தி செய்யும் $n\times n$ ஒருமையில் அணி A ஒன்றே ஒன்றுதான் உண்டு. மேலும், அந்த அணி, X-ஐச் சார்ந்ததல்ல. (Independent of X)

(i) ஒரு $n\times n$ ஒருமையில் அணி A-யும், V-ல் ஒரு தளம் B-யும் கொடுக்கப்பட்டால், பின்வரும் விதியை நிறைவு செய்யும் B' எனும் மற்றொரு தளத்தை V-ல் அமைக்கலாம். விதி: X என்பது V-ல் எந்த ஓர் உறுப்பாகவும் இருந்து, $x = R(X, B)$, $x' = R(X, B')$ எனின் $x' = Ax$ ஆகும்.

[குறிப்பு: $V_n(F)$-ல் உள்ள வெக்டர்களை நிரல் அணிகளாக (column matrix) எழுதுவது வழக்கம்]

நிரூபணம்:

தரவு: $X \in V$, $x = R(X, B)$, $x' = R(X, B')$ ஆகும்.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$ எனக் கொள்வோம்.

$$\left.\begin{aligned}\therefore\quad X &= x_1 B_1 + x_2 B_2 + \ldots + x_n B_n = \sum_{j=1}^{n} x_j B_j \\ &= x'_1 B'_1 + x'_2 B'_2 + \ldots + x'_n B'_n = \sum_{i=1}^{n} x'_i B'_i\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(1)$$

[II, 6·12-லிருந்து]

B, B' என்பவை V-ல் தளங்களாதலால், தேற்றம் (1) ன்படி,

$B_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} B'_i$ [$j=1$ முதல் n முடிய] என்று எழுதினுல்,

$A=[a_{ij}]$ $\begin{bmatrix} i=1 \text{ முதல் } n \text{ முடிய} \\ j=1 \text{ முதல் } n \text{ முடிய}\end{bmatrix}$ என்ற $n \times n$ அணி ஒருமையில் அணியாகும்.

$X = \sum_{j=1}^{n} x_j B_j$ [(1) லிருந்து]

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} B'_i = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \right] B'_i \quad \ldots\ldots\ldots(2)$$

ஆனுல், $X = \sum_{i=1}^{n} x'_i B'_i$ [(1) லிருந்து] ………(3)

B' என்பது ஒரு தளமாதலால் (2), (3) ஆகியவற்றிலிருந்து,

$x'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ [$i=1$ முதல் n முடிய]

(அ-து)
$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

(அ-து) $x' = Ax$ ஆகும்.

ஆகையால், $x'=Ax$ என்ற சமன்பாட்டைப் பூர்த்தி செய்யும் $n\times n$ ஒருமையில் அணி $A=[a_{ij}]$ ஒன்றுண்டு.

முடிந்தால் $x'=Px$ என்றவாறு மற்ெருரு $n\times n$ ஒருமையில் அணி Q இருப்பதாகக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad x'=Ax, \quad x'=Px \qquad \therefore \quad (A-P)\,x=0$$

இது $V_n(F)$-ல் உள்ள எல்லா வெக்டர்கள் x-ற்கும் உண்மையாதலால், $E_1=(1, 0, \ldots, 0)$, $E_2=(0, 1, \ldots, 0)$ ...... $E_n=(0, 0, \ldots, 1)$ என்ற அலகு வெக்டர்களை ஒன்றன்பின் ஒன்ருக, x-ற்குப் பதிலாகப் பிரதியிட $A-Q=0$ எனக் கிடைக்கும். (அ-து) $A=Q$.

ஆகையால், $A=[a_{ij}]$ என்ற அணி தனித்தன்மை (Unique) வாய்ந்தது. மேலும், A என்ற அணி, B என்ற தளத்திலிருந்து B_1 என்ற தளத்தை அமைக்கும்போது கிடைக்கும் அணியாதலால், இந்த அணி, B, B_1 என்ற தளங்களைச் சார்ந்ததேயன்றி, V-ல் உள்ள எந்த உறுப்பையும் சார்ந்ததல்ல.

(ii) $A=[a_{ij}\,[i,j]=1$ முதல் n முடிய$]$ என்ற ஒருமையில் அணியும் $B=\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ என்ற V-ல் ஒரு தளமும் தரப்பட்டுள்ளது.

(நி-வே) X-என்பது V-ல் எந்த ஓர் உறுப்பாகவும் இருந்து, $x=R\,(X, B)$, $x'=R\,(X, B')$ எனின், $x'=Ax$ என்றவாறு அமைந்த B' என்ற தளம் V-ல் உண்டு.

நிரூபணம்:

A என்ற அணி ஒருமையில் அணியாதலால், A^{-1}, ஒரு ஒருமையில் அணியாகும். $A^{-1}=Q=(q_{ij})$ $[i, j=1$ முதல் n முடிய$]$ எனக் கொள்வோம்.

B என்ற தளமும், Q என்ற ஒருமையில் அணியும் தரப்பட்டுள்ளதால், $B'_j=\sum_{i=1}^{n} q_{ij}\;B_i$ $[j=1$ முதல் n முடிய$]$ என்ற முறையில் அமைக்கப்பட்ட $B'=\{B'_1, B'_2, \ldots, B'_n\}$ என்ற கணம் V-ல் ஒரு தளமாகும். ....(1)

[தேற்றம் 7·1]

X என்பது V-யில் எந்தவொரு உறுப்பாகவும் இருந்து, $x = R(X, B)$, $x' = R(X, B')$ என்று இருக்கட்டும். ....(2)

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ எனக் கொள்வோம்.

$$X = \sum_{j=1}^{n} x'_j B'_j = \sum_{i=1}^{n} x_i B_i \qquad \ldots\ldots\ldots(3)$$

[II, $6 \cdot 12$-லிருந்து]

$$= \sum_{j=1}^{n} x'_j \sum_{j=1}^{n} q_{ij} B_i = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} q_{ij} x'_j \right] B_i \qquad \ldots\ldots\ldots(4)$$

B என்ற கணம் ஒரு தளமாதலால், (3), (4) ஆகியவற்றிலிருந்து

$$x_i = \sum_{j=i}^{n} q_{ij} x'_j \quad [i = 1 \text{ முதல் } n \text{ முடிய}]$$

(அ-து)
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} x'_1 + q_{12} x'_2 + \cdots\cdots + q_{1n} x'_n \\ q_{21} x'_1 + q_{22} x'_2 + \cdots\cdots + q_{2n} x'_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_{n1} x'_1 + q_{n2} x'_2 + \cdots\cdots + q_{nn} x'_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots\cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots\cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots\cdots & q_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

(அ-து) $x = Q\,x' = \overset{-1}{A}\,x' \qquad \therefore\ A\,x = A\overset{-1}{A}\ x' = I\,x' = x'$

$\therefore\ x' = A\,x.$ ....(5)

(1), (2), (5) ஆகியவற்றிலிருந்து தேற்றம் உண்மை என்பது தெளிவு.

7·3. தேற்றம் :

களம் F-ன் மீதமைந்த வெளிப்படையல்லாத m பரிமாணங் கொண்ட [m என்பது முடிவுள்ள பாசிட்டிவ் முழு எண்] அருப

வெக்டர் வெளி V-ல் $B = \{ X_1, X_2, \ldots, X_m \}$ என்பது யாதானு மொரு வரிசையிட்ட தளமாக இருக்கட்டும் (ordered basis). அதே களத்தின் மீதமைந்த மற்றொரு அரூபவெக்டர் வெளி W-ல் $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ என்பவை யாதானும் m உறுப்புகளாக இருக்கட்டும். [அவை வெவ்வேருக இருக்கவேண்டும் என்பது தேவையில்லை] எனின், $X_1, X_2, \ldots, X_m$ என்ற V-ல் உள்ள உறுப்புகளை முறையே $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ என்ற W-ல் உள்ள உறுப்புகளுக்கு எடுத்துச்செல்லும் V-யிலிருந்து W-விற்கு ஒருபடி நிலைமாற்றம் (Linear transformation) ஒன்றே ஒன்றுதான் உண்டு.

நிரூபணம் :

X என்பது V-ல் யாதானுமொரு உறுப்பாக இருக்கட்டும்.

$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_m X_m$ என எழுதலாம். [$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ என்பவை F-ல் உள்ள தனித்தன்மை வாய்ந்த எண்ணி களாகும்] V-யிலிருந்து W-விற்கு f என்ற அமைப்புமாற்றம் (mapping) பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$f : X \in V \longrightarrow \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + , \ldots + \alpha_m Y_m \in W \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

f என்பது V-யிலிருந்து W விற்கு, ஓர் ஒருபடிநிலைமாற்ற மென எளிதாக நிரூபிக்கலாம். மேலும், $f : X_i \in V \longrightarrow 1 \cdot Y_i = Y_i \in W [1 \leqslant i \leqslant m]$ ஆகும்.

ஆகையால், $X_1, X_2, \ldots, X_m$ என்ற V-ல் உள்ள உறுப்புகளை முறையே $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ என்ற W-வில் உள்ள உறுப்புகளுக்கு எடுத்துச்செல்லும் V-யிலிருந்து W-விற்கு ஒருபடி நிலைமாற்ற முண்டு.

$X_1, X_2, \ldots, X_m$ என்ற V-ல் உள்ள உறுப்புக்களை முறையே $Y_1, Y_2, \ldots Y_m$ என்ற உறுப்புகளுக்கு எடுத்துச்செல்லும் V-யிலிருந்து W-விற்கு Φ என்ற மற்றொரு ஒருபடி நிலைமாற்றம் இருப்பதாகக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad \Phi : X_i \in V \longrightarrow Y_i \in W (1 \leqslant i \leqslant m) \quad \ldots\ldots\ldots(2)$$

$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_m X_m$ என்பது V-ல் யாதானுமொரு உறுப்பாக இருந்தால் $\Phi (X) = \Phi (\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_m X_m)$

$= \alpha_1 \Phi(X_1) + \alpha_2 \Phi(X_2) + \ldots\ldots + \alpha_m \Phi(X_m)$

[∴ Φ என்பது ஒருபடி நிலைமாற்றமாகும்.]

$= \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + , \ldots + \alpha_m Y_m$

[(2) லிருந்து]

$= f(X)$ [(1) லிருந்து]

$$\therefore \quad \forall X \in V, \quad \Phi(X) = f(X) \quad \therefore \Phi = f.$$

∴ $X_1, X_2, \ldots, X_m$ என்ற V-ல் உள்ள உறுப்புகளை முறையே $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ என்ற W-ல் உள்ள உறுப்புகளுக்கு எடுத்துச் செல்லும், V-லிருந்து W- விற்கு, ஒருபடி நிலைமாற்றம் ஒன்றே ஒன்றுதான் உண்டு. அதுவே (1)-ல் வரையறுக்கப்பட்ட ஒருபடி நிலைமாற்றமாகும்.

குறிப்பு: இதுபோன்ற தேற்றம் ஒருபடிச் சார்புகளில் ஏற்கனவே நிருபிக்கப்பட்டுள்ளது. {[*II*] 7·3-ஐப் பார்க்கவும்]}

§ 7·4. ஒருபடி நிலைமாற்றத்தைக் குறியீடு செய்யும் அணி: [Matrix Representing Linear Transformation]

தேற்றம் 7·3-ல் குறிப்பிட்ட அருபவெக்டர் வெளி W-ல் $B_1 = \{X_1', X_2' \ldots, X_n'\}$ என்பது யாதானுமொரு வரிசையிட்ட தளமாக இருக்கட்டும். $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ என்ற W-ல் உள்ள உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றையும் தளம் B_1-ல் உள்ள உறுப்புகளின் ஒருபடிச்சேர்வாக எழுதலாம்.

$$\therefore \quad Y_i = a_{i1} X'_1 + a_{i2} X_2' + \ldots, + a_{in} X_n' \quad [1 \leqslant i \leqslant m]$$

[a_{ij} என்பவை F-ல் தனித்தன்மை வாய்ந்த எண்ணிகளாகும்]

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots\cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

என்ற $m \times n$ அணி, $f(X_i)$, $f(X_2) \ldots, f(X_n)$ என்ற W-ல் உள்ள உறுப்புகளின், B_1 என்ற களத்தைச் சார்ந்த கூற்றுத்தொகுதிகளை நிரைகளாகக் கொண்டது (Rows). இந்த அணி B, B_1 ஆகிய தளங்களைச் சார்ந்து தனித்தன்மை வாய்ந்ததாகும். [Unique w.r.t. bases **B** and B_1] மேலும், $x = R(X, B)$, $x' = R(f(X), B_1)$ [X என்பது V-ல் யாதானுமொரு உறுப்பு] என்க.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$ எனின்

$$X = \sum_{i=1}^{m} x_i X_i, \quad f(X) = \sum_{j=1}^{n} x_j' X_j' \text{ ஆகும்} \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

ஆனால் f என்பது V-யிலிருந்து W-விற்கு ஒருபடி நிலைமாற்றம் ஆதலால்,

$$f(X) = f\left[\sum_{i=1}^{m} x_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{m} x_i f(X_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{m} a_{ij} X_j' = \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{m} a_{ij} X_i\right] X_i'$$

ஆனால் (1)-லிருந்து $f(X) = \sum_{j=1}^{n} x_j' X_j'$ ஆகும்.

$$\therefore \quad x_j' = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} X_i \quad [j = 1 \text{ முதல் } n \text{ முடிய}]$$

{ $\because$ $\{X_1', X_2', \ldots, X_n'\}$ என்பது ஒரு தளமாகும்.

$$(\text{அ-து}) \quad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots\cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1i} & a_{2i} & \cdots\cdots & a_{ni} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots\cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

(அ-து) $x' = A^{\mathsf{T}} x$ ஆகும்.

§ 7·5. வரையறை:

மேற்கூறிய பகுதியில், A என்ற அணி, ஒருபடி நிலைமாற்றம் f-ஐ, B, B_1 என்ற முறையே V, W-வில் உள்ள தளங்களைச் சார்ந்து குறியீடு செய்யும் அணியென வரையறுக்கப்படுகிறது. (Matrix representing linear transformation) இதனை $A = R\ [f, B, B_1]$ அல்லது $A = M\ (f)$ என்றும் குறிப்பது வழக்கம்.

ஆகையால், V-யிலிருந்து W-விற்கு அமையும் ஒவ்வொரு ஒருபடி நிலைமாற்றத்திற்கும், அவற்றிலுள்ள இருதளங்களைச்

சார்ந்து ஒரு $m \times n$ அணி தொடர்பு படுத்தப்படுகிறது. இதன் மறுதலையைப் பின்வரும் தேற்றம் நிறுவுகிறது.

§ 7·6. தேற்றம் :

களம் F-ன் மீதமைந்த $m \times n$ அணி ஒன்றைக் கொடுத்தால், அந்த அணியைக் கொண்டு, V, W ஆகியவற்றில் முறையே உள்ள B, B_1 என்ற வரிசையிட்ட தளங்களைச் சார்ந்து, V-யிலிருந்து W-விற்கு ஒரே ஒரு ஒருபடி நிலைமாற்றத்தை வரையறுக்கலாம். மேலும், அந்த அணி, அந்நிலைமாற்றத்தைக் கொடுத்த தளங்களைச் சார்ந்து குறியீடு செய்யும்.

நிரூபணம் :

$A = [a_{ij}]$ ($i=1$ முதல் m முடிய,
$j=1$ முதல் n முடிய) $[a_{ij} \in F]$

என்பது கொடுக்கப்பட்ட F-ன் மீதமைந்த அணியாக இருக்கட்டும்.

$B = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, $B_1 = \{X_1', X_2', \ldots, X_n'\}$ எனக் கொள்வோம்.

$Y_i = a_{i1} X_1' + a_{i2} X_2' + \ldots + a_{in} X_n'$ $[1 \leqslant i \leqslant m]$ என்ற முறையில் அமைக்கப்பட்ட W-ல் உள்ள $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ என்ற உறுப்புகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$\therefore$ 7·3. தேற்றத்தின்படி, V-ல் உள்ள $X_1, X_2, \ldots, X_m$ என்ற உறுப்புகளை W-ல் உள்ள $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ என்ற உறுப்புகளுக்கு எடுத்துச்செல்லும், V-லிருந்து W-விற்கு ஒருபடி நிலைமாற்றம் ஒன்றே ஒன்றுதான் உண்டு. அதனை f என்று குறிப்போம்.

$$\therefore\ f : X_i \in V \longrightarrow Y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j' \in W \text{ ஆகும்.}$$

மேலும், B, B_1 என்ற தளங்களைச் சார்ந்து, A என்ற அணி, f என்ற நிலைமாற்றத்தைக் குறியீடு செய்கின்றது என்பது வெளிப்படையாகும்.

குறிப்பு 1: தேற்றத்தில் குறிப்பிட்ட ஒருபடி நிலைமாற்றம் f என்பது, V, W ஆகியவற்றிலுள்ள B, B_1 என்ற வரிசையிட்ட தளங்களைச் சார்ந்து, A என்ற அணியால் நிர்ணயிக்கப்படுகிறது எனப்படும். இதனை $f(A)$ என்று குறிப்பது வழக்கம்.

குறிப்பு 2: $M(f)$ என்ற $m \times n$ அணி f-ஐக் குறியீடு செய்தால், $M(f)$-ல் நிர்ணயிக்கப்படும் ஒருபடி நிலைமாற்றம் f ஆகும் என்று நிரூபிக்கலாம்.

7·7. களம் F-ன் மீதமைந்த வெளிப்படையல்லாத முறையே m, n என்ற பரிமாணங்கள் கொண்ட [m, n என்பவை முடிவுள்ள பாசிட்டிவ் முழுஎண்] அருபவெக்டர் வெளி V, W ஆகியவற்றில், V-யிலிருந்து W-விற்கு அமையும் எல்லா ஒருபடி நிலைமாற்றங்களையும் கொண்ட கணத்தை $L(V, W)$ என்றும், F-ன் மீதமைந்த எல்லா $m \times n$ அணிகளையும் கொண்ட கணத்தை $M_{m \times n}(F)$ என்றும் குறிப்போம். V, W-ல் இருதளங்களைச் சார்ந்து, பின்வரும் அமைப்பு மாற்றம் வரையறுக்கப்படுகிறது.

$\forall f \in L(V, W)$, $\alpha : f \longrightarrow M(f) \in M_{m \times n}(F)$ என்ற அமைப்பு மாற்றம் $L(V, W)$-லிருந்து, $M_{m \times n}(F)$-ற்கு ஒன்றுக்கொன்று முழு அமைப்புமாற்றமாகும் [bijective] என்பது தெளிவு [தேற்றம்7·4, 7·6]

§ 7·8. தேற்றம் :

7·7-ல் குறிப்பிட்டபடி அமைந்த அருபவெக்டர் வெளி V, W ஆகியவற்றில் $B = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ $B_1 = \{X_1', X_2', \ldots, X_n'\}$ என்ற வரிசையிட்ட தளங்கள் கொடுக்கப்பட்டால். $L(V, W)$ என்ற அருபவெக்டர் வெளியிலிருந்து, $M_{m \times n}(F)$ என்ற எல்லா $m \times n$ அணிகளையும் கொண்ட அருபவெக்டர் வெளியினுக்கு ஓர் ஓரினச்சார்பை அமைக்கலாம். மேலும், $d\,[L(V, W)] = m \cdot n$ ஆகும்.

நிரூபணம் :

B, B_1 ஆகிய தளங்களைச் சார்ந்து, $L(V, W)$-லிருந்து, $M_{m \times n}(F)$-ற்கு ஓர் ஒன்றுக்கொன்று முழு அமைப்புமாற்றம் உண்டு என்பது தெரியும். அதுவே $\forall f \in L(V, W)$ $\alpha : f \longrightarrow M(f)$ என்ற அமைப்புமாற்றமாகும். [7·7-ல் குறிப்பிட்டுள்ளது.] ....(1)

f_1, f_2, என்பவை $L(V, W)$ல் யாதானுமிரு ஒருபடி நிலை மாற்றங்களாகவும், λ என்பது F-ல் யாதானுமொரு எண்ணி யாகவும் இருக்கட்டும். $M(f_1) = [a_{ij}]$, $M(f_2) = [b_{ij}]$ எனக் கொள்வோம். [$i=1$ முதல் m முடிய
$j=1$ முதல் n முடிய]

$1 \leqslant i \leqslant m$ எனின் $(f_1 + f_2)[x_i] = f_1(X_i) + f_2(X_i)$ [6·7 தேற்றம்]

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X'_j + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} X'_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij}) X'_j$$

$\therefore \quad M(f_1 + f_2) = [a_{ij} + b_{ij}]$ என்பது தெளிவு [7·4]

$$= [a_{ij}] + [b_{ij}]$$
$$= M(f_1) + M(f_2)$$

$$\therefore \quad \alpha : f_1 + f_2 \longrightarrow M(f_1) + M(f_2) = \alpha f_1 + \alpha f_2 \ldots\ldots (2)$$

$(\lambda f_1)(X_i) = \lambda [f_1(X_i)]$ [λfன் வரையறையின்படி தேற்றம் 6·7]

$$= \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X'_j = \sum_{j=1}^{n} (\lambda a_{ij}) X'_j$$

$$\therefore \quad M(\lambda f_1) = [\lambda a_{ij}] = \lambda [a_{ij}] = \lambda M(f_1)$$

$$\therefore \quad \alpha : \lambda f_1 \longrightarrow \lambda M(f_1) = \lambda (\alpha f_1) \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

(1), (2), (3) ஆகியவற்றிலிருந்து α என்ற அமைப்புமாற்றம் $L(V, W)$ விலிருந்து $M_{m \times n}(F)$ ற்கு ஓர் ஓரினச்சார்பு என்பது வெளிப்படை.

$$\therefore \quad L(V, W) \cong M_{m \times n}(F)$$

$M_{m \times n}(F)$ ன் பரிமாணம் $m \cdot n$ ஆதலால்,

$f[L(V, W)] = m \cdot n$ ஆகும். [II, தேற்றம் 6·10]

குறிப்பு : மேற்கூறிய தேற்றத்திலிருந்து, f_1, f_2 என்பவை V-யிலிருந்து W-விற்கு யாதானுமிரு, ஒருபடி நிலைமாற்றங்கள் ஆனால் $M(f_1 + f_2) = M(f_1) + M(f_2)$ ஆகும். $M(\lambda f_1) = \lambda M(f_1)$ ஆகும்.

7.9 வரையறை : இரு ஒருபடி நிலைமாற்றங்களின் பெருக்கல் (Product of Two Linear Transformations)

களம் F-ன் மீதமைந்த வெளிப்படையல்லாத n-பரிமாணங் கொண்ட [n என்பது முடிவுள்ள மிகை முழு எண்] அருப வெக்டர் வெளி V-யில், Vயிலிருந்து அதற்கே f_1, f_2 என்பவை

யாதானுமிரு, ஒருபடி நிலைமாற்றங்களாகும். எனின் $f_1 \cdot f_2$ என்ற f_1, f_2 வின் பெருக்கல் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$f_1 \cdot f_2 : V \longrightarrow V, \forall X \in V, f_1 \cdot f_2 : X \longrightarrow f_2[f_1(X)]$$

[அ-து] முதலில் f_1 ஐச் செயல்படுத்திப் பிறகு f_2 வைச் செயல்படுத்த வேண்டும்.]

§ 7·10. தேற்றம் :

இரு ஒருபடி நிலைமாற்றங்களின் பெருக்கலும் ஓர், ஒருபடி நிலைமாற்றமாகும்.

நிரூபணம் :

f_1, f_2 என்பவை அமைப்புமாற்றங்கள் ஆதலால், $f_1 \cdot f_2$ என்பதும் ஓர் அமைப்புமாற்றமாகும். மேலும்,

$$\begin{aligned} \forall X, Y \in V, \lambda \in F, \quad (f_1 \cdot f_2)(X+Y) &= f_2[f_1(X+Y)] \\ &= f_2[f_1(X) + f_1(Y)] \\ &= f_2[f_1(X)] + f_2[f_1(Y)] \\ &= (f_1 \cdot f_2)(X) + (f_1 \cdot f_2)(Y) \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\begin{aligned} (f_1 \cdot f_2)(\lambda X) &= f_2[f_1(\lambda X)] = f_2[\lambda f_1(X)] \\ &= \lambda f_2[f_1(X)] = \lambda[(f_1 \cdot f_2)(X)] \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots(2)$$

(1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து $f_1 \cdot f_2$ என்பது ஒருபடி நிலைமாற்றம் என்பது தெளிவாகும்.

§ 7·11. தேற்றம் :

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த வெளிப்படையல்லாத முறையே [m, n, p ஆகியவை முடிவுள்ள பாசிட்டிவ் முழு எண்] அரூபவெக்டர் வெளி U, V, W ஆகியவற்றில் முறையே B_1, B_2, B_3 என்பவை வரிசையிட்ட தளங்களாகும். $f_1 : U \longrightarrow V$, $f_2 : V \longrightarrow W$ என்பவை யாதானுமிரு ஒருபடி நிலைமாற்றங்களாகும். $M(f_1)$, $M(f_2)$ என்பவை முறையே f_1, f_2 ஐ, இத்தளங்களைச் சார்ந்து குறியிடு செய்யும் அணிகளெனின் $M(f_1 \cdot f_2) = M(f_1) \cdot M(f_2)$ ஆகும்.

குறிப்பு : $f_1 f_2$ என்ற அமைப்புமாற்றம் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது. $f_1 \cdot f_2 : U \longrightarrow W, \ \forall \ X \in U, f_1 \cdot f_2 : X \longrightarrow f_2 [f_1 (X)]$.

7·10-ல் நிறுவியது போன்று $f_1 \cdot f_2$ ஓர் ஒருபடி நிலைமாற்றமென இங்கும் நிரூபிக்கலாம்.

நிரூபணம் :

$B_1 = \{ X_1, X_2, \ldots, X_m \}$, $B_2 = \{ Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \}$, $B_3 = \{ Z_1, Z_2, \ldots, Z_p \}$ எனக் கொள்வோம்.

$M(f_1) = [a_{ij}]$ ($i = 1$ முதல் m முடிய, $j = 1$ முதல் n முடிய)

$M(f_2) = [b_{ij}]$ ($i = 1$ முதல் n முடிய, $j = 1$ முதல் p முடிய) என்றும் இருக்கட்டும்.

$1 \leqslant i \leqslant m$ எனின் $(f_1 \cdot f_2)(X_i) = f_2 [f_1 (X_i)]$

$$= f_2 \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} Y_j \right]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} [f_2(Y_j)]$$

[$\therefore f_2$ என்பது V-யிலிருந்து W விற்கு ஓர் ஒருபடி நிலைமாற்றமாகும்]

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left[\sum_{k=1}^{p} b_{jk} Z_k \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right] Z_k$$

$$\therefore \quad M(f_1 \cdot f_2) = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right]$$ ($i = 1$ முதல் m முடிய, $k = 1$ முதல் p முடிய)

$$= [a_{ij}][b_{jk}]$$ [அணிகளின்பெருக்கல் வரையறையின்படி]

$$= M(f_1) \cdot M(f_2)$$

கி. தேற்றம் :

ஒருபடி நிலைமாற்றங்களின் பெருக்கல் சேர்ப்பு விதியை நிறைவு செய்வதால், அணிகளின் பெருக்கலும் [வரையறுக்கப் பட்டால்] சேர்ப்பு விதியை நிறைவு செய்யும்.

§ 7·12. தேற்றம் :

களம் F-ன் மீதமைந்த வெளிப்படையல்லாத முறையே m, n என்ற பரிமாணங்கொண்ட அருபவெக்டர் வெளி V, W ஆகியவற்றில், B_1, B_2 என்பவை V-ல் யாதானுமிரு தளங்களாகவும், B'_1, B'_2 என்பவை W-வில் யாதானுமிரு தளங்களாகவும் அமைந்துள்ளது. f என்பது V-யிலிருந்து, W-விற்கு யாதானுமொரு ஒருபடி நிலைமாற்றமாகும். A, A_1 என்ற $m\times n$ அணிகள் முறையே $A=R[f, B_1, B'_1]$, $A_1 = R[f, B_2, B'_2]$ என்று இருந்தால், $A_1 = Q A \overset{-1}{P}$ என்ற சமன்பாட்டைப் பூர்த்தி செய்யும். முறையே m, n தரமுள்ள P, Q எனும் ஒருமையில் அணிகள் உண்டென நிறுவுக.

நிரூபணம் :

X என்பது V-ல் யாதானுமொரு உறுப்பாக இருக்கட்டும். $A = R[f, B_1, B'_1]$ என்பது தரவு.

$\therefore\ \ x=R\{X, B_1\}, x'=R\{f(X), B'_1\}$ எனின் $x' = A^{\mathsf{T}}x$ ...(1)

$A_1 = R[f, B_2, B'_2]$ என்பது தரவு

$\therefore\ \ y=R[X, B_2], y'=R[f(X), B'_2]$ எனின் $y' = A_1{}^{\mathsf{T}}y$ ...(2)

V-ல் $x = R[X, B_1]$, $y = R[X, B_2]$ ஆதலால், $y = P_1x$ என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் $m\times m$ ஒருமையில் அணி P_1 ஒன்றே ஒன்று தான் உண்டு. [தேற்றம் 7·2]

$\therefore\ \ y = P_1x\ [\ |P_1| \neq 0]$ ....(3)

W-ல் $x' = R[f(X), B'_1]$, $y' = R[f(X), B'_2]$ ஆதலால், $y'=Q_1x'$ என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் $n\times n$ ஒருமையில் அணி Q_1 ஒன்றே ஒன்று உண்டு [தேற்றம் 7·2]

$\therefore\ \ y' = Q_1 x'\ [\ |Q_1| \neq 0]$ ....(4)

$(1)-(4)$-லிருந்து $(A_1)^{\mathsf{T}} y = y'$, $Q_1 x' = Q_1 A^{\mathsf{T}} x = Q_1 A^{\mathsf{T}} \overset{-1}{P} y$

$$\therefore \quad (A_1)^{\mathsf{T}} y = y', \; Q_1 A^{\mathsf{T}} \overset{-1}{P} y = y'$$

A_1 என்பது தனித்தன்மை வாய்ந்த அணியாதலால்,

$$(A_1)^{\mathsf{T}} = Q_1 A^{\mathsf{T}} \overset{-1}{P} \quad \therefore \quad A_1 = \left(P_1^{-1}\right)^{\mathsf{T}} A \, Q_1^{\mathsf{T}}$$

$$= Q A \overset{-1}{P}$$

$$\therefore \quad A_1 = Q A \overset{-1}{P} \quad \left[Q = \left(P_1^{-1}\right)^{\mathsf{T}}, \; P = \left(Q_1^{\mathsf{T}}\right)^{-1}\right]$$

§ **7·13.** **தேற்றம்:**

(a) களம் F-ன் மீதமைந்த வெளிப்படையல்லாத n-பரிமாணங்கொண்ட அருபவெக்டர் வெளி V-ல் B யாதானுமொரு தளமாகும். f என்பது V-யிலிருந்து அதற்கே ஓர் ஒருபடி நிலை மாற்றமாகும். X என்பது Y-ல் யாதானுமொரு உறுப்பாக இருந்து, $X = R[X, B]$, $x' = R[f(X), B]$ எனின் $x' = Px$ எனும் சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் $n \times n$ அணி P ஒன்றே ஒன்றுதான் உண்டு. மேலும், P என்ற அணி, X-ஐச் சார்ந்ததல்ல.

(b) F-ன் மீதமைந்த ஒரு $n \times n$ அணி A-யையும், V-ல் ஒரு வரிசையிட்ட தளம் B-யையும் கொடுத்தால், இத்தளத்தைச் சார்ந்து, அணி A-யால் குறியீடு செய்யப்படும், V-யிலிருந்து அதற்கே அமையும் ஒருபடி நிலைமாற்றம், ஒன்றே ஒன்றுதான் உண்டு.

நிருபணம்:

7·3, 7·6 ஆகிய தேற்றங்களைப் பார்த்து அதே முறையில் இங்கும் நிருபிக்கவும்.

7·14. S என்பது ஒரு $n \times n$ ஒருமையில் அணியாகவும், A என்பது ஒரு $n \times n$ அணியாகவும் இருந்தால், $B = \overset{-1}{S} A S$ என்ற $n \times n$ அணி, A என்ற அணியிலிருந்து வடிவொத்த நிலைமாற்றத்தால் (Similarity transformation) பெறப்படுகிறது என்கிறோம். இதனை $B \,|||\, A$ என்று எழுதுவது வழக்கம்.

$B \,|||\, A$ எனின் $A \,|||\, B$ ஆதலால், வடிவொத்த நிலைமாற்றம் ஒரு சமச்சீர்த் தொடர்பாகும்.

§ 7·15. தேற்றம் :

(*a*) களம் F-ன் மீதமைந்த வெளிப்படையல்லாத, n-பரிமாணங்கொண்ட அருபவெக்டர் வெளி V-ல், B_1, B_2 என்பவை இருதளங்களாகும். f என்பது V-யிலிருந்து அதற்கே ஓர், ஒருபடி நிலைமாற்றமாகும். A_1, A_2 என்ற $n \times n$ அணிகள் முறையே B_1, B_2 ஆகிய தளங்களைச் சார்ந்து f-ஐக் குறியீடு செய்தால் $A_1 ||| A_2$ ஆகும்.

(*b*) A_1, A_2 என்பவை வடிவொத்த $n \times n$ அணிகளாகவும், B_1 என்பது V-ல் யாதானுமொரு தளமாகவும் இருக்கட்டும். V-ல் B_2 என்ற மற்றொரு தளத்தையும், V-ல் இருந்து அதற்கே f என்ற ஒருபடி நிலைமாற்றம் ஒன்றையும் $A_1 = R\,(f, B_1)$, $A_2 = R\,(f, B_2)$ என்பவற்றை நிறைவு செய்யும் வகையில் அமைக்கலாம்.

நிரூபணம் :

(*a*) தேற்றம் 7·12-ல் உள்ளது போல் நிரூபிக்கலாம்.

(*b*) $A_1 ||| A_2$ என்பது தரவு.

$\therefore\ A_2 = P\ A\ \overset{-1}{P}$ என எழுதலாம். [P ஒரு $n \times n$ ஒருமையில் அணியாகும்]

$\therefore\ A_2^{\mathrm{T}} = \left(\overset{-1}{P}\right)^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}\ P^{\mathrm{T}}$

$= Q\, A^{\mathrm{T}}\ \overset{-1}{Q}$ என்போம் [$Q = \left(\overset{-1}{P}\right)^{\mathrm{T}}$ என்பது ஒரு $n \times n$ ஒருமையில் அணியாகும்]

B_1 என்பது V-ல் ஒருதளம் என்பது தரவு.

B_1 என்ற தளமும், Q எனும் ஒருமையில் அணியும், V-ல் B_2 என்ற மற்றொரு தளத்தை அமைக்கும். மேலும், X என்பது V-ல் யாதானுமொரு உறுப்பாக இருந்து, $x = R\,[X, B_1]$, $y = R\,[X, B_2]$ எனின் $y = Q\ x$ ஆகும். ....(1)

B_1 என்ற தளமும், A என்ற $n \times n$ அணியும், V-யிலிருந்து அதற்கே ஒரே ஒரு, ஒருபடி நிலைமாற்றத்தை வரையறுக்கிறது [தேற்றம் : 7·13 (*b*)] அதனை f என்று குறிப்போம். மேலும், $A = R\,[f, B_1]$ ஆகும்.

$\therefore\ x = R\ [X, B_1]$, $x' = R\,[\,f(X), B_1]$ என்றால்,

$x' = A^{\mathrm{T}}\ x$ ஆகும். ....(2)

இதே போன்று, $y' = R\,[f(X), B_2]$ எனின்,
$\{x' = R\,[f(X), B_1]$ ஆதலால்$\}$
$y' = Q\,x'$ ஆகும். ....(3)

(1)—(3) இவற்றிலிருந்து, $y' = Q\,x' = Q\,A^{T}\,x$
$= Q\,A^{T}\,\overset{-1}{Q}\,y = A_2^{T}\,y$.........(4)

$y = R\,[X, B_2]$, $y' = R\,[f(X), B_2]$ எனின் $y' = A_2^{T}\,y$ என்று கிடைப்பதால், $A_2 = R\,[f, B_2]$ ஆகும்.

§ 7·16. தேற்றம்:

(a) f என்பது $V_n(F)$-லிருந்து அதற்கே ஓர், ஒருபடி நிலை மாற்றமாகும். $F = \{E_1, E_2, \ldots E_n\}$ என்ற தளத்தைச் சார்ந்து, A என்ற $n \times n$ அணி f ஐக் குறியீடு செய்தால், $\forall\, X \in V_n(F)$, $f(X) = A^{T} X$ ஆகும்.

(b) $B_1 = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, $B_2 = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ என்பவை $V_n(F)$-ல் யாதானுமிரு தளங்களாக இருந்து $Y_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} X_i$ [$j = 1$ முதல் n முடிய], $A_1 = R[f, B_1]$, $A_2 = R[f, B_2]$ எனின் $A_2 = Q\,A_1\,\overset{-1}{Q}$ ஆகும். [$Q = P^{T}$, $P = (p_{ij})$]

(c) $B_1 = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ என்பது $V_n(F)$-ல் யாதானுமொரு தளமாக இருக்கட்டும். $X_1, X_2, \ldots, X_n$ என்ற வெக்டர்களை இதே வரிசையில் நிரைகளாகக் கொண்ட $n \times n$ அணியை S என்று குறிப்போம். $A = R[f, F]$ எனின் $S\,A\,\overset{-1}{S} = R[f, B_1]$ ஆகும்.

நிரூபணம்:

இவை பயிற்சியாக விடப்படுகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு:

$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ என்ற அணி f-ஐ, F என்ற தளத்தைச் சார்ந்து குறியீடு செய்கின்றது. [f என்பது V_2 (c)-யிலிருந்து அதற்கே ஒருபடி நிலைமாற்றமாகும்] f-ஐ, $B = \{(1, i), (1, -i)\}$ என்ற தளத்தைச் சார்ந்து குறியீடு செய்யும் அணி யாது?

நிரூபணம் :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = R[f, F] \text{ என்பது தரவு.}$$

$$B = \{ (1, i), \ (1, -i) \}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \text{ என்ற அணியை எடுத்துக் கொள்வோம்.}$$

$S A \bar{S}^{1} = R[f, B_1]$ ஆகும். [தேற்றம் 7·15, (c)]

$$\bar{S}^{1} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad S A \bar{S}^{1} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a-ib & 0 \\ 0 & a+ib \end{pmatrix}$$

§ 7·17. செங்குத்து, ஒன்றூடான அணிகள் : (Orthogonal and Unitary Matrices)

மெய்யெண் களத்தில் A என்ற சதுர அணியானது $A^{T} A = A A^{T} = I$ என்றவாறு அமையுமானல் A ஆனது ஒரு செங்குத்தணி (Orthogonal Matrix) எனப்படும். எடுத்துக் காட்டாக,

$$A = \tfrac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ஆனது ஒரு செங்குத்தணியாகும்.}$$

வரையறையிலிருந்து, A ஒரு செங்குத்தணியென்றல்,

(i) $|A| = \pm 1$ ($\therefore$ A ஒருமையில்)

(ii) $A^{T} = \bar{A}^{1}$

(iii) A^{T}-ம் ஒரு செங்குத்தணி

(iv) செங்குத்தணிகளின் பெருக்கலும் செங்குத்தணி, என்ற முடிவுகள் உண்மையென எளிதில் நிறுவலாம்.

ஒரு சதுர அணி B ஆனது $B^{*}B = BB^{*} = I$ என்றவாறு அமையுமானல் B ஆனது ஓர் ஒன்றூடான அணி (Unitary Matrix) எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக,

$\begin{bmatrix} cos\,\theta & i\,sin\,\theta \\ i\,sin\,\theta & cos\,\theta \end{bmatrix}$ (θ மெய்) ஆனது ஓர் ஒன்றூடான அணியாகும். மேலும், B ஓர் ஒன்றூடான அணியென்றால்,

(i) $|B| = \pm 1$

(ii) $B^{T} = B^{-1}$

(iii) B^{T}-ம் ஒன்றூடானது

(vi) ஒன்றூடான அணிகளின் பெருக்கலும் ஒன்றூடான அணி என்ற உண்மைகள் வெளிப்படையாகும்.

மெய்யெண் களத்தில் ஒவ்வொரு செங்குத்தணியும் ஒன்றூடானது. மேலும், ஓர் ஒன்றூடான அணியின் நிரை, நிரல் வெக்டர்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான அலகு (unit) வெக்டர்களாகும்.

$Y = A\,X$ என்ற ஒருபடி மாற்றத்தில் இம்மாற்றத்தின் அணி A ஆனது ஒன்றூடானதாக இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே, இம் மாற்றமானது நீளங்களைப் பாதுகாக்கும்.

ஒரு சதுர அணி A ஆனது $A\,A^* = A^*\,A$ என்றவாறு அமையுமானால் A ஆனது குத்தெதிர் (Normal) அணி எனப்படும். ஒவ்வொரு மூலைவரை, மெய் சமச்சீர், மெய் எதிர்சீர், ஹெர்மிசியன், எதிர் ஹெர்மிசியன், செங்குத்து, ஒன்றூடான அணிகளும் குத்தெதிர் அணிகளாகும்.

பயிற்சி 7

1. $A\,B = B\,A$ ஆகவும், C செங்குத்தாகவும் இருந்தால் $C^{T}\,A\,C$ யும் $C^{T}\,B\,C$ யும் மாற்றீடுசெய் அணிகளென நிறுவுக.

2. A ஒரு செங்குத்து அணியாகவும் P ஒருமையில் அணியாகவும் இருக்கட்டும். $B = A\,P$ என்றால் $P\,B^{-1}$ ஆனது செங்குத்தென நிறுவுக.

3. A ஒரு செங்குத்தணி. $(I+A)$ ஒருமையில் என்றால் $(I-A)\;(I+A)^{-1}$ ஆனது ஓர் எதிர் சீரணியென நிறுவுக.

4. A ஒரு செங்குத்தணியாகவும், B மெய் சமச்சீராகவும் இருந்தால் $A^{-1}\,B\,A$ ஆனது மெய்ச் சமச்சீரென நிறுவுக.

5. A மெய் எதிர் சீரணி என்றால் $(I+A)^{-1}(I-A)$ ஆனது செங்குத்தென நிறுவுக.

6. A ஆனது எதிர் ஹெர்மிசியன் ஆகவும் $(I+A)$ ஒருமையில் ஆகவும் இருந்தால், $(I-A)(I+A)^{-1}$ ஆனது ஒன்றூடான அணியென நிறுவுக.

7. A, B என்பன ஒரே அ·தரமுடைய ஒன்றூடான அணிகளென்றால் ABயும் ஒன்றூடானதென நிறுவுக.

8. கணக்கு 2, 3 இவற்றின் முடிவுகள் A ஆனது ஒன்றூடான அணியாக இருக்கும் போது என்னவாகுமென ஆராய்க.

9. ஒவ்வொரு ஒன்றூடான ஹெர்மிசியன் அணிகளும் உட்சுருள் அணிகளென நிறுவுக.

10. A என்ற குத்தெதிர் அணியானது B-யோடு மாற்றீடு செய்யுமானால், A^*-ம் B-யோடு மாற்றீடு செய்யுமென நிறுவுக.

11. A ஒருமையில் குத்தெதிர் அணியென்றால் A^{-1}-ம் குத்தெதிரென நிறுவுக.

12. A ஆனது ஹெர்மிசியன் என்றால் $(I+iA)^{-1}(I-iA)$ ஆனது ஒன்றூடானதென நிறுவுக.

13. $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ (θ மெய்) ஒரு செங்குத்தணியென சோதித்தறிக.

8. சிறப்பியல் அல்லது பண்பியல் சமன்பாடுகள்

(Characteristic Equations)

F என்ற களத்தின் மீதமைந்த n தரமுடைய மொத்த வெக்டர் வெளியை (Total Vector Space) $V_n(F)$ என்க.

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$ என்ற ஒருபடி மாற்றமானது,

$A : X \longrightarrow AX, X \neq 0, X \in V_n(F)$ & $AX \in V_n(F)$ என்றவாறு இருக்கட்டும். λ என்ற F-ல் உள்ள யாதானுமொரு எண்ணிக்கு,

$AX = \lambda X, X \neq 0$ என்றமையுமானால் X ஆனது A-ன் **பண்பியல் வெக்டர் அல்லது ஐகன் வெக்டர்** (Characteristic vector, Eigen Vector, Latent or Invariant Vector) எனப்படும்.

$AX = \lambda X$ என்றால் $\lambda X - AX = 0_{n, 1}$ ஆகும்.

(அ-து) $(\lambda I_n - A) X = 0$ ஆகும். (அ-து)

$$\underset{n\times 1}{\begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & \dots & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & \dots & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \dots & \dots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix}} \underset{n\times 1}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}} = \underset{n\times 1}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}$$

இது ஒரு சமபடித்தான ஒருபடிச் சமன்பாடுகளின் தொகுதியாகும். எனவே இத்தொகுதிக்கு வெளிப்படையற்ற ஒரு தீர்வு இருக்கத் தேவையான, போதுமான நிபந்தனை $|\lambda I - A| = 0$ ஆகும்.

(அ-து)

$$\Phi(X) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \ldots & \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \ldots & \ldots & -a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \ldots & \ldots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \text{ ஆக}$$

இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே இத்தொகுதிக்கு வெளிப்படையற்ற தீர்வுண்டு.

இங்கு λ-ல் n படித்தான கோவை $\Phi(\lambda)$ ஆனது A-ன் **பண்பியல் கோவை** (characteristic polynomial) எனவும்,

சமன்பாடு $\Phi(\lambda) = 0$-ன் மூலங்கள் (roots) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (என்க) என்பன A-ன் **பண்பியல் மூலங்கள்** (characteristic or latent roots) அல்லது **ஐகன் மதிப்புகள்** (Eigen Values) எனவும் அழைக்கப்படும்.

நமது வரையறையிலிருந்து அணி A = மூலைவரை $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ என்றால் A-ன் ஐகன் மதிப்புகள், இம்மூலைவரை உறுப்புகளே என்பது உடன் விளங்கும்.

§ 8·1. தேற்றம் :

ஓர் அணியின் வெவ்வேறான (distinct) ஐகன் மதிப்புகளைச் சார்ந்த ஐகன் வெக்டர்கள் ஒருபடிச்சாராதிருக்கும்.

நிரூபணம் :

A தரப்பட்டுள்ள ஓர் அணி என்க.

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ என்பன A-ன் வெவ்வேறான ஐகன் மதிப்புகளாகட்டும். இவற்றைச் சார்ந்த ஐகன் வெக்டர்களை முறையே $X_1, X_2, \ldots, X_r$ என்க.

அப்படியானால், $AX_j = \lambda_j X_j \ (j = 1, 2, \ldots, r)$

$K_1, K_2, \ldots, K_r$ என்பன, எல்லாம் பூச்சியமல்லாத எண்ணிகள் என்க.

$K_1 X_1 + K_2 X_2 + \ldots + K_r X_r = 0$ ...(i) என்றால்,

$AK_1 X_1 + AK_2 X_2 + \ldots + AK_r X_r = 0$

(அ-து) $K_1 AX_1 + K_2 AX_2 + \ldots + K_r AX_r = 0$

(அ-து) $K_1 \lambda_1 X_1 + K_2 \lambda_2 X_2 + \ldots + K_r \lambda_r X_r = 0$ ...(ii)

(ii) ஐ மீண்டும் A-ல் பெருக்கிச் சுருக்க,

$$K_1 \lambda_1^2 X_1 + K_2 \lambda_2^2 X_2 + \ldots + K_r \lambda_r^2 X_r = 0 \qquad \ldots \text{(iii)}$$

இவ்வாறு மீண்டும், மீண்டும் செயல்பட

....

....

$$K_1 \lambda_1^{r-1} X_1 + K_2 \lambda_2^{r-1} X_2 + \ldots + K_r \lambda_r^{r-1} X_r = 0$$

இந்த r சமன்பாடுகளையும்,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \ldots & \ldots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \ldots & \ldots & \lambda_r^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{r-1} & \lambda_2^{r-1} & \ldots & \ldots & \ldots & \lambda_r^{r-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 X_1 \\ K_2 X_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ K_r X_r \end{bmatrix} = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad I$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_r$ எல்லாம் வெவ்வேறானவையாதலால், இடப் புறத்திலுள்ள $r \times r$ அணியானது (Vander monde அணி) ஒருமையில் ஆகும். (இதன் நிரூபணமானது இப் புத்தகத்தின் வரம்பிற்குட்பட்டதல்ல வாதலால் விடப்பட்டுள்ளது.)

எனவே, இவ்வணிக்கு எதிர்மறை உள்ளது.

இவ்வெதிர் மறையால் இருபுறமும் முன் பெருக்க,

$$\begin{bmatrix} K_1 X_1 \\ K_2 X_2 \\ \vdots \\ K_r X_r \end{bmatrix} = 0 \text{ ஆகும்.}$$

$\therefore \; K_1 = K_2 = \ldots = K_r = 0.$

$\therefore$ (i) லிருந்து, $X_1, X_2, \ldots, X_r$ என்பன ஒருபடிச் சாராதவையாகும்.

குறிப்பு: ஓர் ஐகன் வெக்டரைச் சார்ந்து இரு வெவ்வேறு ஐகன் மதிப்புகளிராது. ஏனெனில்,

λ_1, λ_2 என்பன ஓர் ஐகன் வெக்டர் X ஐச் சார்ந்த இரு வெவ்வேறு ஐகன் மதிப்புகளெனின், $\lambda_1 X = \lambda_2 X$.

$\therefore \; (\lambda_1 - \lambda_2) X = 0. \;\; X \neq 0 \;\; \therefore \; \lambda_1 - \lambda_2 = 0$, *ie.* $\lambda_1 = \lambda_2$ ஆகும்.

ஆனால், ஓர் ஐகன் மதிப்பைச் சார்ந்து வெவ்வேறு ஐகன் வெக்டர்கள் இருக்கக்கூடும். ஏனெனில்,

$AX = \lambda X$ என்றால் $A(KX) = \lambda \cdot (KX)$.

எனவே KX-ம் A-ன் λ-வைச் சார்ந்த ஐகன் வெக்டராகும்.

§ 8·2. ஓர் அணியின் பண்பியல் உள்ளடங்கு வெளிகள் : (Characteristic Subspaces of a Matrix)

$(\lambda I - A) X = 0$ ....(1) என்ற அணிச் சமன்பாட்டின் ஒவ்வொரு வெளிப்படையற்ற தீர்வும், ஐகன் மதிப்பு λ-ஐச் சார்ந்த ஓர் ஐகன் வெக்டராகும்.

$(\lambda I - A)$-ன் அளவை r என்றால் சமன்பாடு (i)-ற்கு $(n-r)$ ஒருபடிச்சாரா தீர்வுகள் உள்ளன என அறிவோம். இவற்றால் உருவாக்கப்படும் $V_n(F)$-ன் உள்ளடங்கு வெளி ஆனது ஐகன் மதிப்பு λ-வைச் சார்ந்த A-ன் பண்பியல் வெக்டர் வெளி (Characteristic Vector Space) எனப்படும்.

ஐகன் மதிப்பு λ-வைச் சார்ந்த A-ன் பண்பியல் வெக்டர் வெளியானது A-ன் நிரை (நிரல்) பூச்சிய வெளியன்றி வேறொன்றில்லை என்பது வெளிப்படை உண்மையாகும். எடுத்துக் காட்டாக,

எ. கா. 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$ என்றால், பண்பியல் சமன்பாடானது

$$\Phi(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda+1 \end{bmatrix} = 0 \text{ ஆகும்.}$$

(அ-து) சுருக்க, $(\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0$ ஆகும்.

எனவே, $\lambda = 1, 2, -1$ என்பன A-ன் பண்பியல் மதிப்புகளாகும்.

$\lambda = \mathbf{1}$ என்றால், $(\lambda I - A) X = 0$ ஆனது

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \text{ ஆகும்.}$$

$$[A\ H] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\backsim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ஆதலால்,

$x_1 - 3x_2 = 0\ ;\ x_2 - 2x_3 = 0$

$\therefore\ x_1 = 3t,\ x_2 = 2t,\ x_3 = t$ (t சாராமாறி) ஆகும்.

$\therefore\ X = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} t$ ஆனது $\lambda = 1$ஐச் சார்ந்த ஐகன் வெக்டராகும்.

மேலும், $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ஆல் உருவாக்கப்படும் வெளியானது A-ன் பண்பியல் வெக்டர் வெளியாகும். அது மட்டுமில்லாது இவ் வெக்டரால் உருவாக்கப்படும் வெளியிலுள்ள ஒவ்வொரு வெக்டரும் ஓர் ஐகன் வெக்டராகும். இதுபோல்,

$\lambda = 2$ என்றால் $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$-ம், $\lambda = -1$ என்றால் $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$-ம் A-ன் பண்பியல் வெக்டர் வெளியை உருவாக்குமென நிறுவலாம்.

குறிப்பு : $D =$ மூலைவரை $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ என்க. $E_j\ (j = 1, 2 \ldots n)$ ஆதார வெக்டர்களென்க.

$D\ E_j = \alpha_j\ E_j$ ஆதலால், ஒரு n தரமுடைய மூலைவரை அணிக்கு n ஒருபடிச்சாரா ஐகன் வெக்டர்கள் உண்டு என்பது புலனாகும்.

§ 8·3. பல்லுறுப்புக் கோவை அணிகள் (Polynomial Matrices)

$\Phi(\lambda) = a_m\ \lambda^m + a_{m-1}\ \lambda^{m-1} + \ldots + a_0$ என்ற குணகங்களை எண்ணிகளாகக் கொண்ட λ-ல் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையை எடுத்துக் கொள்வோம்.

A ஆனது ஒரு $n \times n$ அணியென்றால்,

$\Phi(A) = a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \ldots + a_o I_n$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. a_o-ன் இடத்தை $a_o I_n$-ஆல் நிரப்பியுள்ளோம் என்பதை இங்கு கவனிக்கவும். மேலும், $\Phi(A)$-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் ஒரு $n \times n$ அணியாகவே இருக்கும்.

$A_o, A_1, \ldots A_m$ என்பன ஒரேதர சதுர அணிகள் என்க.

$f(x) = A_o + A_1 x + \ldots A_m x^m$ என்ற வடிவிலுள்ள ஒரு கோவை (expression) யானது அணிப் பல்லுறுப்புக் கோவையென (Matrix Polynomial) வரையறுக்கப்படுகிறது.

$A_m \neq 0$ என்றால் இதன்படி m எனப்படும். இரு அணிப் பல்லுறுப்புக் கோவைகளில், x-ல் ஒரே படித்தான உறுப்புகளின் குணகங்கள் சமமாக இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே, இப்பல்லுறுப்புக் கோவைகள் சமம் எனப்படும்.

மேலும்,

$f(x) = A_o + A_1 x + \ldots + A_m x^m$,

$g(x) = B_o + B_1 x + \ldots + B_k x^k$ என்றால் ($K < m$ என்க.)

$f(x) + g(x) = (A_o + B_o) + (A_1 + B_1) x + \ldots + (A_k + B_k) x^k + A_{k+1} x^{k+1} + \ldots + A_m x^m$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. இது அணிப் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் கூட்டலுக்கான வரையறையாகும். மேலும்,

$f(x) \cdot g(x) = A_o B_o + (A_o B_1 + A_1 B_o) x + (A_o B_2 + A_1 B_1 + A_2 B_o) x^2 + \ldots \ldots + A_m B_k x^{m+k}$ ஆகும்.

இதனை பெருக்கலுக்கான வரையறை யென்போம்.

அடுத்து பல்லுறுப்புக் கோவைகளை உறுப்புகளாகக் கொண்ட அணிகளைப்பற்றிப் பார்ப்போம். x-ல் உள்ள பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் கொண்ட கணத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். இக்கோவைகளின் குணகங்கள் F என்ற களத்தில் இருக்கட்டும்.

x-ன் விகிதமுறு சார்புகளை (rational function) கொண்ட கணம் k (என்க) ஆனது ஒரு களமென எளிதில் நிறுவலாம். இக்களத்தில் உள்ள உறுப்பைக்கொண்டு k-ன் மீது ஓர் அணி அமைக்கலாம். அதாவது இவ்வணியின் உறுப்புகள் பல்லுறுப்புக் கோவைகளாக இருக்கும். இதிலிருந்து அணிகளைக் குணகங்களாகக் கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையை

உறுப்புகளாகக் கொண்ட ஓர் அணியாக எழுதலாமென அறிகிறோம். எடுத்துக்காட்டாக,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 & -x^2+x+2 \\ 2x+3 & 2x^2+x \end{bmatrix}$$

ஆகும்.

மறுதலையாக, x-ல் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை உறுப்புகளாகக் கொண்ட ஓர் அணியை, குணகங்களை அணிகளாகக் கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாக விவரிக்கலாம். இவ்வாறு பல்லுறுப்புக் கோவைகளை உறுப்புகளாகக் கொண்ட அணிகளையும், அணிகளைக் குணகங்களாகக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளையும் ஒன்றிலிருந்து மற்றதைப் பெறலாமாதலால், பொதுவாக இவ்விரு வடிவங்களையும் நாம் பல்லுறுப்புக் கோவை அணிகள் (polynomial Matrices) என்று அழைப்பது மரபு.

இம்முக்கியமான பண்பின் அடிப்படையில் பின்வரும் தேற்றத்தை நிறுவலாம்.

§ 8·4. கெய்லி-ஹமில்டன் தேற்றம் (Cayley Hamilton Theorem)

ஒரு களத்தின் மீதமைந்த எல்லா சதுர அணிகளும், அதனது பண்பியல் சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும்.

நிரூபணம்:

A ஆனது அ·தரம் $n \times n$ உடைய சதுர அணி என்க.

$\Phi(\lambda) = |\lambda I - A| = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0$ என்போம். அணி $(\lambda I - A)$-ன் அ·தரம் n ஆதலால், சேர்ப்பு $(\lambda I - A)$ ஆனது λ-ல் அதிகபட்சம் $(n-1)$படி கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளை உறுப்புகளாகக் கொண்டிருக்கும். எனவே, சேர்ப்பு $(\lambda I - A)$ யை அதிகபட்சம் $(n-1)$ படி கொண்ட அணிக் குணகங்களை உடைய ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாக விவரிக்க முடியும்.

எனவே சேர்ப்பு $\overline{\lambda I - A} = B_{n-1}\lambda^{n-1} + B_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + B_0$ என்க.

இங்கு B_i என்பன எண்ணிகளை உறுப்புகளாகக் கொண்ட அணிகளாகும்.

இப்பொழுது, (சேர்ப்பு $\overline{\lambda I - A}$). $(\lambda I - A) = |\lambda I - A| I$

$$= \Phi(\lambda) I$$

$$(அ\text{-}து)\ \Phi(\lambda) I = (சேர்ப்பு\ \overline{\lambda I - A})(\lambda I - A)$$
$$= (சேர்ப்பு\ \overline{\lambda I - A})(\lambda I) - (சேர்ப்பு\ \overline{\lambda I - A}) A$$

$$\therefore\ a_n I \lambda^n + a_{n-1} I \lambda^{n-1} + \dots + a_0 I = B_{n-1}\lambda^n + B_{n-2}\lambda^{n-1} + \dots + B_0\lambda - B_{n-1} A \lambda^{n-1} - B_{n-2} A \lambda^{n-2} - \dots - B_0 A$$

எனவே, பல்லுறுப்புக் கோவை அணிகளின் சமத்தன்மையிலிருந்து,

$$a_n I = B_{n-1}$$
$$a_{n-1} I = B_{n-2} - B_{n-1} A$$
$$\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots$$
$$a_1 I = B_0 - B_1 A$$
$$a_0 I = -B_0 A$$

மேலிருந்து கீழாக வரிசைக்கிரமமாக, இச்சமன்பாடுகளை முறையே $A^n, A^{n-1}, \dots A, I$ ஆல் பின்பெருக்கிக்கூட்ட, வலப்புறத்தில் நமக்குப் பூச்சிய அணிதான் கிடைக்கும்.

$$\therefore\ a_n A^n + a_n A^{n-1} + \dots + a_0 I = 0_{n \times n}$$

எனவே, A ஆனது அதன் பண்பியல் சமன்பாட்டை நிறைவு செய்கிறது.

குறிப்பு: மேலேயுள்ள தேற்றத்தின் வழியாக, ஓர் அணியின் எதிர்மறையை எவ்வாறு காணலாமென இப்பகுதியில் அறியலாம்.

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$ என்பது F என்ற களத்தின் மீதமைந்த அணியென்க.

$$\Phi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & \dots & \dots & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \dots\dots\dots (1)$$

$= a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$ என்போம்.

$\Phi(\lambda)$-ல் $\lambda = 0$ எனப் பிரதியிட, இப்பல்லுறுப்புக் கோவை $\Phi(\lambda)$-ன் மாறிலி உறுப்புக் கிடைக்கும்.

(1)-ல் $\lambda = 0$ எனப் பிரதியிட, $\Phi(\lambda)$-ல் உள்ள மாறிலி உறுப்பு $(-1)^n \mid A \mid$ என அறிகிறோம்.

எனவே, ஓர் ஒருமையில் அணி A-ன் பண்பியல் பல்லுறுப்புக் கோவையிலுள்ள மாறிலி உறுப்பு $\pm \mid A \mid \neq 0$ ஆகும்.

இதன் மறுதலையாக, ஓர் அணி A-ன் பண்பியல் பல்லுறுப்புக் கோவையானது பூச்சியமில்லா மாறிலி உறுப்பைக் கொண்டிருக்குமானால் அவ்வணி ஒருமையில் ஆகும். ஏனெனில், $\Phi(\lambda) = \mid \lambda I - A \mid = a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$ இங்கு $a_0 = \pm \mid A \mid$ ஆனால், $a_0 \neq 0$ ஆதலால், $\mid A \mid \neq 0$ ஆகும்.

அடுத்து A ஒருமையில் $n \times n$ என்க.

எனவே, இதன் எதிர் மறை A^{-1} உள்ளது.

கெய்லி - ஹமில்டன் தேற்றத்தின்படி,

$$\Phi(A) = a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I = 0_{n\times n}$$

$$\therefore \quad a_0 I = -[a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1 A]$$

$\frac{1}{a_0} A^{-1}$ ஆல் முன் பெருக்க,

$$A^{-1} = -\left[\frac{a_n}{a_0} A^{n-1} + \frac{a_{n-1}}{a_0} A^{n-2} + \dots + \frac{a_1}{a_0} I\right] \quad \dots(2)$$

(2) ஐ மீண்டும் A^{-1} ஆல் முன் பெருக்க,

$$A^{-2} = -\left[\frac{a_n}{a_0} A^{n-2} + \dots + \frac{a_1}{a_0} A^{-1}\right]$$ இன்ன பிறவாகும்.

எ.கா. 1. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ என்ற அணிக்கு கெய்லி – ஹமில்டன் தேற்றத்தை சரிபார்க்கவும். இதிலிருந்து A^{-1} காண்க.

இங்கு A-ன் பண்பியல் பல்லுறுப்புக் கோவை,

$$\Phi(\lambda) = \mid \lambda I - A \mid = \begin{bmatrix} \lambda-2 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & -2 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix} = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda + 1$$

எனவே A-ன் பண்பியல் சமன்பாடு $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$ ஆகும்.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -8 & 0 \\ 8 & -1 & 8 \\ 8 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \Phi(A) = A^3 - 4A^2 + 4A + 1 \cdot I_3$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & -8 & 0 \\ 8 & -1 & 8 \\ 8 & -4 & 3 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= O_{3\times3}$$

தேற்றம் சரிபார்க்கப்பட்டு விட்டது.

$\overset{-1}{A}$ காண

இங்கு $a_0 = 1;\ a_1 = 4;\ a_2 = -4;\ a_3 = 1$

$|A| = \pm a_0 \neq 0 \quad \therefore \quad \overset{-1}{A}$ உளது. மேலும்,

$$\overset{-1}{A} = -\left[\frac{a_3}{a_0} A^2 + \frac{a_2}{a_0} A + \frac{a_1}{a_0} I\right]$$

$$= -\left[A^2 - 4A + 4I\right]$$

$$= -\begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

எ-கா 2 : $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ என்பன F என்ற களத்தின் மீதமைந்த n சதுரஅணி A-ன் ஐகன் மதிப்புகள். $H(x)$ என்பது x-ல் p படித்தான ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை என்றால் $|H(A)| = H(\lambda_1) \cdot H(\lambda_2) \ldots H(\lambda_n)$ என நிறுவுக.

கொள்கையின்படி $\Phi(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n)$ .....(1)

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ என்பன $H(x) = 0$-ன் மூலங்கள் என்றால்,

$H(x) = K(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_p)$ ......(2)

இப்பொழுது $H(A) = K(A-\alpha_1 I)(A-\alpha_2 I)\ldots(A-\alpha_p I)$

$$\therefore \quad |H(A)| = |K(A-\alpha_1 I)| \cdot |A-\alpha_2 I| \ldots |A-\alpha_p I|$$
$$= K^n |A-\alpha_1 I| \ldots |A-\alpha_p I|$$
$$(\because |CA| = C^n |A|)$$
$$= K^n (-1)^{np} \{(\alpha_1-\lambda_1)\ldots(\alpha_1-\lambda_n).(\alpha_2-\lambda_1)\ldots(\alpha_2-\lambda_n)\ldots\ldots(\alpha_p-\lambda_1)\ldots(\alpha_p-\lambda_n)\}$$
$$= (-1)^{np}\{K(\alpha_1-\lambda_1).(\alpha_2-\lambda_1)\ldots(\alpha_p-\lambda_1).$$
$$K(\alpha_1-\lambda_2)(\alpha_2-\lambda_2)\ldots(\alpha_p-\lambda_2).$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$K(\alpha_1-\lambda_n)(\alpha_2-\lambda_n)\ldots(\alpha_p-\lambda_n)\}$$
$$= (-1)^{np}\{(-1)^p \cdot H(\lambda_1) \cdot (-1)^p H(\lambda_2) \ldots (-1)^p \cdot H(\lambda_n)\}$$

(2) லிருந்து

$$= (-1)^{2np}[H(\lambda_1) \cdot H(\lambda_2) \ldots H(\lambda_n)]$$
$$\therefore \quad |H(A)| = H(\lambda_1) \cdot H(\lambda_2) \ldots H(\lambda_n)$$

$\therefore$ (n, p + ve முழு எண்கள்)

ஐகன் மதிப்புகளின் தன்மைகள் (Nature of Eigen Values)

§ 8·5. தேற்றம் :

ஒவ்வொரு ஹெர்மிசியன் அணியின் ஐகன் மதிப்புகளும் மெய்யெண்களாகும்.

நிரூபணம் :

A ஒரு ஹெர்மிசியன் அணியென்க.

அப்படியானால், $A^* = A$ ஆகும். ....(1)

A-ன் ஓர் ஐகன் மதிப்பு λ_j-ச் சார்ந்த ஐகன் வெக்டர் X_j என்க.

அப்படியானால், $A X_j = \lambda_j X_j$

இப்பொழுது $X_j^* A X_j = X_j^* \lambda_j X_j$

$= \lambda_j X_j^* X_j$ ....(2)

மேலும், $(X_j^* A X_j)^* = \overline{\lambda_j} (X_j^* X_j)^*$

(அ-து) $X_j^* A^* (X_j^*)^* = \overline{\lambda_j} X_j^* (X_j^*)^*$

(அ-து) $X_j^* A X_j = \overline{\lambda_j} X_j^* X_j$ ($\because A^* = A$) ....(3)

(2), (3) லிருந்து, $\lambda_j = \overline{\lambda_j}$

$\therefore$ λ_j ஒரு மெய்யெண்ணுகும்.

கிளைத்தேற்றம் :

எல்லா மெய் சமச்சீரணிகளின் ஐகன் மதிப்புகளும் மெய்யெண்களாகும்.

ஏனெனில் ஒவ்வொரு மெய் சமச்சீரணியும் ஹெர்மிசியன் ஆகும்.

§ **8·6.** **தேற்றம் :**

எல்லா எதிர் ஹெர்மிசியன் அணிகளின் ஐகன் மதிப்புகளும் ஒன்றில் பூச்சியமாகவோ அல்லது தனிக்கற்பனை எண்ணுகவோ இருக்கும்.

நிரூபணம் :

A எதிர் ஹெர்மிசியன் என்க.

அப்படியாஞல், (iA) ஆனது ஹெர்மிசியன் என அறிவோம்.

A-ன் ஓர் ஐகன் மதிப்பு λ_j ஐச் சார்ந்த ஐகன் வெக்டர் X_j என்ருல் $A X_j = \lambda_j X_j$ ஆகும்.

$\therefore$ $(iA) X_j = (i \lambda_j) X_j$ $(i^2 = -1)$

இதிலிருந்து ஹெர்மிசியன் அணி (iA)-ன் ஓர் ஐகன் மதிப்பென $(i \lambda_j)$ அறிகிருேம்.

எனவே, § 8·5-ன் படி $i \lambda_j$ ஆனது மெய்யெண்ணுகும்.

$\therefore$ λ_j ஆனது 0 ஆகவோ அல்லது தனிக்கற்பனை எண்ணுகவோ இருத்தல் வேண்டும்.

கிளைத் தேற்றம் :

எல்லா மெய் எதிர் சீரணிகளும், எதிர் ஹெர்மிசியன்கள் ஆதலால், எல்லா எதிர் சீரணிகளின் ஐகன் மதிப்புகளும்

பூச்சியமாகவோ அல்லது தனிக்கற்பனை எண்ணாகவோ இருக்கும்.

§ 8·7. தேற்றம் :

ஒரு மெய் சமச்சீரணியின் இரு வெவ்வேறு ஐகன் மதிப்புகளைச் சார்ந்த ஐகன் வெக்டர்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகும்.

நிரூபணம் :

A மெய் சமச்சீரென்க. அப்படியானால், $A^{T} = A$. λ_1, λ_2 என்பன A-ன் இரு வெவ்வேறு ஐகன் மதிப்புகளாக இருக்கட்டும். λ_1, λ_2 என்பன மெய்யெண்களென அறிவோம்.

இவற்றைச் சார்ந்த ஐகன் வெக்டர்கள் X_1, X_2 என்றால்

$A X_1 = \lambda_1 X_1$ ....(1) ; $A X_2 = \lambda_2 X_2$ ....(2) ஆகும்.

(1) ஐ X_2^{T} ஆல் முன் பெருக்க,

$X_2^{T} A X_1 = \lambda_1 X_2^{T} X_1$

$\therefore \quad (X_2^{T} A X_1)^{T} = \lambda_1 (X_2^{T} X_1)^{T}$

(அ-து) $X_1^{T} A X_2 = \lambda_1 X_1^{T} X_2 \quad (\because \ A^{T} = A)$.........(3)

(2) ஐ X_1^{T} ஆல் முன் பெருக்க $X_1^{T} A X_2 = \lambda_2 X_1^{T} X_2$......(4)

(3), (4) லிருந்து, $\lambda_1 X_1^{T} X_2 = \lambda_2 X_1^{T} X_2$

$\therefore \quad (\lambda_1 - \lambda_2) X_1^{T} X_2 = 0 \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2$ ஆதலால்,

$X_1^{T} X_2 = 0$ ஆகும். எனவே, X_1, X_2 என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகும்.

§ 8·8. தேற்றம் :

ஒரு ஹெர்மிசியன் அணியின் இரு வெவ்வேறு ஐகன் மதிப்புகளைச் சார்ந்த ஐகன் வெக்டர்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகும்.

நிரூபணம் :

A ஹெர்மிசியன் என்க. அப்படியானால், $A^* = A$ λ_1, λ_2. என்பன A-ன் இரு வெவ்வேறான ஐகன் மதிப்புகளாகவும், X_1, X_2 என்பன இவற்றைச் சார்ந்த ஐகன் வெக்டர்களாகவும் இருக்கட்டும்.

λ_1, λ_2 என்பன மெய்யெண்களாகுமென அறிவோம்.

மேலும், $A X_1 = \lambda_1 X_1$.........(i) ; $A X_2 = \lambda_2 X_2$.........(ii)

(i) ஐ X_2^* ஆல் முன் பெருக்க,

$X_2^* A X_1 = \lambda_1 X_2^* X_1$

$\therefore \ (X_2^* A X_1)^* = \lambda_1 (X_2^* X_1)^*$ ($\because$ λ_1 மெய்யெண்)

(அ-து) $X_1^* A X_2 = \lambda_1 X_1^* X_2$ ($\because$ $A^* = A$)

(அ-து) $X_1^* \lambda_2 X_2 = \lambda_1 X_1^* X_2$ (ii) லிருந்து

(அ-து) $(\lambda_1 - \lambda_2) X_1^* X_2 = 0$. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ஆதலால்,

$X_1^* X_2 = 0$ ஆகும்.

§ 8·9. தேற்றம்:

ஓர் ஒன்றூடான (unitary) அணியின் ஒவ்வொரு ஐகன் மதிப்பின் எண்ணளவும் (modulus) ஒன்று ஆகும்.

நிரூபணம்:

A ஒன்றூடான அணி என்க. அப்படியானால், $A^* A = I$

A-ன் ஓர் ஐகன் மதிப்பு λ_j-ஐச் சார்ந்த ஐகன் வெக்டர் X_j என்றால்,

$A X_j = \lambda_j X_j$

$\therefore \ (AX_j)^* = \overline{\lambda_j} \ X_j^*$

(அ-து) $X^*_j \ A^* = \overline{\lambda_j} X_j^*$

$\therefore \ X_j^* A^* (AX_j) = \overline{\lambda_j} X_j^* (\lambda_j X_j)$

(அ-து) $X_j^* I X_j = \overline{\lambda_j} \lambda_j X_j^* X_j$

$\therefore \ (1 - \overline{\lambda_j} \lambda_j) X_j^* X_j = 0$

$X_j \neq 0$ ஆதலால், $X_j^* X_j \neq 0$ ஆகும்.

$\therefore \ \overline{\lambda_j} \lambda_j = 1$

$\therefore \ |\lambda_j| = 1$

கி. தேற்றம்:

ஒவ்வொரு மெய் செங்குத்தணியும் ஒன்றூடான அணி ஆதலால், இவற்றின் ஒவ்வொரு ஐகன் மதிப்புகளின் எண்ணளவையும் 1 ஆகும்.

குறிப்பு: ஒன்றூடான அல்லது மெய் செங்குத்தணிகளின் ஐகன் மதிப்புகள் மெய்யெண்களென்றால் அவை 1 ஆகவோ அல்லது -1 ஆகவோதான் இருக்கும்.

§ 8·10. தேற்றம்:

A ஒரு குத்தெதிர் அணி (Normal Matrix) என்க. இதன் ஓர் ஐகன் மதிப்பு λ_j-ஐச் சார்ந்த ஐகன் வெக்டர் X_j என்றால், X_j ஆனது A^*-க்கும் ஓர் ஐகன் வெக்டராகும். மேலும், இதனைச் சார்ந்த A^*-ன் ஐகன் மதிப்பு $\overline{\lambda_j}$ ஆகும்.

நிரூபணம்:

A குத்தெதிர் ஆதலால், $A A^* = A^*A$

$B = (\lambda_j I - A)$ என்க. கொள்கையின்படி

$$B X_j = (\lambda_j I - A) X_j = 0 \qquad \text{.........(1)}$$

எனவே, $(BX_j)^* BX_j = 0$

(அ-து) $X_j^* B^* BX_j = 0$

(அ-து) $X_j^* (\lambda_j I - A)^* (\lambda_j I - A) X_j = 0$

(அ-து) $X_j^* (\overline{\lambda_j} I - A^*) (\lambda_j I - A) X_j$

$$= X_j^* \{ \lambda_j \overline{\lambda_j} I - \overline{\lambda_j} A - \lambda_j A^* + A A^* \} X_j$$
$$= X_j^* (\lambda_j I - A) (\overline{\lambda_j} I - A^*) X_j$$
$$= X_j^* \; B B^* \; X_j$$
$$= (B^* X_j)^* \; B^* X_j$$
$$= 0$$

$\therefore \quad B^* X_j = 0$

(அ-து) $(\overline{\lambda_j} I - A^*) X_j = 0.$

எனவே, X_j ஆனது A^* ஓர் ஐகன் வெக்டராகும். மேலும், இதனைச்சார்ந்த ஐகன் மதிப்பு $\overline{\lambda_j}$ ஆகும்.

§ 8·11. தேற்றம்:

ஒரு குத்தெதிர் அணியின் இரு வெவ்வேறு ஐகன் மதிப்புகளைச் சார்ந்த ஐகன் வெக்டர்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகும்.

நிரூபணம் :

A ஒரு குத்தெதிர் அணி என்க. $AA^* = A^*A$. λ_1, λ_2 என்பன A-ன் இரு வெவ்வேறு ஐகன் மதிப்புகளாகவும், X_1, X_2 என்பன முறையே இவற்றைச் சார்ந்த ஐகன் வெக்டர்களாகவும் இருக்கட்டும்.

அப்படியானால், $A X_1 = \lambda_1 X_1$......(i); $A X_2 = \lambda_2 X_2$

எனவே, § 8·10-ன்படி

$A^* X_1 = \bar{\lambda}_1 X_1$.....; $A^* X_2 = \bar{\lambda}_2 X_2$ ....(2)

(1) ஐ X_2^*-ஆல் முன் பெருக்க,

$X_2^* A X_1 = \lambda_1 X_2^* X_1$

$\therefore \quad (X_2^* A X_1)^* = \bar{\lambda}_1 X_1^* X_2$

(அ-து) $X_1^* A^* X_2 = \bar{\lambda}_1 X_1^* X_2$

(அ-து) $X_1^* \bar{\lambda}_2 X_2 = \bar{\lambda}_1 X_1^* X_2$ (2) லிருந்து

$\therefore \quad (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2) \quad X_1^* X_2 = 0$

$\bar{\lambda}_1 \neq \bar{\lambda}_2$ ஆதலால்,

$X_1^* X_2 = 0$ ஆகும். எனவே, X_1, X_2 ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகும்.

பயிற்சி 8

1. பின்வரும் அணிகளுக்கு ஐகன் மதிப்புகள் கண்டு பிடித்து, இவற்றைச் சார்ந்த ஐகன் வெக்டர் வெளிகளின் தளங்களைக் காண்க :—

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 0 & -i & -i \\ -i & 0 & i \\ -i & i & 0 \end{bmatrix}$

(vi) $\begin{bmatrix} 2-i & 0 & i \\ 0 & 1+i & 0 \\ i & 0 & 2-i \end{bmatrix}$ (vii) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

2. பின்வரும் அணிகளின் பண்பியல் பல்லுறுப்புக் கோவைகள் கண்டுபிடித்து, அதன் வழியில் கெய்லி-ஹமில்டன் தேற்றத்தைச் சரிபார்க்கவும் :—

$$\text{(i)} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{(ii)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{(iii)} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

3. பின்வரும் அணிகளின் எதிர்மறை காண் :—

$$\text{(i)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{(ii)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{(iii)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

4. $x^2 + x + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் அணி A ஆனது ஒருமையில் என நிறுவுக.

5. A ஒருமைசேர் அணியாக இருந்தால், இருந்தால்மட்டுமே $\lambda = 0$ ஆனது A-ன் ஓர் ஐகன் மதிப்பாகுமென நிறுவுக.

6. λ ஆனது ஓர் ஒருமையில் அணி A-ன் ஐகன் மதிப்பென்றால், λ^{-1} ஆனது A^{-1}-ன் ஓர் ஐகன் மதிப்பென நிறுவுக. இதனைச் சார்ந்த ஐகன் வெக்டர் என்ன ?

$$\left[\left| \lambda I - A^{-1} \right| = \left| -\lambda A^{-1} \left(\frac{1}{\lambda} I - A \right) \right| \right]$$

7. அணி A-யும் A^T-ம் ஒரே ஐகன் மதிப்புகளுடையன வென்று நிரூபி.

8. A^*-ன் ஐகன் மதிப்பும், A-ன் ஐகன் மதிப்பும் இணைச்சிக்கலெண்களெனக் காண்பி.

9. A ஒருமையில் அணி என்க. இதன் ஓர் ஐகன் மதிப்பு α என்றால், $\frac{|A|}{\alpha}$ ஆனது (சேர்ப்பு A)-ன் ஐகன் மதிப்பாகுமெனக் காண்பி.

10. n சதுர அணி A-ன் ஐகன் மதிப்புகள் $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ என்றால் (λ_1-k), $(\lambda_2-k), \ldots, (\lambda_n-k)$ என்பன $A-kI$-ன் (k ஓர் எண்ணி) ஐகன் மதிப்பாகுமென நிரூபி.

$$\{ \mid \lambda I-(A-kI) \mid = \mid (\lambda+k) I-A \mid \}$$

11. A ஒரு n- சதுர அணி என்க. s_t $(t=1, 2, \ldots n-1)$ ஆனது $(-1)^t$ தடவை A-ன் எல்லா t சதுர தலையாய சிற்றணிக் கோவைகளின் (Principal Minors) கூடுதல் என்றால்,

$$\Phi(\lambda) = \mid \lambda I-A \mid = \lambda^n + s_1 \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + s_{n-1}\lambda +$$

$(-1)^n \mid A \mid$ என நிறுவுக. (இதனை உபயோகித்து கணக்கு 8ஐச் செய்யவும்)

12. எல்லா மூலை வரை அணியின் ஐகன் மதிப்புகளும் ஆதார வெக்டர்களென நிறுவுக.

13. λ_1, λ_2 என்பன A, B என்பனவற்றின் ஐகன் மதிப்புகளெனின் $(\lambda_1+\lambda_2)$ ஆனது $(A+B)$-ன் ஐகன் மதிப்பாயிருக்கத் தேவையில்லையென ஒரு எடுத்துக்காட்டால் நிறுவுக.

14. ஒரு சதுர அணியின் அளவை r என்றால் அதன் $(n-r)$ ஐகன் மதிப்புகள் 0 என நிறுவுக.

15. A, B என்பன சதுர அணிகள். A ஒருமையில் என்றால்,

(i) $\overset{-1}{A}B, B\overset{-1}{A}$ (ii) $B, \overset{-1}{A}BA$ என்பன ஒரே ஐகன் மதிப்புகளுடையன என நிறுவுக.

16. (i) மெய் ஐகன் மதிப்புகளுடைய எல்லா குத்தெதிர் அணிகளும் ஹெர்மிசியன்

(ii) எண்ணளவை (Modulus) 1 என ஐகன் மதிப்புகள் கொண்ட எல்லா குத்தெதிர் அணிகளும் ஒன்றூடானவை (unitary) என நிறுவுக.

9. வடிவொத்த அணிகள் — மூலை வரைப்படுத்துதல்

(Similar Matrices — Diagonalization)

§ **9·1.** வரையறை:

A, B என்பன F-என்ற களத்தின் மீதமைந்த, ஒரே அணித்தரங் கொண்ட இரு அணிகளென்க.

F-ன் மீது P என்ற ஒருமையில் அணியானது, $A = \overset{-1}{P}\ B\ P$ என்றமையுமாறு உளதாயின் A ஆனது Bக்கு வடிவொத்தது எனப்படும்.

மேலும், அணிகளின் வடிவொத்த தன்மையானது ஒரு சரி நிகர் தொடர்பென எளிதில் நிறுவலாம். (நிரூபிக்கவும்). எனவே, நாம் பொதுவாக, A-யும் B-யும் வடிவொத்தவை என்றே கூறுவோம்.

$P, \overset{-1}{P}$ ஒருமையில் ஆதலால்,

$$R(A) = R\left(\overset{-1}{P} B\ P\right) = R(B)$$

எனவே, வடிவொத்த அணிகளின் அளவைகள் சமமாகும்.

§ **9·2. தேற்றம் :**

இரு வடிவொத்த அணிகள் ஒரே ஐகன் மதிப்புகள் கொண்டுள்ளன.

நிருபணம் :

A, B என்பன வடிவொத்தவை என்க.

அப்படியானல், P என்ற ஒருமையில் அணியானது,

$A = \overset{-1}{P} B\ P$ என்றமையுமாறு உள்ளது.

இப்பொழுது,

$$\lambda I - A = \lambda I - \overset{-1}{P} B P = \overset{-1}{P} \lambda I P - \overset{-1}{P} B P$$
$$= \overset{-1}{P} (\lambda I - B) P$$

$$\therefore \ |\lambda I - A| = |\overset{-1}{P}| \ |\lambda I - B| \ |P|$$
$$= |\lambda I - B| \quad \left(\because \ |\overset{-1}{P}| . \ |P| = 1\right)$$

எனவே, A, B-க்கள் ஒரே பண்பியல் சமன்பாடுகள் கொண்டுள்ளன. ஆதலால், இவற்றின் ஐகன் மதிப்புகளும் ஒன்றே.

§ 9·3. தேற்றம் :

அணி $A = \overset{-1}{P} B P$-ன் ஒரு ஐகன் மதிப்பு λ_j ஐச் சார்ந்த ஐகன் வெக்டர் X_j என்றால், B-ன் அதே ஐகன் மதிப்பு λ_j வைச் சார்ந்த ஐகன் வெக்டர் $P X_j$ ஆகும்.

நிரூபணம் :

கொள்கையின்படி $A = \overset{-1}{P} B P$

$$\therefore \ P A = B P \qquad \text{.........(1)}$$

A-ன் ஐகன் மதிப்பு λ_j வைச் சார்ந்த ஐகன் வெக்டர் X_j.

$$\therefore \ A X_j = \lambda_j X_j \qquad \text{.........(2)}$$

$Y = P X_j$ என்க.

அப்படியானால்,

$$B Y = B P X_j = P A X_j \quad \text{(1) லிருந்து}$$
$$= P \lambda_j X_j = \lambda_j P X_j$$
$$= \lambda_j Y.$$

$\therefore$ λ_j-ஐச் சார்ந்த B-ன் ஐகன் வெக்டர் $Y = P X_j$ ஆகும்.

§ 9·4. தேற்றம் :

(i) ஒரு மூலைவரை அணியோடு வடிவொத்த n சதுர அணிக்கு n ஒருபடிச்சாரா ஐகன் வெக்டர்கள் உண்டு. மறுதலையாக,

(ii) ஒரு n சதுர அணிக்கு, n ஒருபடிச்சாரா ஐகன் வெக்டர்கள் உளதாயின் அது ஒரு மூலைவரை அணிக்கு வடிவொத்ததாகும்.

நிரூபணம் :

$A =$ மூலைவரை $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ என்றும், B ஒரு சதுர அணி என்றும் எடுத்துக்கொள்வோம்.

A-யும், B-யும் வடிவொத்தவை என்றால் P என்ற ஒருமையில் அணியானது $P^{-1} B P = A =$ மூலைவரை $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ என்றவாறு உள்ளது. $\therefore \quad BP = PA$

$P = [X_1, X_2, \ldots, X_n]$ என்க. அப்படியானால்,

$B[X_1, X_2, \ldots, X_n] = [X_1, X_2, \ldots, X_n]$. மூலைவரை $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$

(அ-து) $[BX_1, BX_2, \ldots, BX_n] = [\lambda_1 X_1, \lambda_2 X_2, \ldots, \lambda_n X_n]$

$\therefore \quad BX_1 = \lambda_1 X_1 \,;\, BX_2 = \lambda_2 X_2 \,;\, \ldots, BX_n = \lambda_n X_n$.

எனவே $X_1, X_2, \ldots, X_n$ என்பன B-ன் n ஐகன் வெக்டர்களாகும்.

மேலும், $X_1, X_2, \ldots, X_n$ என்பன P என்ற ஒருமையில் அணியின் n நிரல் வெக்டர்களாதலால் இவை ஒருபடிச்சாராதவையாகும்.

$\therefore \quad B$-ன் n ஐகன் வெக்டர்களும் ஒருபடிச்சாராதவை.

மறுதலையாக, n சதுர அணி B-ன் ஐகன் மதிப்புகள் $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ஐச் சார்ந்த ஐகன் வெக்டர்கள் $X_1, X_2, \ldots, X_n$ என்பன ஒருபடிச்சாராதவை என்போம். அப்படியானால்,

$$BX_j = \lambda_j X_j \quad (j = 1, \ldots n)$$

$P = [X_1, X_2, \ldots, X_n]$ என்க. அப்படியானால்,

$$\begin{aligned} BP &= B[X_1, X_2, \ldots, X_n] \\ &= [BX_1, BX_2, \ldots, BX_n] \\ &= [\lambda_1 X_1, \lambda_2 X_2, \ldots, \lambda_n X_n] \\ &= [X_1, X_2, \ldots, X_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$= P \cdot$ மூலைவரை $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$

P-ன் நிரல்கள் $X_1, X_2, \ldots, X_n$ என்பன ஒருபடிச்சாராதவை யாதலால் P^{-1} உளது. $\therefore$ P^{-1} ஆல் முன்பெருக்க,

$$P^{-1} B P = \text{மூலைவரை } (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = A \quad \text{(என்க.)}$$

ஆதலால், B ஆனது மூலைவரை அணி A-யோடு வடிவொத்தது.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$-ன் வெவ்வேறான ஐகன் மதிப்புகள் $1, 2, -1$ எனவும் இவற்றைச்சார்ந்த ஒருபடிச்சாரா ஐகன் வெக்டர்கள் முறையே $X_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ எனவும் எ-கா. 1 § 8·2-ல் பார்த்தோம்.

$$P = [X_1, X_2, X_3] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ என்க. அப்படியானால்,}$$

$$P^{-1} = \tfrac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad P^{-1} A X = \tfrac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{6} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \text{மூலைவரை } (1, 2, -1)$$

இங்கு, மூலைவரை உறுப்புகள் A-ன் ஐகன் மதிப்புகள் என்பதை கவனிக்கவும்.

§ 9·5. வரையறை :

இயல் முறை கணித, வரை முறை கணித முறை பெருக்கல்கள் (Algebraic and Geometric multiplicities)

A-ன் பண்பியல் சமன்பாடு $|\lambda I - A| = 0$-விற்கு λ_j ஆனது t தடவை மடங்கும், ஒரு மடங்கு மூலமானால் (repeated root) t ஆனது λ_j-ன் இயல்முறை கணித பெருக்கல் எனப்படும்.

$(\lambda_j I - A) X = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒருபடிச்சாரா தீர்வுகளின் எண்ணிக்கை s ஆனது [(அ-து) $\overline{\lambda_j I - A}$-ன் பூச்சிய வெளியின் பரிமாணம்) λ_j ஐச் சார்ந்த A-ன் வரைமுறை கணித பெருக்கல் எனப்படும்.

§ 96. தேற்றம் :

ஒரு களம் F-ன் மீதமைந்த அணி A ஆனது ஒரு மூலைவரை அணிக்கு வடிவொப்பாக இருக்கத் தேவையான, போதுமான நிபந்தனை $(\lambda I - A)$ ஆனது F-ல் முழுமையாகக் காரணியாக்கப் பட்டு, ஒவ்வொரு λ_j-ன் இயல்முறை கணித பெருக்கலும் λ_j ஐச் சார்ந்த A-ன் வரைமுறை கணித பெருக்கலுக்குச் சமமாக இருக்கவேண்டும் என்பதாகும்.

நிரூபணம் :

n சதுர அணி A ஆனது B-க்கு வடிவொத்தது என்க.

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ என்பன A-ன் ஐகன் மதிப்புகளென்றால் P என்ற ஒருமையில் அணியானது, $P^{-1} A P = B =$ மூலை வரை $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ என்றமையுமாறு உளது. இப்பொழுது,

$$\lambda_j I - B = \begin{bmatrix} \lambda_j & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_j & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \lambda_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_j - \lambda_1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_j - \lambda_2 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \lambda_j - \lambda_n \end{bmatrix}$$

எனவே, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$-களில் t மதிப்புகள் λ_j-க்குச் சமமானால் [(அ-து) λ_j-ன் இயல்முறை கணித பெருக்கல் t ஆனால்], $(\lambda_j I - B)$-ன் மூலை வரையில் சரியாக t உறுப்புகள் பூச்சியமாகும். எனவே,

$(\lambda_j I - B)$-ன் அளவை $(n - t)$ ஆகும். ஆதலால், அதனுடைய பூச்சிய வெளியின் பரிமாணம் $= n - (n - t) = t$ ஆகும்.

மேலும், $A = P B P^{-1}$ ஆதலால்,

$$\lambda_j I - A = \lambda_j I - P B P^{-1}$$
$$= P \lambda_j I P^{-1} - P B P^{-1}$$
$$= P (\lambda_j I - B) P^{-1}$$

எனவே, $(\lambda_j I - A)$-ன் அளவையும், பூச்சிய பரிமாணமும் (Nullity) முறையே $(\lambda_j I - B)$-ன் அளவை, பூச்சிய பரிமாணங் களுக்குச் சமம்.

(அ-து) $(\lambda_j I - A)$-ன் அளவை $(n-t)$, பூச்சிய பரிமாணம் t ஆகும்.

$\therefore$ λ_j-ன் இயல்முறை கணித பெருக்கல் $= \lambda_j$ ஐச் சார்ந்த A-ன் வரைமுறை கணித பெருக்கல். மறுதலையாக,

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$ என்பன A-ன் ஐகன் மதிப்புகளென்க. இவற்றின் இயல்முறை கணித பெருக்கல்கள் முறையே $r_1, r_2, \ldots, r_t$ என்றல் $r_1 + r_2 + \ldots + r_t = n$ ஆகும்.

இவற்றைச் சார்ந்த பண்பியல் வெக்டர் வெளிகளை $V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_t}$ என்க. $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i r_i}$ $(i = 1, 2, \ldots t)$ என்பது பண்பியல் வெக்டர் வெளி V_{r_i}-ன் தளம் என்போம். ......(1) அப்படியானல், ஒருபடிச் சாராதவையாகும். K_{ij} என்ற எல்லாம் பூச்சியமில்லா எண்ணிகள்,

$$(K_{11} X_{11} + K_{12} X_{12} + \ldots + K_{1r_1} X_{1r_1})$$
$$+ (K_{21} X_{21} + K_{22} X_{22} + \ldots + K_{2r_2} X_{2r_2})$$
$$+ \ldots\ldots\ldots + (K_{t_1} X_{t_1} + K_{t_2} X_{t_2} + \ldots + K_{tr_t} X_{tr_t}) = 0$$

என்றவாறு உளதாயின்,

$$(\text{அ-து}) \quad Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_t = 0 \qquad \ldots\ldots(2)$$

$$Y_i = K_{i_1} X_{i_1} + K_{i_2} X_{i_2} + \ldots + K_{ir_i} X_{ir_i} \quad (i = 1, 2, \ldots t)$$

என்றல், ஒவ்வொரு Y_i-யும் 0 ஆகும். அப்படியில்லாவிடில், Y_i ஆனது λ_i ஐச் சார்ந்த ஓர் ஐகன் வெக்டர் எனவே (2) லிருந்து, வெவ்வேறுன ஐகன் மதிப்பைச் சார்ந்த இந்த ஐகன் வெக்டர்கள் $Y_1, Y_2, \ldots Y_t$ என்பன ஒருபடிச் சார்ந்தவை என்று வரும். ஆனல், வெவ்வேறுன ஐகன் மதிப்புகளைச் சார்ந்த ஐகன் வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சாராதவை. (§ 8·1 தேற்றம்)

எனவே, ஒவ்வொரு Y_i-யும் $(i = 1, 2, \ldots, t)$ 0 ஆகும்.

$X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{ir_i}$ என்பது ஓர், ஒருபடிச்சாரா வெக்டர்களின் கணமாதலால் $Y_i = K_{i_1} X_{i_1} + K_{i_2} X_{i_2} + \ldots + K_{ir_i} X_{ir_i}$

$$\Longrightarrow K_{i_1} = 0 = K_{i_2} = \ldots = K_{ir_i}$$

எனவே, (1)ல் உள்ள n வெக்டர்களும் ஒருபடிச் சாராதவை.

ஆதலால், § 9·4-ன்படி A ஆனது ஒரு மூலைவரை அணிக்கு வடிவொத்தது.

குறிப்பு: எல்லா சதுர அணிகளும் மூலைவரை அணிக்கு வடிவொத்தவையல்ல λ_j-ன் இயல்முறை கணித பெருக்கலானது, இதனைச்சார்ந்த A-ன் வரைமுறை கணித பெருக்கலுக்கு சமமாக இருக்கும்போது மட்டுமே இம்முடிவு உண்மையாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & -5 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 1 & -4 \end{bmatrix}$-ன் ஐகன் மதிப்புகள்.

$1, 1, 1, 2$ என அறியலாம். எனவே $\lambda_j = 1$-ன் இயல்முறை கணித பெருக்கலாகும்.

$$(\lambda_j I - A) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -5 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & -4 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$ -ன் அளவை 3.

எனவே, பூச்சிய பரிமாணம் $= 1$ (வரைமுறைகணித பெருக்கல்)

எனவே, A ஆனது மூலைவரை அணிக்கு வடிவொத்ததல்ல. ஆயினும் இது ஒரு முக்கோண அணியோடு வடிவொத்ததென, பின்வரும் தேற்றத்தில் நிறுவலாம்.

§ 9·7. தேற்றம்:

எல்லா சதுர அணிகளும், இவ்வணியின் ஐகன் மதிப்புகளை மூலைவரை உறுப்புகளாகக் கொண்ட ஒரு முக்கோண அணியோடு வடிவொத்தவை.

நிரூபணம் :

A ஆனது n சதுர அணியென்க.

$\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n$ என்பன இதன் ஐகன் மதிப்புகளாகவும் (வெவ்வேருக இருக்கத் தேவையில்லை) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ என்பன இவற்றைச் சார்ந்த ஐகன் வெக்டர்களாகவும் இருக்கட்டும். அப்படியானல்,

$A X_j = \lambda_j X_j$ ஆகும். $(i = 1, \ldots, n)$

Q_1 என்றவொரு அணியை

(i) முதல் நிரல் X_1 (மற்ற நிரல்கள் எப்படியாகிலும் இருக்கலாம்.)

(ii) Q_1 ஒருமையில் என்ற கட்டுப்பாடுகளுடன் அமைப்போம்.

அப்படியானல், $A\, Q_1$-ன் முதல் நிரல் $= A X_1$
$= \lambda_1 X_1$ ஆகும்.

எனவே, $Q_1^{-1} A\, Q_1$-ன் முதல் நிரல் $= Q_1^{-1} \lambda_1 X_1$
$= \lambda_1 Q^{-1} X_1$

ஆனல், $Q_1^{-1} X_1$ ஆனது $Q_1^{-1} Q_1 = I$ -ன் முதல் நிரலாகும்.

$\therefore$ $Q_1^{-1} A\, Q_1$-ன் முதல் நிரல் $= \lambda_1 Q_1^{-1} X_1$
$= \lambda_1 I$-ன் முதல் நிரல்

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

ஆதலால், $Q_1^{-1} A\, Q_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & B_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$ என்ற வடிவிலிருக்கும். இங்கு A_1-ன் அ. தரம் $(n-1)$ ஆகும்.

அடுத்து A-யும், $Q_1^{-1} A\, Q_1$ ம் ஒரே ஐகன் மதிப்புகளுடையன என அறிவோம். மேலும், $\left| \lambda I - Q^{-1} A\, Q_1 \right| = (\lambda - \lambda_1) \left| \lambda I - A_1 \right|$ ஆதலால், A_1-ன் ஐகன் மதிப்புகள் $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ என அறிகிறோம்.

இப்பொழுது A_1-ன் ஓர் ஐகன் மதிப்பு λ_2-ஐச் சார்ந்த ஐகன் வெக்டர் X_2 என்றால், இதை முதல் நிரலாகக் கொண்ட Q_2 என்ற ஒருமையில் அணியை அமைப்போமானால் முன்போல்,

$$\overset{-1}{Q_2} A_1 Q_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$ என்று கிடைக்கும்.

இங்கு A_2-ன் அ. தரம் $(n-2)$ ஆகும்.

$$P_1 = Q_1 \; ; \; P_2 = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}$$ என்று வரையறுப்போமானால்

$$\overset{-1}{P_2} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & \overset{-1}{Q_2} \end{bmatrix}$$ என்பது எளிதில் விளங்கும்.

இவ்வாறு தொடர்ந்து செயல்பட்டு,

$$P_3 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & Q_3 \end{bmatrix} \; ; \; \ldots \ldots \; ; \; P_{n-1} = \begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & Q_{n-1} \end{bmatrix}$$ என்றும்,

$Q = P_1 . P_2 . \ldots P_{n-1}$ என்றும் வரையறுக்க,

$$\overset{-1}{Q} A Q = \overset{-1}{P_{n-1}} . \quad \ldots \left\{ \overset{-1}{P_2} \left(\overset{-1}{P_1} A P \right) P_2 \right\} \ldots P_{n-1}$$

$$= \overset{-1}{P_{n-1}} . \ldots \overset{-1}{P_2} \begin{bmatrix} \lambda_1 & B_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} P_2 \ldots P_{n-1}$$

$$= \overset{-1}{P_{n-1}} . \ldots \overset{-1}{P_3} \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & \overset{-1}{Q_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & B_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} P_3 \ldots P_{n-1}$$

$$= \overset{-1}{P_{n-1}} . \ldots \overset{-1}{P_3} \begin{bmatrix} \lambda_1 & B_1 Q_2 \\ 0 & \overset{-1}{Q_2} A_1 Q_2 \end{bmatrix} P_3 \ldots P_{n-1}$$

$$= \overset{-1}{P_{n-1}} . \ldots \overset{-1}{P_3} \begin{bmatrix} \lambda_1 & L & M \\ 0 & \lambda_2 & B_2 \\ 0 & 0 & A_2 \end{bmatrix} P_3 \ldots P_{n-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \ldots & \ldots & \ldots & b_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & \ldots & \ldots & b_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & \ldots & b_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$n=2$ என்றால் $Q = P_1 = Q_1$ & $A_1 = [\lambda_2]$ என்ற நிலையோடு நிறுத்திக் கொள்வோம்.

$\lambda = 3$ என்றால் $A_2 = [\lambda_3]$, $Q = P_1 P_2 = Q_1 \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}$ என்ற கட்டத்தோடு தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டதாகும்.

§ 9·8. வரையறை

A, B என்பன வடிவொத்தவை என்றால், P என்ற ஒருமையில் அணியானது $A = \overset{-1}{P} B P$ என்றமையுமாறு உளது எனப் பார்த்தோம். இத்தோடு மெய்யெண்களத்தில் P ஆனது செங்குத்தணி என்றால், A ஆனது B-க்கு **செங்குத்தாக வடிவொத்தது** (Orthogonally Similar) எனப்படும்.

சிக்கலெண் களத்தில், P ஒன்றூடான அணி என்றால் A ஆனது B-க்கு **ஒன்றூடாக வடிவொத்தது** (Unitarily Similar) எனப்படும்.

§ 9·9. தேற்றம் :

மெய்யெண் களத்தின் மீதமைந்த n சதுர அணி A ஆனது மெய் ஐகன் மதிப்புகள் உடையதாயின், A ஆனது, இதன் ஐகன் மதிப்புகளை மூலைவரை உறுப்புகளாகக் கொண்டுள்ள ஒரு முக்கோண அணிக்கு செங்குத்தாக வடிவொத்ததாகும்.

நிரூபணம் :

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ என்பன A-ன் ஐகன் மதிப்புகளாகவும் $X_1, X_2, \ldots, X_n$ என்பன இவற்றைச் சார்ந்த ஐகன் வெக்டர்களாகவும் இருக்கட்டும். λ_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ மெய் ஆதலால், X_i-யும் மெய்யாகும். Q_1 என்ற ஒருமையில் அணியை, இதன் நிரல் X_1 ஆக இருக்குமாறு அமைப்போம்.

Q_1-லிருந்து, கிராம்-சுமிது முறைப்படி P_1 என்ற செங்குத்தணியை, இதன் முதல் நிரல் P_1-ன் முதல் நிரலுக்கு விகித சமத்திலிருக்குமாறு அமைப்போம்.

அப்படியானால், $\overset{-1}{P_1} A P_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & B_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$ ஆகும். (§ 9·7 பார்க்க)

இங்கு A_1-ன் அ·தரம் $(n-1)$ ஆகவும், ஐகன் மதிப்புகள் $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ ஆகவும் இருக்கும்.

அடுத்து A_2-ன் ஓர் ஐகன் வெக்டர் X_2-வை முதல் நிரலாகக் கொண்ட Q_2 அமைத்து, அதிலிருந்து முன் கூறிய முறைப்படி P_2 என்ற செங்குத்தணியை அமைப்போம். அப்படியானால்,

$$\overset{-1}{P_2} A_1 P_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு A_2-ன் அ·தரம் $(n-2)$ ஆகவும் ஐகன் மதிப்புகள் $\lambda_3, \lambda_4, \ldots, \lambda_n$ ஆகவுமிருக்கும். இவ்வாறு செயல்பட்டு, இறுதியில்,

$$R_1 = P_1 \,;\, R_2 = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}, \ldots\; R_{n-1} = \begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & P_{n-1} \end{bmatrix} \text{ என்றும்}$$

$P = R_1 . R_2 \ldots R_{n-1}$ என்றும் வரையறுப்போம்.

$P =$ செங்குத்தணி என்பது வெளிப்படை. மேலும்,

$$\overset{-1}{R_2} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & \overset{-1}{P_2} \end{bmatrix} \ldots\ldots\; \overset{-1}{R_{n-1}} = \begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & \overset{-1}{P_{n-1}} \end{bmatrix} \text{ ஆதலால்,}$$

$$\overset{-1}{P} A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_{12} & b_{13} & \ldots & \ldots & b_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & b_{23} & \ldots & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ ஆகும்.}$$

§ 9.10. தேற்றம்:

சிக்கலெண் சதுர அணி A-ன் ஐகன் மதிப்புகள் சிக்கலெண்கள் என்றால், A ஆனது இதன் ஐகன் மதிப்புகளை மூலைவரை உறுப்புகளாகக் கொண்ட ஒரு முக்கோண அணிக்கு ஒன்றூடாக வடிவொத்ததாகும்.

நிரூபணம்: (பயிற்சி)

§ 9.11. தேற்றம்:

எல்லா மெய் சமச்சீரணிகளும், இவற்றின் ஐகன் மதிப்புகளை மூலைவரை உறுப்புகளாகக் கொண்டுள்ள ஒரு மூலைவரை அணிக்கு செங்குத்தாக வடிவொத்தவையாகும்.

நிரூபணம்:

மெய் சமச்சீரணி A-ன் அ·தரம் n என்க.

இதன் ஐகன் மதிப்புகள் $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ மெய்யெண்களாகும்.

λ_j-ஐச் சார்ந்த ஐகன் வெக்டர் X_j என்றால் $A X_j = \lambda_j X_j$ $(j=1, \ldots, n)$ அணி A-யும், λ_j-யும் மெய்யெண்களாதலால் நிரல் வெக்டர் X_j-யும் மெய்யெண்ணாகும்.

X_1-ஐ முதல் நிரலாகக் கொண்டு Q_1 என்ற ஒருமையில் அணி அமைப்போம். Q_1-லிருந்து கிராம்-சுமிது முறைப்படி P_1 என்ற செங்குத்தணியை, இதன் முதல் நிரல் Q_1-ன் முதல் நிரலோடு விகிதசமத்திலிருக்குமாறு அமைப்போம். அப்படியானால்,

$$\overset{-1}{P_1} \; A \; P_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & B_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$$ ஆகும். இங்கு A-ன் அ.தரம் $(n-1)$ ஆகவும், ஐகன் மதிப்புகள் $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ஆகவுமிருக்கும்.

P_1 செங்குத்தணியாதலால் $\overset{-1}{P_1} = P_1^{\mathrm{T}}$

மேலும், A சமச்சீராதலால், $\overset{-1}{P_1} \; A \; P_1 = P_1^{\mathrm{T}} \; A \; P_1$-ம் சமச்சீராகும்.

எனவே, $B_1 = 0$ ஆகும்.

எனவே, P_1 என்ற செங்குத்தணியானது

$$\overset{-1}{P_1} A \; P_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$$ என்றவாறு அமைந்துள்ளது.

இதுபோல் P_2 என்ற $(n-1)$ அ.தரங்கொண்ட செங்குத்தணியானது

$$\overset{-1}{P_2} A_1 \, P_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$ என்றவாறு அமைந்துள்ளது.

இங்கு A_2-ன் அ·தரம் $(n-2)$ ஆகவும் ஐக்ன் மதிப்புகள் $\lambda_3, \ldots \lambda_n$ ஆகவுமிருக்கும்.

இவ்வாறு தொடர்ந்து செயல்பட்டு, இறுதியில்,

$$R_1 = P_1 \,; R_2 = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}; \ldots\ldots \quad R_{n-1} = \begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & P_{n-1} \end{bmatrix}$$

என்றும் $P = R_1, R_2 \ldots, R_{n-1}$ என்றும் வரையறுப்போம்.

$P_1, P_2 \ldots,$ செங்குத்தணிகளாதலால் $R_1, R_2 \ldots, R_{n-1}$-ம், எனவே, P-யும் செங்குத்தாகும்.

மேலும், $R_{n-1}^{-1} = \begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & P_{n-1}^{-1} \end{bmatrix}; \ldots\ldots ; R_2^{-1} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & P_2^{-1} \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad P_1^{-1} A P = R_{n-1}^{-1} \ldots\ldots \left\{ R_2^{-1} \left(R_1^{-1} A R_1 \right) R_2 \right\} \ldots\ldots R_{n-1}$$

$$= R_{n-1}^{-1} \ldots R_3^{-1} \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & P_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} R_3 \ldots\ldots R_{n-1}$$

$$= R_{n-1}^{-1} \ldots\ldots R_3^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & P_2^{-1} A_1 P_2 \end{bmatrix} R_3 \ldots\ldots R_{n-1}$$

$$= R_{n-1}^{-1} \ldots\ldots R_3^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 \end{bmatrix} R_3 \ldots\ldots R_{n-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} = \text{மூலைவரை } (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

எனவே A ஆனது மூலைவரை $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$-க்கு செங்குத்தாக வடிவொத்தது.

குறிப்பு: மெய் சமச்சீரணி A-ன் ஓர் ஐகன் மதிப்பு λ_i-ன் இயல்முறை கணித பெருக்கல் r_i என்றால் இதைச் சார்ந்த பண்பியல் வெக்டர் வெளியின் பரிமாணம் r_i ஆகும்.

§ 9·12. தேற்றம்:

எல்லா ஹெர்மிசியன் அணிகளும், இவற்றின் ஐகன் மதிப்புகளை மூலைவரை உறுப்புகளாகக் கொண்டுள்ள ஒரு மூலைவரை அணிக்கு ஒன்றூடாக வடிவொத்தவையாகும்.

நிரூபணம்: பயிற்சி.

§ 9·13. தேற்றம்:

A, Q என்பன முறையே ஒரு குத்தெதிர் அணியாகவும், ஒன்றூடான அணியாகவும் இருக்கட்டும். அப்படியானால், $Q^* AQ$ ஆனது ஒரு குத்தெதிர் அணியாகும்.

நிருபணம் :

$B = Q^* A Q$ என்க. அப்படியானல், $B^* = Q^* A^* Q$ ஆகும்.

$$
\begin{aligned}
B B^* &= (Q^* A Q)(Q^* A^* Q) \\
&= Q^* A I A^* Q \text{ (சேர்ப்பு விதி, } Q Q^* = I) \\
&= Q^* A A^* Q \\
&= Q^* A^* A Q \text{ (} \because A \text{ குத்தெதிர்)} \\
&= Q^* A^* I A Q \\
&= Q^* A^* Q Q^* A Q \\
&= B^* B
\end{aligned}
$$

எனவே $B = Q^* A Q$ ஆனது குத்தெதிர் அணியாகும்.

கி. தேற்றம் :

ஒரு குத்தெதிர் அணிக்கு ஒன்றூடாக வடிவொத்த எல்லா அணிகளும் குத்தெதிர் அணிகளாகும்.

§ 9·14. தேற்றம் :

ஒரு சதுர அணியானது குத்தெதிர் அணியாக இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே, அது ஒரு மூலைவரை அணிக்கு ஒன்றூடாக வடிவொத்ததாகும்.

நிருபணம் :

குத்தெதிர் அணி A-ன் அ. தரம் n என்க.

அப்படியானல், § 9·10-ன்படி Q என்ற ஒன்றூடான அணியானது

$$
\overset{-1}{Q} A Q = Q^* A Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_{12} & b_{13} & \dots & \dots & b_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & b_{23} & \dots & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = B
$$

என்றவாறு உளது.

மேலும், § 9·13-ன்படி B ஒரு குத்தெதிர் அணியாகும்.

$$\therefore \quad B B^* = B^* B$$

$$\text{ஆனால்} \quad B^* = \begin{bmatrix} \overline{\lambda_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \overline{b_{12}} & \overline{\lambda_2} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{b_{13}} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{b_{1n}} & \overline{b_{2n}} & \cdots & \cdots & \overline{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

இப்பொழுது $B\,B^*$-ல் முதல் நிரை, முதல் நிரலிலுள்ள உறுப்பு $a_1\,\overline{\lambda_1} + b_{12}\,\overline{b_{12}} + \ldots + b_{1n}\,\overline{b_{1n}}$ ஆகவும், $B^*\,B$-ல் முதல் நிரை, முதல் நிரலிலுள்ள உறுப்பு $a_1\,\overline{\lambda_1}$ ஆகவும் இருக்கின்றது.

$$\therefore \quad \lambda_1\,\overline{\lambda_1} = \lambda_1\,\overline{\lambda_1} + b_{12}\,\overline{b_{12}} + \ldots + b_{1n}\,\overline{b_{1n}}$$

எனவே $b_{1j} = 0$ ஆகும். $(j \neq 1)$

இதுபோல் இரண்டாவது, மூன்றாவது, ... நிரை நிரலிலுள்ள உறுப்புகளையும் எடுத்து ஆராய, இறுதியில் ஒவ்வொரு $b_{ij} = 0$ $(i \neq j)$ ஆகும்.

எனவே $B =$ மூலைவரை $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$

மறுதலையாக, A ஆனது ஒரு மூலைவரை அணி D-க்கு ஒன்றூடாக வடிவொத்தது என்க. அப்படியானால், Q என்ற ஒன்றூடான அணியானது $Q^*\,A\,Q = Q^{-1}A\,Q = D$ என்றவாறு உளது.

$$\begin{aligned} \therefore \quad A &= Q\,D\,Q^{-1} = Q\,D\,Q^* \\ \therefore \quad A\,A^* &= Q\,D\,Q^{-1}\left(Q\,D\,Q^{-1}\right)^* \\ &= Q\,D\,Q^*\,Q\,D^*\,Q^* \quad \left(\because Q^* = Q^{-1}\right) \\ &= Q\,D\,D^*\,Q^* \\ &= Q\,D^*\,D\,Q^* \\ &= Q\,D^*\,I\,D\,Q^* \\ &= Q\,D^*\,Q^*\,Q\,D\,Q^* \\ &= A^*\,A \end{aligned}$$

எனவே A ஆனது குத்தெதிர் அணியாகும்.

குறிப்பு: மறுதலையை, நமக்கு ஏற்கெனவே தெரிந்துள்ள இரு முடிவுகளின் அடிப்படையில் மிக எளிதாக பின்வருமாறு நிறுவலாம்.

எல்லா மூலைவரை அணிகளும் குத்தெதிர் அணிகளாதலால் D ஆனது ஒரு குத்தெதிர் அணியாகும்.

மேலும், ஒரு குத்தெதிர் அணிக்கு ஒன்றாடாக வடிவொத்த எல்லா அணிகளும் குத்தெதிர் ஆதலால், A-யும் குத்தெதிர் ஆகும்.

பயிற்சி 9

1. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ என்பனவற்றை மூலை வரை அணிகளுக்கு வடிவொத்ததாக விவரிக்கவும்.

2. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ ஆனது மூலைவரை அணிக்கு வடிவொத்த தல்ல என நிரூபித்து இதற்கு வடிவொத்த முக்கோண அணி அமைக்கவும்.

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ என்றால், P, Q என்ற செங்குத்தணிகளை $P^{-1}AP$, $Q^{-1}BQ$ என்பன முக்கோண அணியாக அமையுமாறு காணவும்.

4. (i) $A = \begin{bmatrix} i & 0 & 1 \\ 0 & 1+i & 0 \\ -i & 0 & 1-i \end{bmatrix}$ (ii) $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ என்றால், இவற்றிற்கு வடிவொத்த, இவற்றின் ஐகன் மதிப்புகளை மூலை வரை உறுப்புகளாகக் கொண்டுள்ள முக்கோண அணி காணவும்.

5. பின்வரும் அணிகளை மூலைவரைப் படுத்துக:—

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

6. $P^{-1}AP$ ஆனது ஒரு மூலைவரை அணியாக இருக்கத் தக்கதாக P என்ற செங்குத்தணியை அமைக்கவும்.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

7. $U^{-1}AU$ ஆனது ஒரு மூலைவரை அணியாக இருக்கத் தக்கதாக U என்ற ஒன்றூடான அணியை அமைக்கவும்.

$$(a)\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1+i & i \\ 1-i & 1 & 0 \\ -i & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (b)\ A = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 2 & 2+i \\ 0 & 2-i & 0 \end{bmatrix}$$

8. நிறுவுக :

(*a*) மெய் ஐகன் மதிப்புகளுடைய எல்லா குத்தெதிர் அணிகளும் ஹெர்மிசியன்.

(*b*) பூச்சியம் அல்லது தனி கற்பனை எண்களை ஐகன் மதிப்புகளாகக் கொண்ட எல்லா குத்தெதிர் அணிகளும் எதிர் ஹெர்மிசியன்.

(*c*) எண்ணளவை 1 ஆக ஐகன் மதிப்புகள் கொண்ட எல்லா குத்தெதிர் அணிகளும் ஒன்றூடானவை.

BIBLIOGRAPHY

1. Sets, Relations and Functions, James F. Gray.

2. Theory and Problems of Set Theory and Related Topics, Seymour Lipschutz.

3. An Introduction to Abstract Algebra—Vol. I & II, F. M. Hall.

4. Topics in Algebra, I. N. Herstein.

5. Introduction to Modern Algebra, Neal H. McCoy.

6. A Survey of Modern Algebra, Birkhoff, Maclane.

7. Theory and Problems of Modern Algebra, Frank Ayres J.R.

8. Theory and Problems of Group Theory, B. Baumslag and B. Chandler.

9. Lectures in Abstract Algebra Vol. I—N. Jacobson.

10. Introduction to Topology and Modern Analysis, G. F. Simmons.

11. Modern Algebra — An Introduction, John L. Kelley.

12. Commutative Algebra Vol. I & II— Zariski and Samuel.

13. A Text Book of Abstract Algebra, Shanti Narayanan.

14. Finite Demensional Vector spaces, P. R. Halmos.

15. Linear Algebra, L. Mirsky.

16. Introduction to Linear Algebra, Stewart.

17. Linear Algebra, G. Hadby.

18. Linear Algebra, John de Pillis.

19. Linear Algebra and Matrix Theory, Evan D. Nering.

20. Elementary Matrix Algebra, Franz E. Hohn.

21. Theory and Problems of Matrices, Frank Ayres JR.

22. A First course in Linear Algebra, Daniel Zebinsey.

23. Linear Algebra, Hoffman Kunze.

கலைச்சொற்கள்

(ஆங்கிலம் — தமிழ்)

A

Absolute Value	—	தனிப் பெறுமானம்
Abstraction	—	அருபப்படுத்துதல்
Abstractly equivalent	—	அமைப்பில் ஒன்றுயிருத்தல்
Abstract Vector Space	—	அருபவெக்டர் வெளி
Abstract Vector Space of Linear Transformations	—	ஒருபடி நிலை மாற்றங்களின் அருபவெக்டர் வெளி
Acceleration	—	முடுக்கம்
Addition module m	—	m ன் சுற்றுக்குக் கூட்டல்
Addition of Matrices	—	அணிகளின் கூட்டல்
Adjoint Matrix	—	சேர்ப்பு அணி
Algebraic Structure	—	இயல் முறை கணித அமைப்பு
Algebraically closed	—	இயல் முறை கணித அடைப்புள்ளது
Algebra with an unit element	—	அலகு உறுப்பு கொண்ட ஒருபடி இயல் முறை கணிதம்
Annihilators	—	பூச்சியமாக்கிகள்
Anti commute	—	எதிர் மாற்றீடு செய்
Anti symmetric	—	எதிர் சமச்சீர்
Archimedean property	—	ஆர்க்கிமீடியன் பண்பு
Arithmetic Sequence	—	கூட்டுத்தொடர்
Associates	—	சேர்ப்பு
Associative law	—	சேர்ப்பு விதி
Augmented Matrix	—	மிகுதிப்படுத்திய அணி
Automorphism	—	தன் ஓரினச்சார்பு

B

Basis of an abstract Vector Space	—	ஓர் அருபவெக்டர் வெளியின் தளம்
Bassel's inequality	—	பெஸ்ஸலின் சமனிலி

Bilinear — இருபுற ஒருபடித்தானது

C

Cancellation law — நீக்கல் விதி
Canonical form — நியமன வடிவம்
Cardinality — அளவை
Cardinal Number — இயல் எண்
Cauchy-Schwarz Inequality — கோசி–சுவாரச்சு சமனிலி
Cayley Hamilton Theorem — கெய்லி ஹமில்டன் தேற்றம்
Cayley's Theorem — கெய்லி தேற்றம்
Centralizer of '*a*' — '*a*'யின் மையமாக்கி
Characteristic — குண எண்
Characteristic Equation — சிறப்பியல் சமன்பாடு, பண்பியல் சமன்பாடு
Characteristic Polynomial — பண்பியல் பல்லுறுப்புக் கோவை
Characteristic Roots — பண்பியல் மூலங்கள்
Co-domain — உப அரங்கம்
Co-efficient — குணகம்
Co-efficient Matrix — குணக அணி
Cofactor — இணைக்காரணி
Column — நிரல்
Column Space — நிரல் வெளி
Column Vector — நிரல் வெக்டர்
Commutative law — பரிமாற்று விதி
Complementary Subspaces — நிரப்பு உள்ளடங்கு வெளிகள்
Complement — நிரப்பி
Complex — திரட்சி
Complex Number Field — சிக்கலெண் களம்
Complex Vectors — சிக்கலெண் வெக்டர்கள்
Complex Vector Space — சிக்கலெண் வெக்டர் வெளி
Complex Conjugate — இணைச் சிக்கலெண்
Components — கூறுகள்
Composition of functions — சார்புகளை இணைத்தல்

Conformable — இசைவுள்ளது
Congruence — முற்றிசைவு
Conjugate Bilinear — இணை இருபுற ஒருபடித்தானது
Conjunctive — ஒருங்கிசைவு
Continuum — தொடரகம்
Coset — உபகணம்
Contradiction — மாறுபாடு, முரண்பாடு
Countable — எண்ணிக்கைக்கு உட்பட்ட
Countably infinite set — எண்ணிக்கைக்குட்பட்ட முடியாக் கணம்

D

Dedikuid cut (or cut) — டெடிகிண்ட் வெட்டு [அல்லது வெட்டு]
Density — அடர்த்தி
Determinant — அணிக் கோவை
Diagonal Elements — மூலைவிட்ட மூலகங்கள், மூலைவரை மூலகங்கள்
Diagonal Matrix — மூலைவரை அணி
Diagonalisation Process — மூலைவிட்டப்படுத்தும் முறை, மூலைவரைப் படுத்தல்
Difference — வித்தியாசம்
Differential Equation — வகைக்கெழுச் சமன்பாடு
Dimension — பரிமாணம்
Direct sum — நேரிடைக்கூட்டல்
Distributive Law — பங்கீட்டு விதி
Division Algebra — வகுத்தல் இயல்முறை கணிதம்
Division Algorithm — வகுத்தல் இலக்கணக் கணக்கு
Divisors of Zero — பூச்சியக் காரணிகள்
Domain — அரங்கம்
Dual Base — துணைத்தளம்
Dual Space — துணை வெளி

E

Eigen Value — ஐகன் மதிப்பு
Eigen Vector — ஐகன் வெக்டர்

Element — மூலகம், உறுப்பு
order of — மூலகத்தின் பரிமாணம்
Elementary Abelian group — ஆதார பரிமாற்றுக் குழு
Elementary Matrices — ஆதார அணிகள்
Elementary Transformations — ஆதாரமாற்றங்கள்
Elementary Operations — ஆதாரச் செயல்கள்
Embed — பதித்தல்
Empty Set — வெற்றுக்கணம், உள்ளீடற்ற கணம், வெறுமைக்கணம்
Empty Sum — வெறுமைக்கூட்டல்
Endomorphism — தன்புனல் சார்பு
Equation — சமன்பாடு
Equivalence Classes — சரி நிகர் இனங்கள், சரிநிகர் வகுப்புகள்
Equivalent Matrices — சரிநிகர் அணிகள்
Euclidean Algorithm — யூக்ளிட் இலக்கணக் கணக்கு
Euclidean Plane — யூக்ளிடியன் சமதளம்
Euclidean Vector Space — யூக்ளிட் வெக்டர் வெளி
External Direct Sum — வெளிப்புற நேரிடைக்கூட்டல்

F

Field — களம்
Finite Field — முடிவுள்ள களம்
Finite Number — முடியும் அளவு, முடிவுள்ள எண்ணிக்கை
First Isomorphism Theorem — முதல் ஓரினச்சார்பு தேற்றம்
First Principle of Induction — முதல் தொகுப்பாய்வுக் கொள்கை
Four Group — நான்கு குழு
Force — விசை
Free Vector — தன்னிச்சை வெக்டர்
Function — சார்பு
Constant — மாறுச்சார்பு
Equal — சமமான சார்பு
into — உட்சார்பு

one to one — ஒன்றுக்கொன்றான சார்பு
onto — முழுச் சார்பு
Fundamental — அடிப்படை
Theorem of Arithmetic — எண்கணிதத்தின் அடிப்படைத் தேற்றம்
Theorem of Algebra — இயல் முறை கணிதத்தின் அடிப்படைத் தேற்றம்
Theorem of Linear Dependence — ஒருபடிச் சார்ந்த நிலையின் அடிப்படைத் தேற்றம்

G

Galois Field — கால்வா களம்
Gaussian Integers — காசியன் முழு எண்கள்
Generalisation — பொதுப்படுத்துதல்
Generalised Lines and Planes — பொதுப்படுத்தப்பட்ட நேர் கோடுகள், தளங்கள்
Generalised Vectors — பொதுப்படுத்தப்பட்ட வெக்டர்கள்
Generator — உருவாக்கி
Geometric Sequence — பெருக்குத்தொடர்
Gram-Schmidt's Orthogonalisation Process — கிராம் சுமிதின் செங்குத்தாக்கும் முறை
Greatest Common Divisor — உத்தமப் பொதுக்காரணி
Group — குழு
Abelian — பரிமாற்றுக் குழு
Centre of — குழுவின் மையம்
Cyclic — வட்டக்குழு
Dihedral — இரு முக நிலைமாற்றக் குழு
Order of — குழுவின் பரிமாணம்
Permutation — வரிசை மாற்றக்குழு
Quotient — ஈவுக்குழு

H

Hermitian Matrix — ஹெர்மிசியன் அணி
Homogeneous Equations — ஒரேபடித்தான சமன்பாடுகள்
Linear Transformations — ஓரின ஒருபடி நிலைமாற்றங்கள்

Homomorphism — புனல் சார்பு
Hyper Complex System — மேல் சிக்கல் தொகுதி

I

Ideal — சீர்வளையம்
Maximal — உச்ச சீர்வளையம்
Principal — முதன்மை சீர்வளையம்
Idempotent — தன் ஆற்றல், மூல ஆற்றல்
Identical — ஒன்றுயிருத்தல்
Identity — அலகு
Matrix — அணி அலகு
Image — பிம்பம்
Index — குறியீட்டு எண்
Induction Hypothesis — தொகுப்பாய்வுக் கொள்கை
Process — தொகுப்பாய்வு முறை
Inductive Definition (or Recursive Definition) — தொகுப்பாய்வு முறை வரையறை
Inner Product — உட்பெருக்கல்
Function — உட்பெருக்கல் சார்பு
Spaces — உட்பெருக்கல் வெளிகள்
Integers — முழு எண்கள்
Integral Domain — எண் அரங்கம்
ordered — வரிசைப்பட்ட எண் அரங்கம்
Internal Direct Sum — உட்புற நேரிடைக் கூட்டல்
Introduction — அறிமுகம்
Inverse — எதிர்மறை
Involutory Matrix — உட்சுருள் அணி
Isomorphic — அமைப்பில் ஒன்றுயிருத்தல்
Isomorphism — ஓரினச்சார்பு

K

Kernel — கெர்னல், அலகுக்கற்றை

L

Left Identity	—	இடது அலகு
Inverse	—	இடது எதிர்மறை
Linear Algebra	—	ஒருபடி இயல் முறை கணிதம்
Basis	—	ஒருபடித் தளம்
Combination	—	ஒருபடிச் சேர்வு
Dependence	—	ஒருபடிச்சார்ந்த நிலை
Dimension	—	ஒருபடிப் பரிமாணம்
Equation	—	ஒருபடிச் சமன்பாடு
Function	—	ஒருபடிச் சார்பு
Independence	—	ஒருபடிச் சாரா நிலை
Space	—	ஒருபடி வெளி
Sum	—	ஒருபடிக் கூட்டல்
Transformation	—	ஒருபடி நிலைமாற்றம்
Line of Symmetry	—	சம தோற்றக் கோடு
Localised Vector	—	ஓரிடப்படுத்திய வெக்டர்
Lower Triangular Matrix	—	கீழ் முக்கோண அணி

M

Mapping	—	அமைப்பு மாற்றம்
Mathematical Induction	—	கணிதத்தின் தொகுப்பாய்வு
System	—	கணித அமைப்பு
Maximal Linearly Independent Set	—	மீப்பெரு ஒருபடிச்சாரா நிலைக் கணம்
Metric	—	தூரம், மெட்ரிக்
Modern Algebra	—	இக்கால இயல் முறை கணிதம்
Modern Mathematics	—	இக்கால கணிதம்
Modulus	—	எண் அளவை
Momentum	—	உந்தப்பாடு
Multiplication Table	—	பெருக்கல் அட்டவணை

N

Nilpotent	—	பூச்சிய ஆற்றல்
Non-Singular Linear Transformation	—	ஒருமையில் ஒருபடி நிலை மாற்றம்
Matrix	—	ஒருமையில் அணி

Normal Form of a Matrix — அணியின் இயல்பு வடிவம்
Normalisation — அலகு படுத்தும் முறை
Normalizer of '*a*' — '*a*' யின் மாறிலி
Normal Matrix — குத்தெதிர் அணி
Normal Subgroup — நேர்மை உட்குழு
Normed Vector Space — நீளச்சார்புள்ள வெக்டர் வெளி
Not Comparable — ஒப்பிட முடியாதவை
Nullity — பூச்சியப் பரிமாணம்
Null Space — பூச்சிய வெளி
Number — எண்
    Complex — சிக்கலெண்
    Composite — கலவை எண்
    Irrational — விகித முரு எண்
    Natural — இயற்கை எண்
    Negative — எதிர் எண், எதிர்திசை எண், குறை எண்
    Positive — நேர் எண், நேர்த்திசை எண், மிகை எண்
    Prime — பகா எண்
    Rational — விகித முறு எண்
    Real — மெய்யெண்
Numerical Function — எண் சார்பு
Numerically Equivalent — அளவையில் சமமானவை

O

Odd — ஒற்றை
Operation — செயலி
    Binary — ஈருறுப்புச் செயலி
    Unary — ஓருறுப்புச் செயலி
Order — பரிமாணம், தரம்
Order of a Matrix — அணித்தரம்
Ordered Pair — வரிசையிட்ட இரட்டை, வரிசைப்பட்ட ஜோடி
Order Structure — வரிசை அமைப்பு
Orthogonal Complements — செங்குத்து நிரப்பிகள்

Orthogonal Dimension — செங்குத்துப் பரிமாணம்
Matrix — செங்குத்தணி
Projection — செங்குத்து வீழல்
Vectors — செங்குத்து வெக்டர்கள்
Orthonormal Basis — அலகு செங்குத்துத்தளம்

P

Parseval's Identity — பார்சிவல்லின் முற்றொருமை
Partition — கூறிடல்
Class — கூறு இனம்
Peano Axioms — பியானோவின் அடிப்படைக் கொள்கைகள்
Perfect Square — பூரண வர்க்கம்
Permutation — வரிசைமாற்றம்
Polynomial — பல்லுறுப்புக் கோவை
Position Vector — இடம் குறிக்கும் வெக்டர்
Positive — நேர்த்திசை, நேர், மிகை
Positive Definite — உறுதியான மிகை
Pre Image — மூலபிம்பம்
Prime Field — பகாக்களம்

Q

Quotient — ஈவு
Field — ஈவுக்களம்
Space — ஈவுவெளி

R

Range — வீச்சு
Rank of a Matrix — அணி அளவை
of a Linear Transformation — ஒருபடி நிலைமாற்றத்தின் அளவை
Rational Field — விகிதமுறு எண்களம்

Real Number Field — மெய்யெண் களம்
Relation — தொடர்பு
Cyclic — வட்டத் தொடர்பு
Equivalence — சரிநிகர்த் தொடர்பு
Reflexive — பிரதிபலிக்கும் தொடர்பு
Symmetric — சமச்சீர்த் தொடர்பு
Transitive — கடத்தும் தொடர்பு
Universal — முழுத் தொடர்பு
Relatively Prime — ஒன்றையொன்று சார்ந்த பகா எண்கள்
Restriction of f to A — A யோடு நிறுத்திய f
Ring — வளையம்
Commutative — பரிமாற்று வளையம்
Principal Ideal — முதன்மை வளையம்
Simple — தனி வளையம்
With Identity — அலகையுடைய வளையம்
Row — நிரை
Equivalent Matrices — நிரை சரிநிகர் அணிகள்
Space — நிரை வெளி
Transformations — நிரை மாற்றங்கள்

S

Scalar — எண்ணி
Scalar Matrix — சம மூலைவரை அணி
Semi-group — அரைக்குழு
Seperation of Vectors — வெக்டர்களிடையே உள்ள பிரிவு
Skew Field [or Division Ring] — கோட்டக்களம் [அல்லது வகுத்தல் வளையம்]
Set — கணம்
Complement — நிரப்புக் கணம்
Finite — முடியும் கணம், முடிவுள்ள கணம்
Index — அடையாளக்கணம், குறிக் கணம்

Infinite — முடியாக்கணம், முடிவிலாக் கணம்
Intersection — கணங்களின் வெட்டு
Power — அடுக்குக்கணம், படிக்கணம்
Product — பெருக்குக்கணம்
Singleton — ஓருறுப்புக்கணம்
Union — கணங்களின் இணைப்பு
Universal — இனமுழு மொத்தக்கணம்

Signature of a Matrix — அணியின் ராசி எண்
Similar — வடிவொத்த
Singular Matrix — ஒருமைசேர் அணி
Skew Hermitian Matrix — எதிர் ஹெர்மீசியன் அணி
Skew Symmetric Matrix — எதிர் சீர் அணி
Solutions of equations — சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள்
Sub Group — உட்குழு
Sub Matrix — கிளை அணி
Sub Ring — உள் வளையம்
Subset — உட்கணம், உள்ளடங்கு கணம்
Suffix — கீழ்க்குறி
Super Set — உள்ளடக்குக் கணம்
Symbol — குறியீடு
Symmetric Difference — சீர் வித்தியாசம்
Symmetric Matrix — சமச்சீர் அணி
System of Equations — சமன்பாட்டுத் தொகுதிகள்

T

Total Original — இணைந்த ஆதி
Total Vector Space of Order n over F — F இன் மீது அமைந்த n-தர முழு வெக்டர் வெளி
Transformation — நிலைமாற்றம்
Group — நிலைமாற்றக் குழு
Transpose Matrix — நிரை நிரல் மாற்று அணி
Triangle Inequality — முக்கோணச் சமனிலி
Matrix — முக்கோண அணி
Trivial — வெளிப்படை

U

Uncountable — எண்ணிக்கைக்கு உட்படாத
Uniqueness — தனித்தன்மை
Unique Solution — தனித்த மூலம்
Unit — அலகுக்காரணி
Unit Vectors — அலகு வெக்டர்கள்
Unitary Matrix — ஒன்றூடான அணி
Unitary Space — ஒன்றூடான வெளி
Upper Triangular Matrix — மேல் முக்கோண அணி
Upto Isomorphism — ஓரினச்சார்பு வரை

V

Value — மதிப்பீடு
Vectors — வெக்டர்கள்
Vector Space — வெக்டர் வெளி

W

Well Defined — நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட
Well Ordered Set — நன்கு வரிசைப்பட்ட கணம்

Z

Zero — பூச்சியம்
Zero Divisor — பூச்சியக்காரணி

பொருளாதாரம்—(தொடர்ச்சி).

			ரூ.	காசு
15.	இந்தியப் பொருளியல்—I	எம். பாலசுப்பிரமணியன்	10	00
16.	,, II	எம். லூர்துநாதன்	4	25
17.	நமது பொருளாதாரப் பிரச்சினை—I	சி. சுந்தரராஜன்	10	75
18.	,, II	எஸ். குழந்தைநாதன்	10	50
19.	இங்கிலாந்தின் பொருளாதார வரலாறு—I	கீ. சீ. இராமசாமி	6	00
20.	,, II	,,	6	00
21.	அமெரிக்காவின் நவீன பொருளாதார வளர்ச்சி	தி. சி. மோகன்	5	00
22.	அமெரிக்கப் பொருளாதார வரலாறு—I	மு. க. சுப்பிரமணியம்	11	00
23.	,, II	பி. வி. சீநிவாசன்	6	00
24.	,, III	,,	6	50
25.	அரசாங்க நிதியியலின் பொருளாதாரம்—I	மா. குமாரசாமி	10	00
26.	,, II	அர. சேஷாசலம்	9	50
27.	இந்தியாவின் பொருளாதார வளர்ச்சி—I	தே. வேலப்பன்	10	00
28.	,, II	ஜி. சிதம்பரம்	8	00
29.	பணம்—சிறு விளக்கம்	கோ. இராதாகிருஷ்ணன்	10	00
*30.	வணிக இயலின் தத்துவங்கள்	கு. ஆளுடையபிள்ளை	9	50
31.	பத்தொன்பதாம் நூற்றுண்டில் கிரேட் பிரிட்டனில் தொழில்_வாணிகப் புரட்சி	சூ. ரா. கருப்பண்ணன்	11	00
32.	பென்ஹாம் பொருதாரம்—I	ஏ. குழந்தை	11	00
33.	,, II	எஸ். குழந்தைநாதன்	7	00
*34.	வரவு செலவுத் திட்டம்	ஆர். ரங்காச்சாரி	6	00
35.	பன்னுட்டுப் பொருளாதாரம்—I	ஏ. குழந்தை	7	50
36.	,, II	கே. எஸ். இராமசாமி	9	00

37.	பொருளாதார ஆய்வு நூல்—I	கோ. இராதாகிருஷ்ணன்	7	75
38.	,, II	,,	7	00
39.	வளர்ச்சியுருத நாடுகளின் அரசாங்க நிதியியல்	க. வெற்றிவேல்	4	25
40.	வளர்ச்சி குறைந்த நாடுகளின் முதலாக்கம் பற்றிய சிக்கல்கள்	மா. குமாரசாமி	5	50
41.	1939 முதல் இந்தியாவில் பணவீக்க விலைப் போக்குகள்	சி. சுந்தரராஜன்	7	50
42.	பொருளாதார வளர்ச்சிபற்றிய கட்டுரைகள்	எம். கே. சுப்பிரமணியம்	7	75
43.	இந்தியப் பொருளாதார வரலாறு (1857—1956)—I	ம. திருநாவுக்கரசு	7	00
44.	பொருளாதாரம் – ஓர் அறிமுகம்	பு. வி. சீனிவாசன்	6	25

வரலாறு

*45.	பிரிட்டன் வரலாறு—I	கி. ர. அனுமந்தன்	4	50
*46.	,, II	,,	3	50
*47.	,, III	,,	7	25
*48.	ஐரோப்பிய வரலாறு—I (கி.பி. 395—1500)	டி. வி. சொக்கப்பா	3	75
*49.	,, II (கி.பி. 1500 முதல்)	என். ஜே. இராஜகோபால்	5	50
50.	ஐரோப்பா—கடந்த ஐந்து நூற்றுண்டு காலச் சரித்திரம்	வை. விருத்தகிரீசன்	9	50
51.	இங்கிலாந்து வரலாறு—I	இரா. அண்ணுமலை	13	00
52.	,, II	பா. மாணிக்கவேலு	13	00
53.	,, III	என். ஜே. ராஜகோபால்	8	00
54.	,, IV	,,	8	00

*மூல நூல் (Original Book)

வரலாறு— (தொடர்ச்சி)

எண்	நூல்	ஆசிரியர்	ரூ.	காசு
55.	இங்கிலாந்தின் வரலாறு—I	க. த. திருநாவுக்கரசு	15	00
56.	,, II	எம். எக்ஸ். மிராண்டா	8	00
57.	,, III	,,	5	00
58.	இந்தியாவின் சிறப்பு வரலாறு—I	தி. வெ. குப்புசாமி	7	50
59.	,, II	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	6	00
60.	,, III	அ. பாண்டுரங்கன்	7	25
61.	கிரேக்க நாட்டு வரலாறு—I	சைமன் ஜ. எஸ். பாக்கியநாதன்	7	50
62.	,, II	,,	7	00
63.	,, III	பி. இராமாநுஜம் தேவதாஸ்	7	75
64.	ஆக்ஸ்ஃபோர்டின் இந்திய வரலாறு—I	தி. வெ. குப்புசாமி	8	25
65.	,, II	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	7	50
66.	,, III	க. த. திருநாவுக்கரசு	10	50
67.	முகலாயப் பேரரசு—I	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப், எம். எக்ஸ். மிராண்டா	7	50
68.	,, II	எம். எஸ் மிராண்டா, பா. மாணிக்கவேலு	7	75
69.	ஆங்கில அரசியலமைப்பின் வரலாறு—I	வை. விருத்தகிரீசன்	7	50
70.	,, II	வை. விருத்தகிரீசன், இரா. அண்ணாமலை	6	75
71.	,, III	இரா. அண்ணாமலை, பா. மாணிக்கவேலு	6	50
72.	,, IV	பா. மாணிக்கவேலு	7	00
73.	ஆங்கிலேயரின் சமுதாய வரலாறு—I	சி. ஈ. இராமச்சந்திரன்	6	50
74.	,, II	சி. ஈ. இராமச்சந்திரன், இர. ஆலாலசுந்தரம்	6	75
75.	,, III	ஆர். ஆலாலசுந்தரம்	6	50
76.	இந்தியாவில் முகலாயரின் ஆட்சி—I	பா. மாணிக்கவேலு	5	00
77.	,, II	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	6	00

அரசியல்

78.	அரசியல் அமைப்புகள்	ஜே. இராமச்சந்திரன்	4	62
79.	அரசாங்கத்தின் வரலாறு	மோர். கிளாரன்சு, டி. டி. பெலிக்ஸ்	7	50
*80.	இந்திய அரசியலமைப்பு	வீ. கண்ணையா	4	75
81.	அரசியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்	டி. செல்லப்பா	8	50
82.	தற்கால அரசியல் அமைப்புகள்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	8	50
83.	பன்னாட்டு அரசியல்—I	திருமதி நூர்ஜஹான் பாவா	16	00
84.	,, II	,,	13	25
85.	பொதுத்துறை ஆட்சி இயல்—I	வீ. கண்ணையா	9	00
86.	,, II	இ. ஜெகதீசன்	7	25
87.	பொதுத்துறை ஆட்சியியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	வீ. கண்ணையா	7	50
88.	,, II	டி. செல்லப்பா	7	50
89.	இந்திய அரசியலமைப்புத் திட்டம்	தி.வெ. குப்புசாமி, எஸ். சுப்பிரமணியன்	9	25
90.	இந்திய ஆட்சி அமைப்புமுறை வளர்ச்சி—I	வீ. கண்ணையா	6	25
91.	,, II	வீ. கண்ணையா, கி. ர. அனுமந்தன்	5	75
92.	,, III	கி. ர. அனுமந்தன்	7	25
*93.	மக்கள் ஆட்சி	க. சந்தானம்	4	25
94.	1919 முதல் சர்வதேச உறவுகளும் உலக அரசியலும்—I	என். ஜே. ராஜகோபால்	7	75
95.	சமூக அரசியல் கொள்கையின் அடிப்படைகள்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	7	00
96.	அரசியலமைப்புச் சட்ட ஆய்வுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	பா. சூரியநாராயணன்	5	75

*மூல நூல் (Original Book)

அரசியல்—(தொடர்ச்சி)

			ரூ.	காசு
97.	அரசியலமைப்புச் சட்ட ஆய்வுக்கு ஓர் அறிமுகம்—II	பா.சூரியநாராயணன், கி.ர.அனுமந்தன்	6	00
98.	,, III	கி. ர. அனுமந்தன்	5	75

உளவியல்

99.	குழந்தை உளவியல்—I	கி. ர. அப்புள்ளாச்சாரி	8	00
100.	,, II	,,	7	00
101.	உட்கவர் மனம்	சி. ந. வைத்தீஸ்வரன்	7	00
102.	இளையோர் உளவியல்—I	தி. இரா. அரங்கராசன்	12	00
103.	,, II	,,	9	00
104.	சமூக உளவியல்	என். வேதமணி மானுவேல்	9	25
105.	பிறழ்நிலை உளவியல்	அ. பெசன்ட் கிரீப்பர்ராஜ்	11	00
106.	பித்தரின் உள்ளம்	,,	3	00
*107.	குமர உள்ளம்	டாக்டர் மு. அறம்	6	25
*108.	உளநலவியல்	டாக்டர் தா. ஏ. சண்முகம்	6	00

தத்துவம்

109.	இந்துசமயத் தத்துவம்	ஞா. ராஜாபகதூர்	5	50
*110.	அறிவு ஆராய்ச்சி இயல்	ஆர். ராமானுஜாச்சாரி	3	50
*111.	மேலைநாட்டுத் தத்துவம்	ஆர். எஸ். தேசிகன்	3	50
112.	அத்துவித தத்துவம்	கோ. மோ. காந்தி	6	50
113.	ஆங்கிலேயப் பயன்வழிக் கொள்கையினர்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	5	50

114. இந்தியத் தத்துவம்—I ... வ. அ. தேவசேனுபதி,
பா. நா. சண்முகசுந்தரம் ... 3 50

115. ,, II ... ,, ... 6 00

116. மெய்ப்பொருளியல்—ஓர் அறிமுகம்—I ... சி. இராமலிங்கம் ... 6 00

அறவியல்

117. அறவியல்-ஓர் அறிமுகம் ... கோ. மோ. காந்தி ... 8 50

அளவையியல்

118. அளவையியல் தொடக்க நூல் ... கி. ர. அப்புள்ளாச்சாரி ... 2 50

மானிடவியல்

*119. மானிடவியல் ... ம. சு. கோபாலகிருஷ்ணன் ... 4 75

120. பண்பாட்டுக் கோலங்கள் ... கி. பூ. சுப்பிரமணியம் ... 5 50

121. இந்தியாவில் குடியானவர் வாழ்க்கை ... எஸ். இலட்சுமி ... 3 50

சமூகவியல்

122. சமூகவியலின் அடிப்படைக் கோட்பாடுகள் ... ஜே. நாராயணன் ... 10 50

*மூல நூல் (Original Book)

புவியியல்

				ரூ.	காசு
*123.	ஆசியா—I	...	கொ. சேஷ. நரசிம்மன்	... 9	50
*124.	,, II	...	,,	... 8	75
*125.	ஐரோப்பாக் கண்டத்தின் புவியியல்	...	ஏ. எஸ். நாராயணன்	... 8	50
*126.	தென்கிழக்கு ஆசியா	...	ஜி. கிருஷ்ணமூர்த்தி	... 8	50
*127.	வட அமெரிக்கா	...	குமாரி இரா. அலமேலு	... 6	50
*128.	தென் அமெரிக்கா	...	எம். என். பத்மநாபன்	... 9	00
*129.	தென் கண்டங்கள்—ஆஸ்திரேலியா	...	திருமதி எச். நியூமன்	... 3	00
*130.	,, —ஆஃப்ரிக்கா	...	எஸ். முத்துக்கிருஷ்ணக் கரையாளர்	... 3	25
*131.	புவிப்புறவியல்—II	...	நா. அனந்தபத்மநாபன்	... 6	00
*132.	செய்முறைப் புவியியல்	...	சு. ஜெயச்சந்திரன்	... 5	50
*133.	மக்கட் பரப்பியல்	...	வி. எஸ். அனந்தபத்மனுபன்	... 4	75
*134.	சமுத்திரவியல்	...	கோ. இராமசாமி	... 6	50
135.	காலநிலை இயல்—I	...	கொ. சேஷ. நரசிம்மன்	... 10	00
136.	,, II	...	,,	... 5	00
*137.	காலநிலை இயல்—I	...	திருமதி இராதா	... 9	50
*138.	II	...	,,	... 8	00
139.	வளியியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்	...	கோ. இராமசாமி	... 5	50
*140.	புவி அமைப்பு இயல்	...	சி. விஸ்வநாதன்	... 4	75
141.	பௌதிகப் புவியியலும் புவியமைப்பியலும்	...	கோ. இராமசாமி	... 6	00
142.	சிஷோமின் வாணிகப் புவியியல்—I	...	எஸ். மாணிக்கம்	... 9	50
143.	,, II	...	எம். கார்த்திகேயன்	... 12	00

144.	சிஷோமின் வாணிகப் புவியியல்—III	... சி. எஸ். நரசிம்மன்	... 5	75

புள்ளியியல்

*145.	புள்ளியியல்—அறிமுகம்	... சு. வைத்தியநாதன்	... 10	75
146.	புள்ளியியல் முறைகள்—I	... கோ. சண்முகசுந்தரம்	... 10	00
147.	,, II	... இராஜகோபாலன்	... 14	00
148.	நம்மைச் சுற்றியுள்ள பேரண்டம்	... தி. வி. லட்சுமிநரசிம்மன்	... 6	50

உயர் கணிதம்

*149.	ஆயத்தொலை வடிவகணிதம்	... டி. கே. மாணிக்கவாசகம் பிள்ளை	... 4	25
*150.	வகை நுண்கணிதம்	... ,,	... 3	00
*151.	தொகை நுண்கணிதம்	... தி. கோவிந்தராசன்	... 3	25

விலங்கியல்

*152.	விலங்கியல்	... பெ. மா. அண்ணமலை, இரா. முருகேசன்	... 12	00

பௌதிகவியல்

*153.	ஒளி நூல்	... ச. சம்பத்து	... 10	00

விஞ்ஞானம்

*154.	வானவெளி வெற்றி	... டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ்	... 6	00
*155.	ரேடியோ	... டாக்டர் பி. திருஞானசம்பந்தம்	... 4	75

*மூல நூல் (Original Book)

விஞ்ஞானம்—(தொடர்ச்சி)

			ரூ.	காசு
*156.	எக்ஸ்–கதிர்கள்	... பெ.நா.அப்புசாமி, ஜே.பி. மாணிக்கம் ...	4	50
*157.	பாம்புகள்	... பெ. மா. அண்ணுமலை ...	3	50
*158.	தாவரம்–வாழ்வும் வரலாறும்	... டாக்டர் கு. சீனிவாசன் ...	8	00
*159.	கரும்பு	... கு. பெரியசாமி ...	4	00
*160.	தாவரங்களின் வாழ்வியல்	... எஸ். சுந்தரம் ...	6	50

மருத்துவம்

*161.	நீரிழிவு—க்ஷயரோகம்	... டாக்டர் ஜி. வேங்கடசாமி, டாக்டர் ஏ. கதிரேசன் ...	2	50
162.	மகப்பேறும் மாதர் நோயும்	... டாக்டர் (குமாரி) மணிமேகலை ...	8	25
*163.	பாக்டீரியா	... சு. சுந்தரம் ...	2	50
164.	புற்றுநோய்	... அ. கதிரேசன் ...	3	50
165.	உடலியங்கியல்—I	... டாக்டர்கள் ஜி. வேங்கடசாமி, டி. சரோஜினி, எஸ். கே. துரைராஜ், ஆர். சேது ...	6	75
166.	,, II	... ,, ...	5	50
167.	என்புருக்கி நோய்	... டாக்டர் அ. கதிரேசன் ...	7	25
168.	நீங்களே உங்கள் வீட்டைக் கட்டலாம்	... கே. வி. கிருஷ்ணராஜ், சி. ஆர். சுப்பிரமணியம், ஆர்.இராமசாமி, கே.வேணுகோபால்...	8	50

கூட்டுறவு

169.	உலகக் கூட்டுறவு இயக்கம்	... அ. வேல்மணி ...	5	50

சட்டம்

*170.	குற்றவியல் சட்டம்	எம். சண்முகசுப்பிரமணியம்	10 00

பொது நூல்கள்

171.	மகாத்மா காந்தி	சரஸ்வதி தங்கையன்	3 25
172.	விவசாயப் புரட்சி	வி. கார்த்திகேயன்	8 00
173.	சேமக் கைநூல்	ஆ. சுப்பிரமணியம்	2 50
*174.	முற்காலச் சோழர் கலையும் சிற்பமும்	எஸ். ஆர். பாலசுப்பிரமணியம்	9 00
*175.	உணவும் ஊட்டமும்	தி. வேங்கட கிருஷ்ணய்யங்கார்	4 50
*176.	பள்ளி நிருவாக அமைப்பு—அடிப்படைக் கருத்துகள்	எஸ். சந்தானம், எஸ். ஏ. துரைசிங்	6 25

புகுமுக (P.U.C.) வகுப்புகளுக்குரியவை

*177.	உலக வரலாறு	டி. ஆர். இராமச்சந்திரன்	4 00
*178.	பொருளாதாரம்	ஜி. சிதம்பரம்	2 75
*179.	வணிகவியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	கு. ஆளுடையபிள்ளை	2 50
*180.	,, II	,,	2 25
*181.	பௌதிகம்	டாக்டர் பி. திருஞானசம்பந்தம், ஆர். நாகராஜன்	6 00
*182.	புகுமுக பௌதிகம்	டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ்	5 75
*183.	பௌதிகம்—ஓர் அறிமுகம்	எஸ். சம்பத்	7 00
*184.	புகுமுக வகுப்புக் கணிதம்—I	கே. ராஜகோபாலன்	7 00
*185.	,, II	,,	3 00

*மூல நூல் (Original Book)

புகுமுக (P. U. C.) வகுப்புகளுக்குரியவை—(தொடர்ச்சி)

			ரூ.	காசு
*186.	புகுமுக வகுப்புக் கணித நூல்—I	டி. கோவிந்தராஜன், முத்துசாமி	7	00
*187.	,, II	,,	4	50
*188.	கணிதம்—ஓர் அறிமுகம்—I	ஆர். மகாதேவன்	4	75
*189.	,, II	,,	3	25
*190.	வேதியியல்	பி. டி. முனியப்பா, ஆர். முத்துலட்சுமி	7	00
*191.	புகுமுக வேதியியல்	சி. ஏ. பத்மநாபன்	5	50
*192.	விலங்கியல்	எஸ். ஆப்ரகாம்	4	00
*193.	புகுமுக விலங்கியல்	பெ. மா. அண்ணுமலை	7	25
*194.	புகுமுக வகுப்புத் தாவரவியல்	எஸ். சுந்தரம்	4	00

பட்டப்படிப்பிற்குரிய (பி. எஸ்ஸி.) நூல்கள்

(அடக்கவிலைப் பதிப்புகள் - கழிவு இல்லை)

பௌதிகம் (Physics)

*195.	எந்திரவியல்—சிறப்புப் பாடம்—I	ஆர். நாகராசன்	6	25
*196.	,, II	,,	5	50
*197.	வெப்பவியல்—சிறப்புப் பாடம்	கே. நாச்சிமுத்து	5	25
*198.	செய்முறை பௌதிகம்—சிறப்புப் பாடம்—I	டி. கமலக்கண்ணன், ஆர். கிருட்டிண சாமி	4	50
*199.	,, II	,,	3	25
*200.	பௌதிகம்—துணைப்பாடம்—I	பி. தங்கராஜன்	3	60
*201.	,, II	,,	3	00
*202.	செய்முறை பௌதிகம்—துணைப்பாடம்	கே. பாசுகரன், இரா. செயராம்	4	00

*203.	மின்னியல்-காந்தவியல்—சிறப்புப் பாடம்—I	டி. ஏ. கருப்பண்ணன்	4	75
*204.	,, II	,,	4	50
*205.	,, III	,,	4	25
*206.	ஒளியியல்—சிறப்புப் பாடம்	டாக்டர் வி. சண்முகசுந்தரம், ,, ஆர். சபேசன்	7	75
*207.	பௌதிகம்—துணைப்பாடம் (பகுதி-2) (முதல் புத்தகம்)	கா. வே. சுப்பிரமணியன்	6	00
*208.	,, (இரண்டாம் புத்தகம்)	,,	4	50
*209.	பொது பௌதிகம்—சிறப்புப் பாடம்	கே. பி. கந்தசாமி, எம். தியாகசுந்தரம்	4	50
*210.	இன்றைய பௌதிகம்—சிறப்புப் பாடம்	எம். ஏ. தங்கராஜ்	6	75
*211.	ஒலி நூல்—சிறப்புப் பாடம்	டி. முருகையன்	5	00

வேதியியல் (Chemistry)

*212.	செய்முறைக் கனிம வேதியியல்—துணைப்பாடம்	டாக்டர் என். முத்துக்குமாரசுவாமி	2	00
*213.	செய்முறைக் கனிம வேதியியல்—சிறப்புப் பாடம்	டி. இராமலிங்கம்	2	25
*214.	பௌதிக வேதியியல்—சிறப்புப் பாடம்—I	டி. சக்திவேலு	4	00
*215.	,, II	,,	3	50
*216.	கனிம வேதியியல்—துணைப் பாடம்	சி. ஏ. பத்மநாபன்	6	50
*217.	கனிம வேதியியல்—சிறப்புப் பாடம்—I	பி. டி. முனியப்பா	4	00
*218.	,, II	,,	4	25

* மூல நூல் (Original Book)

வேதியியல்—(தொடர்ச்சி)

			ரூ.	காசு
*219.	பொது பௌதிக வேதியியல்—துணைப்பாடம்	ஆர். துளசிதாஸ்	4	75
*220.	அறிமுறை வேதியியல்—சிறப்புப் பாடம்—I	ஓ. ஆர். சூரியநாராயணன்	4	50
*221.	,, II	,,	3	75
*222.	செய்முறைக் கரிம வேதியியல்—சிறப்புப் பாடம்	என். ஆறுமுகம்	3	50
*223.	அங்கக வேதியியல்—துணைப்பாடம்	பிஎல். இராமசாமி	5	00
*224.	அங்கவேதியியல்—I	எம். ஆட்கொண்டான்	3	00
*225.	கரிம வேதியியல்—பகுதி-I (இரண்டாம் புத்தகம்)	கி. கண்ணபிரான்	4	75
*226.	,, (மூன்றும் புத்தகம்)	,,	3	25
*227.	கரிம வேதியியல்-பகுதி-II (முதல் புத்தகம்)	,,	5	75
*228.	,, (இரண்டாம் புத்தகம்)	,,	6	00

கணிதம் (Mathematics)

*229.	இயற்கணிதம்—சிறப்புப் பாடம்—I	டி. கோவிந்தராஜன், கே. முத்துசாமி	4	25
*230.	,, II	,,	3	25
*231.	தொகுதிமுறை வரைகணிதம்—சிறப்புப் பாடம்	ஆர். மகாதேவன்	2	00
*232.	எண்சார் கணிதம்—சிறப்புப் பாடம்.	எம். எம். இராமசாமி	5	50
*233.	திரிகோண கணிதம்—சிறப்புப் பாடம்	வி. அரங்கநாதன்	3	25
*234.	கணிதம்—துணைப் பாடம்	ஆர். அனுமந்தராவ்	6	00
*235.	நிலையியல்—சிறப்புப் பாடம்	கே. இராஜகோபாலன்	5	00
*236.	முப்பரிமாணப் பகுமுறை வடிவகணிதம்—சிறப்புப் பாடம்	கே. சிவசுப்ரமணியன்	2	75

*237.	வெக்டர் கணிதமும் அதன் பயன்பாடுகளும்—சிறப்புப் பாடம்	ஆர். மகாதேவன்	2	00
*238.	கணிதம்—துணைப் பாடம்—பகுதி-2	ஆர். அய்யாசாமி	5	75
*239.	வானியல்—சிறப்புப் பாடம்—(முதல் புத்தகம்)	தி. கோவிந்தராசன், கொ. முத்துசாமி	5	50
*240.	,, (இரண்டாம் புத்தகம்)	,,	3	75
*241.	இயக்கவியல்—சிறப்புப் பாடம்	ஆர். மகாதேவன், கே. சிவசுப்பிரமணியம், பி. ஆர். சுப்பிரமணியம்	7	00

புள்ளியியல் (Statistics)

*242.	புள்ளியியல்—துணைப் பாடம்	எஸ். கருப்பையா	3	50

விலங்கியல் (Zoology)

*243.	முதுகெலும்பற்றவை—1—சிறப்புப் பாடம்	ஆர். முருகேசன்	6	00
*244.	,, 2 ,,	திருமதி எஸ். கே. வள்ளி	6	00
*245.	முதுகுநாணுள்ளவை—1—சிறப்புப் பாடம்	திருமதி ராணி கந்தசாமி	5	00
*246.	,, 2 ,,	,,	9	75
*247.	முதுகுத் தண்டுள்ளவை -2-சிறப்புப் பாடம்	திருமதி கிருஷ்ணவேணி நாராயணன்	5	75
*248.	முதுகெலும்பிகளது கருவியல்—சிறப்புப் பாடம்	எஸ். ஆப்ரகாம்	9	00
*249.	முதுகெலும்பற்றவை—துணைப் பாடம்	என். இராமலிங்கம்	9	00
*250.	முதுகு நாணுள்ளவை—துணைப் பாடம்	வி. சேது	6	00
*251.	செல்லியல்—சிறப்புப் பாடம்	என். இராமலிங்கம்	5	50
*252.	மரபியல்—சிறப்புப் பாடம்	பெ. மா. அண்ணமலை	5	25

* மூல நூல் (Original Book)

விலங்கியல்—(தொடர்ச்சி)

			ரூ.	காசு
*253.	சூழ்நிலையியல்—உடற் செயலியல்— சிறப்புப் பாடம்—I	டி. ஆர். கிருஷ்ணன்	4	75
*254.	,, ,, II	,,	6	50
*255.	பரிணாமம்	எஸ். ஆப்ரகாம்	6	25

தாவரவியல் (Botany)

*256.	தாவர வெளி, உள்ளமைப்பியல்களும் வகைப்பாட்டியலும்—சிறப்புப் பாடம்	கே. இராஜசேகரன்	11	00
*257.	தாவரப் புற அமைப்பியல்—சிறப்புப் பாடம்	கே. பாலச்சந்திரகணேசன்	9	25
*258.	தாவர உள்ளமைப்பியல்—சிறப்புப் பாடம்	டாக்டர் ஏ. கோவிந்தராஜுலு	7	25
*259.	தாவரங்களின் வாழ்க்கை— சிறப்புப் பாடம்	எஸ். சுந்தரம்	9	50
*260.	தாவரவியல்—துணைப் பாடம்	பா. இராசாராம்	4	50
*261.	தாவரச் சூழ்நிலையியல், மரபியல், உயிர் மருஉ இயல், இயங்கியல்—துணைப்பாடம்	கே. பெரியசாமி	4	00
*262.	சூழ்நிலையியல், பரிணாமம், மரபியல்— சிறப்புப் பாடம்	கே. ஆர். பாலச்சந்திரகணேசன்	8	25
*263.	டெரிடோஃபைட்டா, ஜிம்னோஸ்பெர்மே— சிறப்புப் பாடம்	கே. இராஜசேகரன்	10	25
*264.	தாலோஃபைட்டா (பாசிகளும் பூஞ்சைகளும்)—சிறப்புப் பாடம்	டாக்டர் வே. சோ. சுந்தரலிங்கம்	9	00
*265.	தாவர வகைப்பாட்டியல்—சிறப்புப் பாடம்	ஆ. சம்பத்குமார்	10	50
*266.	பிரையோஃபைட்டா—சிறப்புப் பாடம்	கே. இராஜசேகரன்	6	00

* மூல நூல் (Original Book)